МРНТИ 27.27.17
УДК 517.54

М.Р. Кадиева[1], *Ф.Ф.Майер*[1]

[1]*Костанайский государственный университет им. А. Байтурсынова, г. Костанай, Казахстан*

УСЛОВИЕ ВЫПУКЛОСТИ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА БЕРНАЦКОГО ДЛЯ ОДНОГО ПОДКЛАССА ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация

В статье осуществлено исследование на выпуклость интеграла Бернацкого в предложении, что рассматриваемая функция принадлежит подклассу звездообразных функций, удовлетворяющих определенным условиям. Для этого было рассмотрено условие выпуклости однолистных функций. Приведена геометрическая интерпретация условий, установлен радиус выпуклости звездообразных функций. Найдены промежутки для параметра, при которых интеграл Бернацкого будет выпуклой функцией во всем единичным круге, в случаи когда параметр не принадлежит данному промежутку, интеграл Бернацкого будет выпуклой функцией в круге меньшего радиуса. Приведены три следствия, в которых разобраны различные случаи выпуклости интеграла Бернацкого для аналитических функций, которые принадлежат классам функций с определенными условиями. Для рассмотренных классов аналитических функций определен радиус выпуклости интеграла Бернацкого.

Ключевые слова: интеграл Бернацкого, выпуклость, звездообразность, однолистные функции.

Аңдатпа

М.Р. Кадиева[1], *Ф.Ф.Майер* [1]

[1]*А. Байтурсынова атындағы Қостанай мемлекеттік университеті. Костанай қ., Қазақстан*

ЖҰЛДЫЗ ТӘРІЗДІ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ БІР ІШКІ КЛАССЫ ҮШІН ЖАЛПЫЛАНҒАН БЕРНАЦКИЙ ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ДӨҢЕСТІК ШАРТЫ

Мақалада Берацкий интегралының дөңес өтуі туралы зерттеу жүргізілді, қарастырылып жатқан функция белгілі бір шарттарды қанағаттандыратын жұлдызшалы функциялардың сыныбына жатады. Бұл үшін унивалентті функциялардың дөңес жағдайы қарастырылды. Жағдайдың геометриялық түсіндірмесі берілген, жұлдызшалы функциялардың дөңес радиусы орнатылды. Параметрдің интервалдары Берацкий интегралы тұтас бірлік шеңберіндегі дөңес функция болып табылған жағдайда, Берацкий интегралы параметрі аз радиустың шеңберінде дөңес функция болады. Берацкий интегралының әртүрлі жағдайлары аналитикалық функциялар үшін белгілі бір жағдайдағы функциялардың сыныптарына жататын әртүрлі жағдайлар қарастырылады. Аналитикалық функциялардың қарастырылған сыныптары үшін Бернастық интегралдың дөңес радиусы анықталады.

Түйін сөздер: Бернацкий интеграл, дөңес, жұлдызшалы, бірегейлі функциялар.

Abstract

CONVEXITY CONDITION OF THE GENERALIZED BERNATSKY INTEGRAL FOR ONE SUBCLASS OF STAR-LIKE FUNCTIONS

Kadiyeva M.R.[1], *Mayer F.F.* [1]

[1]*Kostanay state University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan*

The article carried out a study on the convexity of the Bernatsky integral in the proposition that the function in question belongs to a subclass of star-shaped functions that satisfy certain conditions. For this, the condition of convexity of univalent functions was considered. The geometrical interpretation of the conditions is given, the radius of the convexity of the star-shaped functions is established. The intervals for the parameter are found for which the Bernatsky integral is a convex function in the whole unit circle, in cases where the parameter does not belong to the given interval, the Bernatsky integral will be a convex function in a circle of smaller radius. Three consequences are given in which various cases of convexity of the Bernatsky integral for analytic functions that belong to classes of functions with certain conditions are analyzed. For the considered classes of analytic functions, the radius of convexity of the Bernatsky integral is determined.

Keywords: Biernacki integral, convexity, star-shaped, univalent functions.

Отдельное место в геометрической теории функций комплексного переменного занимают вопросы, связанные с изучением изменения геометрических свойств аналитических функций при интегральных преобразованиях. Одним из таких интегральных операторов является интеграл Бернацкого. Доказано, что он любую звездообразную функцию преобразует в выпуклую функцию. Далее, в работах ряда математиков исследовались геометрические свойства интеграла Бернацкого в предположении, что исходная функция принадлежит некоторым другим подклассам однолистных функций. Поэтому в настоящее время актуальным является исследование геометрических свойств интеграла Бернацкого в более широких классах функций, а также при условии обобщения самого интеграла Бернацкого.

