

МРНТИ 205319  
УДК 004.421.2

Г.Б. Камалова<sup>1</sup>, К. Шайбасов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы

## PYTHON КАК ЭФФЕКТИВНОЕ СРЕДСТВО РАЗРАБОТКИ ЦИФРОВЫХ РЕСУРСОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

*Аннотация*

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является одной из наиболее распространенных задач в приложениях. Такие задачи, как правило, требуют больших объемов вычислений. Нередко решение системы является некорректной задачей, когда матрица ее коэффициентов имеет прямоугольный вид, вырожденная или плохо обусловленная. Сегодня без использования современных средств информационно-коммуникационных технологий вообще невозможно представить решение СЛАУ.

В статье обоснована необходимость разработки цифрового ресурса для решения систем линейных алгебраических уравнений любой сложности, с разными видами матрицы коэффициентов. Показано, что одним из наиболее эффективных средств его разработки является язык программирования Python. Благодаря наличию множества библиотек, он обладает достаточным для его реализации набором инструментов. Рассмотрены встроенные функции математических пакетов NumPy и SciPy, предназначенные для решения задач линейной алгебры. Показаны возможности применения пакета Matplotlib для визуализации решения СЛАУ и встроенного пакета Tkinter для разработки графического интерфейса разрабатываемого ресурса.

**Ключевые слова:** Python, система линейных алгебраических уравнений, цифровые ресурсы, калькулятор, NumPy, Matplotlib, Tkinter

*Аңдатпа*

Г.Б. Камалова<sup>1</sup>, К. Шайбасов<sup>1</sup>

## <sup>1</sup>Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан PYTHON СЫЗЫҚТЫ АЛГЕБРАЛЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІН ШЕШУ ҮШІН САНДЫҚ РЕСУРСТАРДЫ ДАМУ ТИІМДІ ҚҰРАЛЫ РЕТІНДЕ

Сызықты алгебралық тендеулер жүйесін (САТЖ) шешу қосымшаларда ең көп тараған міндеттердің бірі болып табылады. Мұндай проблемалар, әдетте, үлкен көлемде есептеуді қажет етеді. Бүгін, қазіргі заманғы ақпараттық және коммуникациялық технологияларды қолданбай, САТЖ шешімін елестеу мүмкін емес.

Мақалада кез-келген күрделіліктің әр түрлі коэффициенттік матрицалармен сызықтық алгебралық тендеулер жүйесін шешу үшін сандық ресурс дамыту қажеттігін негізделеді. Өзірлеудің тиімді құралдарының бірі Python бағдарламалау тілі екендігі көрсетілген. Көптеген пакеттердің болуына байланысты, оны жүзеге асыру үшін жеткілікті құралдар жиынтығы бар. Сызықтық алгебра есептерін шешуге арналған NumPy және SciPy математикалық пакеттерінің кіріктірілген функциялары қарастырылады. САТЖ ерітіндісін визуализациялау үшін Matplotlib пакетін пайдалану және әзірленетін ресурстардың графикалық интерфейсін жасауға арналған кірістірілген Tkinter пакетін мүмкіндіктері көрсетілген.

**Түйін сөздер:** Python, сызықтық алгебралық тендеулер жүйесі, сандық ресурстар, калькулятор, NumPy, Matplotlib, Tkinter

*Abstract*

## PYTHON AS AN EFFECTIVE TOOL OF DEVELOPING DIGITAL RESOURCES FOR NUMERICAL SOLVING SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

Kamalova G.B.<sup>1</sup>, Shaybasov K.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

The solution of systems of linear algebraic equations (SLAE) is one of the most common problems in applications. Such problems usually require large amounts of computing. Often, solving a system is an incorrect task when the matrix of its coefficients has a rectangular shape, degenerate or poorly conditioned. Today, without the use of modern means of information and communication technologies, it is generally impossible to imagine solution of a SLAE.

The article substantiates the need to develop a digital resource for solving systems of linear algebraic equations of any complexity, with different types of coefficient matrix. It is shown that one of the most effective development tools is the Python programming language. Due to the presence of many packages, it has a sufficient set of tools for its implementation. The built-in functions of the mathematical packages NumPy and SciPy, designed to solve linear algebra problems, are considered. The possibilities of using the Matplotlib package to visualize the solution of SLAE and the Tkinter built-in package for developing the graphical interface of the resource being developed are shown.