Проведем исследование на выпуклость интеграла Бернацкого

$$F(z) = \int_0^z \left[\frac{f(t)}{t} \right]^{\alpha} dt \tag{1}$$

в предложении, что функция $f(z)$ принадлежит подклассу звездообразных функций, удовлетворяющих условию

$$\left| z\frac{f'(z)}{f(z)} - a \right| \le b, a > 0, b > 0, a - b > 0 \tag{2}$$

Условие (2) означает, что значения $z\frac{f'(z)}{f(z)}$ принадлежит кругу с центром в точке a радиус b рисунок 1. Так как $a - b > 0$, то из условия (2) следует, что

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)} \ge 0, \forall z \in E,$$

то есть условие (2) выделяет подкласс звездообразных функций. Кроме условия (2) будем также предполагать, что функция $f(z)$ имеет разложение в ряд Тейлора вида

$$f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + ..., \; n \ge 1, \; z \in E.$$

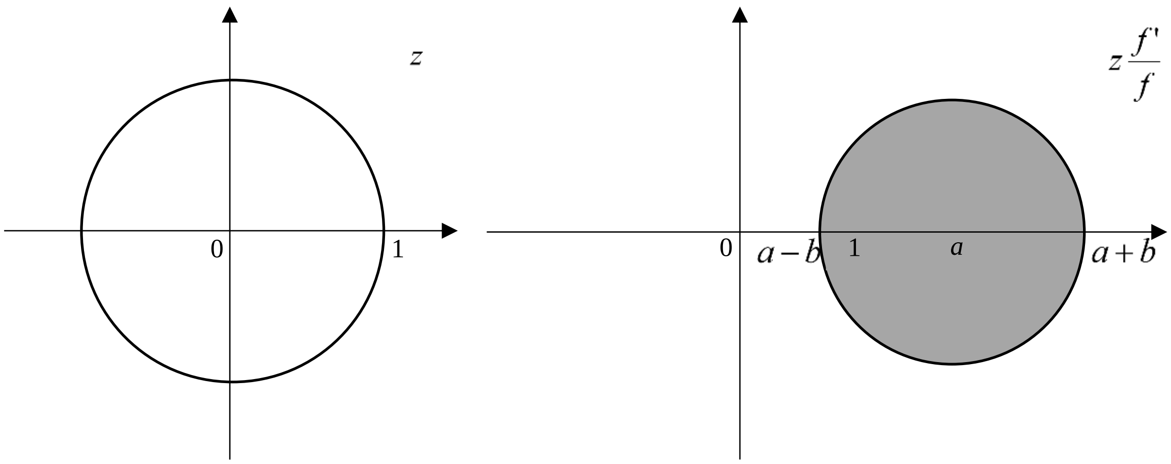

Рисунок 1. Пример отображения

Так как

$$z\frac{F''(z)}{F'(z)} = \alpha\left(z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right),$$

то

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{\alpha} \cdot z \cdot \frac{F''(z)}{F'(z)} + 1$$

Тогда неравенство (2) преобразуется к виду

$$\left|\frac{1}{\alpha}\cdot z\cdot\frac{F''(z)}{F'(z)}+1-a\right|\le b \qquad (3)$$

Исследуем неравенство (3) в зависимости от α .

Если $a>0$, то умножая обе части неравенства (3) на α , получим

$$\left|\frac{F''(z)}{F'(z)}-\alpha(\alpha-1)\right|\le b\alpha \qquad (4)$$

Геометрический смысл неравенства (4) показан рисунке 2.

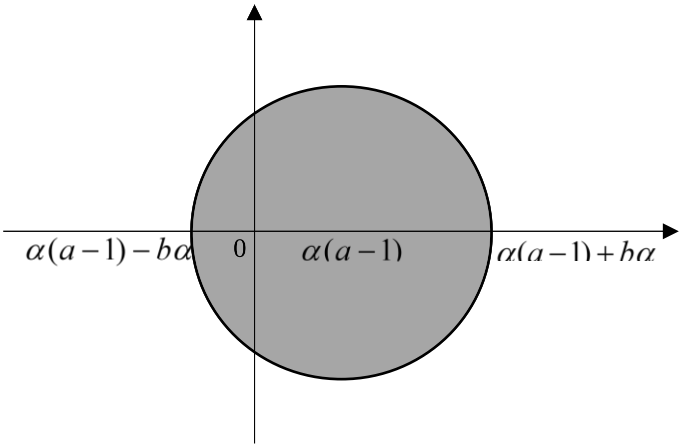

Рис. 2. Геометрическая интерпретация

Из условия (4) вытекает, что

$$\operatorname{Re} z\frac{F''(z)}{F'(z)}\ge\alpha(\alpha-1)-b\alpha.$$

Поэтому, если

$$\alpha(a-1-b)\ge -1. \qquad (5)$$

то есть

$$\alpha\le\frac{1}{1-(a-b)},$$

то $F(z)\in S^0$

Если $\alpha=0$, то $F(z)=z$, то есть $F(z)\in S^0$.

Пусть $\alpha>\dfrac{1}{1-(a-b)}$, , тогда неравенство (5) в круге *E* не выполняется. Найдем радиус выпуклости в этом случае.

Так как $z\dfrac{F''(z)}{F'(z)}$ удовлетворяет неравенству (4) и имеет место разложение вида

$$z\frac{F''(z)}{F'(z)}=c_n z^n+c_{n+1}z^{n+1}+...,$$

то в силу оценки получаем

$$\operatorname{Re} z\frac{F''(z)}{F'(z)} \geq \frac{r^n(\alpha^2(a-1)^2 - b^2\alpha^2)}{b\alpha + \alpha(a-1)r^n} \geq -1 \tag{6}$$

Тогда

$$r^n(b^2\alpha^2 - \alpha^2(a-1)^2) \leq b\alpha + \alpha(a-1)r^n,$$

$$r^n(b^2\alpha^2 - \alpha^2(a-1)^2 - \alpha(a-1)) \leq b\alpha,$$

$$r^n \leq \frac{b\alpha}{b^2\alpha^2 - \alpha^2(a-1)^2 - \alpha(a-1)}$$

Следовательно, радиус выпуклости равен

$$r^* \leq \sqrt[n]{\frac{b}{\alpha(b^2 - (a-1)^2) - (a-1)}} \tag{7}$$

Рассмотрим случай, когда $\alpha < 0$. Умножим обе части неравенства (3) на $|\alpha|$.

$$\left| -z\frac{F''(z)}{F'(z)} + |\alpha|(a-1) \right| \leq b|\alpha|,$$

или

$$\left| z\frac{F''(z)}{F'(z)} - \alpha(a-1) \right| \leq b|\alpha|,$$

Тогда

$$\operatorname{Re} z\frac{F''(z)}{F'(z)} \geq \alpha(a-1) - b|\alpha|.$$

или, учитывая, что $|\alpha| = -\alpha$, получаем

$$\operatorname{Re} z\frac{F''(z)}{F'(z)} \geq \alpha(a-1) + b\alpha.$$

Если $\alpha(a-1+b) \geq -1$, то есть $\alpha \geq \frac{1}{1-(a+b)}$, то $F(z) \in S^0$ в круге E.

В случае, когда $\alpha < \frac{1}{1-(a+b)}$, получаем

$$\operatorname{Re} z\frac{F''(z)}{F'(z)} \geq \frac{r^n(\alpha^2(a-1)^2 - b^2\alpha^2)}{b|\alpha| + \alpha(a-1)r^n} \geq -1 \tag{8}$$

Тогда

$$r^n(b^2\alpha^2 - \alpha^2(a-1)^2) \leq b|\alpha| + \alpha(a-1)r^n,$$

$$r^n(b^2\alpha^2 - \alpha^2(a-1)^2 - \alpha(a-1)) \leq b|\alpha|,$$

$$r^n \leq \frac{b|\alpha|}{(b^2\alpha^2 - \alpha^2(a-1)^2 - \alpha(a-1))}$$

Получим радиус выпуклости

$$r^{*} \le \sqrt[n]{\frac{b}{(\alpha((a-1)^2-b^2)+(a-1)}} \tag{9}$$

Формулы (7) и (9) можно объединить следующим образом

$$r^{*} \le \sqrt[n]{\frac{b sign\alpha}{(\alpha(b^2-(a-1)^2)-(a-1)}} \tag{10}$$

Покажем, что радиус выпуклости (10) является точным и достигается для функции

$$f_0(z) = \frac{z\left[b-(a-1)z^n\right]^{\frac{(a-1)^2-b^2}{n(a-1)}}}{b^{\frac{a^2-b^2-a}{n(a-1)}}} \tag{11}$$