**Keywords:** Python, system of linear algebraic equations, digital resources, calculator, NumPy, Matplotlib, Tkinter.

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) является одной из самых распространенных и важных задач в приложениях. Математические модели многих явлений и процессов либо сразу строятся как линейные алгебраические системы, либо сводятся к ним посредством дискретизации или линеаризации. Но довольно часто они оказываются частью решения некоторой крупной научно-практической задачи, встречающейся во многих прикладных исследованиях, в том числе в линейном программировании, эконометрике, в области обратных и некорректных задач и др. По некоторым оценкам, они составляют более 70% из всех расчетных математических задач.

Облегчить вычислительную работу при их решении позволяет применение современных средств информационно-коммуникационных технологий. Без их использования сегодня практически невозможно представить себе решение систем линейных алгебраических уравнений.

На данный момент разработано и широко используется большое количество разнообразных инструментальных математических пакетов (MathCAD, MathLAB и т.д.), которые позволяют достаточно быстро на основе классических методов, получить решение значительного количества подобных задач. Для решения систем уравнений с особыми видами матриц их коэффициентов имеются также специально разработанные для этого цифровые ресурсы. Фирмой «IC», например, разработан ресурс, позволяющий решать системы с разреженной матрицей гораздо быстрее общепринятых классических методов, а для случая систем с плотной матрицей, используемый в нем алгоритм позволяет получить результаты достаточно близкие к классическим. Очень популярны сегодня онлайн-калькуляторы. Для решения систем линейных алгебраических уравнений в сети доступно огромное их множество.

Конечно, использование таких программных продуктов значительно облегчает и сокращает время их решения. Однако довольно часто нахождение решений многих систем является некорректной задачей, когда их матрица прямоугольная, или если квадратная, то сингулярная или плохо обусловленная. Наличие таких особых ситуаций в имеющихся средствах, обычно, не предусмотрено и сегодня практически не существует цифровых инструментов для нахождения решений СЛАУ с подобными матрицами коэффициентов. Хотя они востребованы, поскольку нахождение решений некорректных систем линейных алгебраических уравнений, знание особенностей их поиска имеет исключительно важное значение как при решении многих научно-практических задач, где подобные ситуации встречаются часто, так и в системе образования при изучении алгоритмов и численных методов решения задач линейной алгебры. Данное обстоятельство свидетельствует о необходимости разработки средства для нахождения решения систем линейных алгебраических уравнений с любой матрицей коэффициентов.

Среди множества существующих инструментов разработки цифровых ресурсов огромными возможностями, благодаря наличию различных библиотек, в которых реализованы практически все известные аналитические и численные алгоритмы решения задач линейной алгебры и имеется хорошая возможность визуализации данных, обладает универсальный язык Python.

Вышеизложенное и разрешение существующего противоречия

- между отсутствием средств решения систем линейных алгебраических уравнений, включая системы с прямоугольной, сингулярной, а также плохо обусловленной матрицей коэффициентов, и необходимостью их разработки и применения в современных условиях цифровизации; а также

- между возможностями языка Python как инструмента разработки подобных средств и недостаточной их изученностью свидетельствует об актуальности рассматриваемой темы.

Python сегодня – один из самых популярных и востребованных языков программирования [1]. Широкий перечень библиотек с внушительным набором полезных функций и возможностей обеспечивают его универсальность, расширяя тем самым области его применения. Особый интерес представляют, используемые в научных вычислениях его библиотеки NumPy [2], SciPy [3-4] и Matplotlib [5], позволяющие создать универсальную научно-вычислительную среду, практически не уступающую специализированным математическим пакетам подобным MatLab.

Библиотека NumPy является основной математической библиотекой (стандартной является math), которая содержит огромное количество математических функций, алгоритмы преобразования Фурье, генерации случайных чисел и др. Ее подмодуль numpy.linalg позволяет решать многие задачи линейной алгебры, такие как вычисление определителя матрицы, вычисление обратной и транспонированной матрицы, нахождение нормы матрицы и вектора, нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы, решение системы линейных алгебраических уравнений и т.п.

Пакет SciPy созданный на базе NumPy существенно расширяет ее возможности благодаря дополнительно встроенным модулям и функциям.

В частности, SciPy включает в себя подмодуль `scipy.linalg`, в которой кроме функций, реализованных в `numpy.linalg`, имеется множество дополнительных функций, предназначенных, для решения системы линейных алгебраических уравнений в случае, когда матрицы системы имеют специальный вид.

Библиотека `matplotlib` обладает хорошо развитыми возможностями визуализации двумерных и трехмерных данных.

Все эти библиотеки и функции представляют собой «вшитые» готовые решения и делают работу на языке удобнее и проще. Это и послужило основной причиной использования языка Python для разработки приложения по численным методам решения систем линейных алгебраических уравнений.

Современная вычислительная математика располагает огромным арсеналом методов решения различных, возникающих на практике систем линейных алгебраических уравнений, в том числе и с особыми видами матрицы коэффициентов. Все они должны быть структурированы и отражены в содержании разрабатываемого приложения. Достаточно подробная структурная схема решения СЛАУ, представлена в работе [6]. Она легла в основу работы над контентом разрабатываемого ресурса.

Следует заметить, что при численном решении любой математической задачи принято исследовать вопрос о ее корректности: существует ли ее решение, единственно ли оно и устойчиво ли, т.е. непрерывно зависит от входных данных. Решение СЛАУ не исключение. От этого зависит выбор метода и подходы к ее решению.

В связи с этим при решении СЛАУ предварительно проводится ее исследование на совместность в соответствии с теоремой Кронекера - Капелли, в ходе которого выясняется, существуют ли у нее решения или нет, а если существуют – то сколько их. Напомним, что если ранг матрицы коэффициентов системы равен рангу расширенной матрицы, то система имеет решение, если же ранги не равны, тогда система является несовместной и не имеет решений. При этом, если ранги равны между собой и равны количеству переменных ( $n$ ) в системе, то решение единственно, в противном случае, если ранги меньше  $n$  система является неопределённой и имеет бесчисленное множество решений.

Специальной функции в языке Python для этого не предусмотрено, поэтому программный код пишется самостоятельно. И так как алгоритм исследования системы на совместность достаточно прост, благодаря наличию в библиотеке `numpy` функции `matrix_rank()` для вычисления ранга матрицы и ряда других функций для обработки массивов, то и код для его реализации получается небольшой и несложный.

Далее, в случае совместности системы, следует найти ее решения. Выбор метода решения зависит от того, является ли матрица коэффициентов системы невырожденной или нет, что требует дополнительных исследований. В Python'e выяснить сингулярность матрицы возможно с помощью встроенной функции `linalg.det()` библиотеки `numpy`.

В случае квадратной невырожденной матрицы на выбор метода решения системы огромное значение оказывает число обусловленности матрицы ее коэффициентов. Оно оценивает близость этой матрицы к сингулярной и является важнейшим индикатором для определения устойчивости решения системы. Чем больше число обусловленности матрицы  $A$   $cond(A)$ , тем ближе она к вырожденной. Учитывая, что  $cond(A) \geq 1$ , то наилучшим числом обусловленности является 1. Системы с плохо обусловленными матрицами обычно некорректны. При численном их решении возможно сильное накопление погрешности. Например, при небольших изменениях правой части системы погрешность решения может оказаться значительной.

Для определения числа обусловленности в Python'e также как и в специализированных математических пакетах предусмотрена встроенная функция `linalg.cond()`.

Для систем с квадратной хорошо обусловленной матрицей решение существует и единственно. Они довольно часто встречаются в повседневных расчетах, поэтому методов их решения разработано много. Наиболее распространенными среди них являются метод Гаусса, применяемый преимущественно в случае системы с плотно заполненной матрицей коэффициентов, метод простой итерации, применяемый в случае систем с разреженной матрицей, матричный метод (метод решения системы через обратную матрицу) и др. Для решения систем линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей в языке Python имеется встроенная функция `linalg.solve()`. Он реализует матричный метод, остальные методы несложно реализовать самостоятельно.