Действительно, для интеграла Бернацкого с функцией $f(z)=f_0(z)$ имеем

$$z\frac{F''(z)}{F'(z)} = \alpha\left(z\frac{f_0'(z)}{f_0(z)}-1\right) = \alpha\frac{(b^2-(a-1)^2)z^n}{b-(a-1)z^n}.$$

При $\alpha>0$ в точке $z=re^{\frac{\pi}{n}i}$, где $r=r^*$, получим

$$\operatorname{Re} z\frac{F''(z)}{F'(z)} = \alpha\frac{(b^2-(a-1)^2)(-r^{*n})}{b+(a-1)r^{*n}}.$$

Тогда

$$\alpha\frac{((a-1)^2-b^2)r^{*n}}{b+(a-1)r^{*n}} = \frac{ab((a-1)^2-b^2)}{ab(b^2-(a-1)^2)-b(a-1)+b(a-1)} = -1.$$

Получили, что

$$\operatorname{Re} z\frac{F''(z)}{F'(z)} = -1,$$

то есть равенство достигается.

В случае $\alpha<0$ радиус выпуклости достигается для функции (11) в точке $z=r^*$. Действительно, в точке $z=r^*$ имеем

$$\operatorname{Re} z\frac{F''(z)}{F'(z)} = \alpha\frac{(b^2-(a-1)^2)r^{*n}}{b-(a-1)r^{*n}} = \frac{-\alpha b(b^2-(a-1)^2)}{\alpha b(b^2-(a-1)^2)-b(a-1)+b(a-1)} = -1$$

Вышеизложенное можно обобщить следующим образом.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ *аналитична в круге* E *, разлагается в ряд вида*

$$f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \ldots, n \ge 1, z \in E,$$

и принадлежит подклассу звездообразных функций, удовлетворяющих условию [1]

$$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)} - a\right| \le b,\ a>0,\ b>0,\ a-b>0,\ z\in E.$$

Тогда, если $\dfrac{1}{1-(a+b)} \le \alpha \le \dfrac{1}{1-(a-b)}$, то интеграл Бернацкого (1) будет выпуклой функцией во всем круге E. Если же α не принадлежит отрезку $\left[\dfrac{1}{1-(a+b)}, \dfrac{1}{1-(a-b)}\right]$ то функция $F(z)$ из (1) будет выпуклой в круге $|z| \le r^*$, где r^* определяется выражением

$$r^* = \sqrt[n]{\frac{bsign\alpha}{\alpha(b^2-(a-1)^2)-(a-1)}}$$

Радиус выпуклости является точным и достигается для функции (11).

Из этой теоремы можно вывести ряд следствий.

Положим $a = b$. Тогда получим:

Следствие 1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге E, разлагается в ряд вида

$$f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + ..., n \ge 1, z \in E,$$

и удовлетворяет условию

$$\left| z\frac{f'(z)}{f(z)} - a \right| \le a, a > 0, z \in E.$$

Тогда, если $\dfrac{1}{1-2a} \le \alpha \le 1$, то интеграл Бернацкого (1) будет выпуклой функцией во всем круге E [2]. В противном случае функция $F(z)$ из (1) будет выпуклой в круге $|z| \le r^*$, где r^* определяется выражением

$$r^* = \sqrt[n]{\frac{bsign\alpha}{\alpha(2a-1)-(a-1)}}$$

Радиус выпуклости является точным и достигается для функции

$$f_0(z) = z\left[a-(a-1)z^n\right]^{\frac{1-2a}{n(a-1)}} \cdot b^{\frac{a}{n(a-1)}}$$

Подкласс звездообразных функций, удовлетворяющих условию

$$\left| z\frac{f'(z)}{f(z)} - a \right| \le a, a > 0$$

ранее рассматривался в работах [3].

Теперь рассмотрим класс функций $f(z)$ таких, что

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)} \ge h, h > 0, z \in E$$

Данное условие получается из неравенства (2), если зафиксировать $h = a - b$ и перейти к пределу при $b \to +\infty$.

Выразим a через b и h, тогда

$$\frac{1}{1-(a+b)}=\frac{1}{1-(2b+h)}, \quad \frac{1}{1-(a-b)}=\frac{1}{1-h}$$

Так как $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-(2b+h)}=0$, то получили, что интеграл Бернацкого будет выпуклой функцией при $0\le\alpha\le\frac{1}{1-h}$.