На практике чаще встречаются системы, для которых матрица коэффициентов является сингулярной или плохо обусловленной, и нередко прямоугольной. Очевидно, что знание особенностей поиска их решения имеет исключительно важное значение.

Несмотря на то, что первые два типа систем уравнений существенно отличаются друг от друга (для систем с сингулярной матрицей решение отсутствует, а для систем с плохо обусловленной матрицей

существует и единственно), с вычислительной точки зрения они почти одинаковы. Для их решения используется простой, но чрезвычайно эффективный метод регуляризации Тихонова, основанный на привлечении дополнительной априорной информации о решении, которая часто имеется в практических случаях. К сожалению, мы не смогли найти функцию в Python'е, реализующую данный метод, поэтому в рамках разрабатываемого ресурса был самостоятельно написан программный код.

Не меньший интерес представляет решение систем с прямоугольной матрицей коэффициентов. Это, когда число уравнений системы оказывается больше числа неизвестных, так называемая переопределенная система и наоборот, недоопределенная система, когда число уравнений системы меньше числа неизвестных. Подобные системы довольно часто встречаются в приложениях, особенно при обработке эксперимента.

Для переопределенных систем вместо точного решения обычно ищут вектор, который наилучшим образом удовлетворяет всем уравнениям системы, т.е. минимизирует их невязку (расхождение между левой и правой частью системы). Это, так называемое, псевдорешение – вектор, минимизирующий норму невязки системы уравнений. Такой подход позволяет, с одной стороны, получить разумное, с физической точки зрения, решение задачи, а, с другой – использовать полезную информацию, заключенную во всех уравнениях.

Поскольку невязка здесь является векторной величиной, то, исходя из практических соображений, минимизация подвергается ее норма. И так как эта норма зависит от суммы квадратов компонент неизвестного вектора, то процедура поиска псевдорешения является ничем иным, как реализацией метода наименьших квадратов. Он реализован в функции `linalg.lstsq()` пакета SciPy.

Альтернативным рассмотренному является случай недоопределенной системы, которая, как несложно сообразить, либо имеет бесконечно много решений, либо не имеет решения вообще. Наиболее эффективным способом решения подобных систем является метод регуляризации.

Как видно из обзора, математические библиотеки Python содержат большое количество полезных инструментов: от быстрых операций с массивами до реализации различных математических методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

Довольно часто, чтобы лучше понять специфику задачи, осмыслить полученный результат прибегают к визуализации решения. В Python'е основные графические возможности реализованы функциями, сосредоточенными в пакете `matplotlib`, который является неким аналогом графических инструментов MatLab. Пакет `Matplotlib` поддерживает очень широкий спектр графиков как в двумерном, так и трехмерном случаях, позволяет в одной области отобразить графики нескольких функций и в разной цветовой гамме. Графическая интерпретация решения системы линейных алгебраических уравнений предусмотрена в разрабатываемом ресурсе.

В целом, ресурс включает в себя небольшой справочник по теории решения СЛАУ, что позволит при необходимости повторить теоретический материал, найти нужные формулы, выяснить, возникающие при решении систем уравнений, вопросы. Но, основной ее частью является калькулятор, позволяющий не только получить результат, но и увидеть графическую его интерпретацию, а если нужно, и пошаговое, детально расписанное решение системы уравнений. В нем предусмотрена возможность исследовать систему на совместность по теореме Кронекера-Капелли и определить количество ее решений, а также найти число обусловленности матрицы ее коэффициентов, вычислить ее определитель и найти обратную матрицу. При наличии решения он позволяет найти их одним из реализованных в нем численных методов: матричным методом, методом Гаусса или методом регуляризации в зависимости от вида матрицы коэффициентов.

Кроме библиотек NumPy, SciPy включающие множество встроенных функций, в которых реализованы основные методы решения СЛАУ, библиотеки `Matplotlib` для визуализации данных, при разработке использована библиотека Tkinter. Это встроенная, достаточно мощная, библиотека Python для разработки графического интерфейса. С ее помощью создано окно разрабатываемого приложения, на которое добавлены необходимые виджеты: управляющие кнопки, комбинированные поля для ввода данных и вывода результатов (рис.1).