Если $\alpha>\frac{1}{1-h}$ или $\alpha<0$ то функция $F(z)$ будет выпуклой в круге $|z|\le r^*$, радиус которого найдем, заменяя a на $b+h$ и переходя к переделу при $b\to+\infty$

$$\lim_{b\to+\infty} r^{*^n}=\lim_{b\to+\infty}\frac{b sign\alpha}{\alpha(b^2-(b+h-1)^2)-(b+h-1)}=$$
$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{b sign\alpha}{b(2\alpha(1-h)-1)+h(1-h)}=\frac{sign\alpha}{2\alpha(1-h)-1}$$

Следовательно,

$$r^*=\sqrt[n]{\frac{sign\alpha}{2\alpha(1-h)-1}}$$

Нетрудно показать, что радиус выпуклости является точным и достигается для функции

$$f_0(z)=z(1-z^n)^{\frac{2(h-1)}{n}}$$

Действительно, для интеграла Бернацкого с функцией $f(z)=f_0(z)$ имеем

$$z\frac{F''(z)}{F'(z)}=\alpha\left(z\frac{f_0'(z)}{f_0(z)}-1\right)=-\alpha\frac{2(h-1)\cdot z^n}{1-z^n}$$

При $\alpha>0$ радиус выпуклости достигается в точке $z=r^*e^{\frac{\pi}{n}i}$. В этой точке имеем

$$\operatorname{Re} z\frac{F''(z)}{F'(z)}=-\alpha\frac{2(h-1)(-r^{*^n})}{1+r^{*^n}}=\frac{2\alpha(h-1)}{2\alpha(1-h)+1-1}=-1.$$

В случае $\alpha<0$ радиус выпуклости достигается в точке $z\le r^*$. Действительно,

$$\operatorname{Re} z\frac{F''(z)}{F'(z)}=-\alpha\frac{2(n-1)r^{*^n}}{1-r^{*^n}}=\frac{2\alpha(h-1)}{2\alpha(1-h)+1-1}=-1$$

Следствие 2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге E, разлагается в ряд вида

$$f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\ldots,\ n\ge1,\ z\in E$$

и принадлежит классу функций, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)}\ge h,\ h>0,\ z\in E.$$

Тогда, если $0 \le \alpha \le \frac{1}{1-h}$, то интеграл Бернацкого (1) будет выпуклой функцией во всем круге E. В противном случае $F(z)$ из (1) будет выпуклой в круге $|z| \le r^*$, где радиус r^* равен

$$r^* = \sqrt[n]{\frac{sign\alpha}{2\alpha(1-h)-1}}$$

Радиус выпуклости является точным и достигается для функции

$$f_0(z) = z(1-z^n)^{\frac{2(h-1)}{n}}$$

Утверждение следствия 2 о выпуклости функции $F(z)$ в круге E совпадает с частным случаем одного из результатов Д.В. Прохорова [4].

Случай, когда $F(z) \in S^*$, то есть

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)} \ge 0,$$

Сводится к следствию 2 при $h = 0$.

Следствие 3. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге E, разлагается в ряд вида

$$f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \ldots, n \ge 1, z \in E$$

и принадлежит классу звездообразных функций.

Тогда, если $0 \le \alpha \le 1$, то интеграл Бернацкого (1) будет выпуклой функцией во всем круге E. Если же $\alpha < 0$ или $\alpha > 1$ то функция $F(z)$ будет выпуклой в круге $|z| \le r^*$, где радиус r^* равен

$$r^* = \sqrt[n]{\frac{sign\alpha}{2\alpha-1}}$$

Радиус выпуклости является точным и достигается для функции

$$f_0(z) = z(1-z^n)^{\frac{-2}{n}}$$

Список использованной литературы:

1 Causey, W.M. The close-to-covexity and univalence of an integral: Math. Z., 99, № 3, 1967. 207-212 c.

2 Базилевич, И.Е. Обобщение одной интегральной формулы для подкласса однолистных функций: Матем.сборник, 1964. 628-630 с

3 Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного: учеб. Пособие для вузов/И.И. Привалов – М.: Наука, 1984. 430 с.

4 Прохоров Д. В. Об одном обобщении класса почти выпуклых функций; Мат. заметки 11, № 5, 1972. 509 с.