Разработанный ресурс для численного решения систем линейных алгебраических уравнений, включающий информационно-справочный блок и калькулятор с множеством инструментов для исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений, может использоваться как в научных исследованиях, так и обучении и в самостоятельной учебной и исследовательской работе учащихся.

Он позволит освободить их от проведения громоздких вычислений и преобразований и сосредоточиться на сути задачи и, если необходимо, решить большее количество примеров.

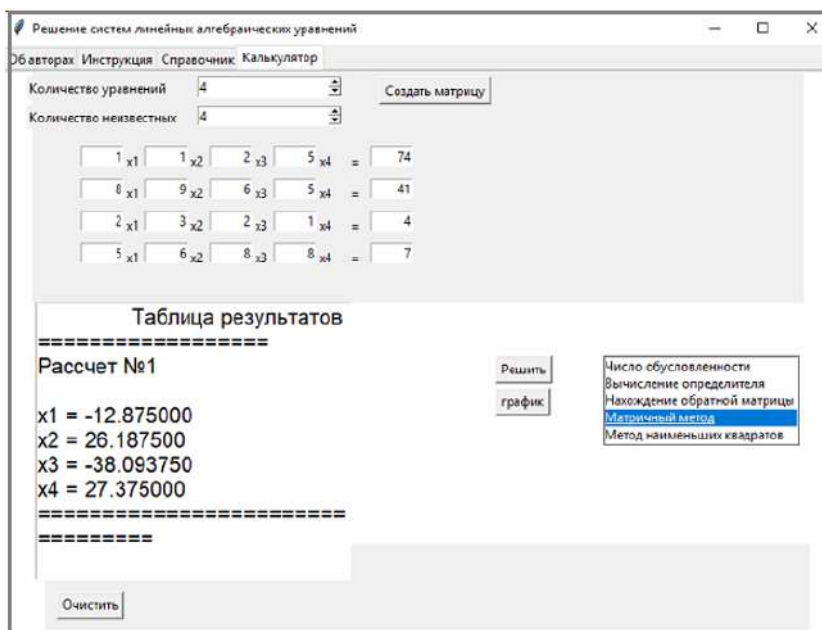


Рисунок 1. Окно, разработанного в Python'e, ресурса для решения систем линейных алгебраических уравнений

Более того, он предоставляет широкие возможности для самопроверки на всех этапах решения СЛАУ. При его использовании процесс учебной работы может проходить в режиме свободного исследования и будет близок по своему характеру к профессиональной деятельности специалиста.

А это будет способствовать повышению мотивации обучающихся к профессиональному использованию цифровых технологий в образовании и научных исследованиях, и в целом повышению качества образования.

Среди множества средств разработки цифровых ресурсов, Python является одним из самых эффективных инструментов разработки подобных ресурсов для численного решения систем линейных алгебраических уравнений. Благодаря наличию в нем множества библиотек существенно облегчена работа над ресурсом, многие задачи решены без написания программного кода.

#### Список использованной литературы:

- 1 Официальный сайт языка программирования python [Электронный ресурс]. URL: <https://www.python.org/about/> (дата обращения: 16.04.2020)
- 2 Пакет численного анализа NumPy [Электронный ресурс]. URL: <http://www.numpy.org/> (дата обращения: 16.04.2020)
- 3 Пакет научных вычислений SciPy [Электронный ресурс]. URL: <http://scipy.org/> (дата обращения: 16.04.2020)
- 4 SciPy v0.17.0 Reference Guide <http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/tutorial/general.html> (дата обращения: 16.04.2020)
- 5 Графическая библиотека Matplotlib [Электронный ресурс]. URL: <http://www.Matplotlib.org/> (дата обращения: 18.04.2020)
- 6 Кабанихин С.И., Бидайбеков Е.Ы., Корнилов В.С., Шолпанбаев Б.Б., Акимжан Н.Ш. Корректные и некорректные задачи для СЛАУ // Сибирские электронные математические известия, том 12, 2015. – С.255-263
- 7 Камалова Г.Б., Шайбасов К. К вопросу разработки цифрового ресурса по численным методам решения систем линейных алгебраических уравнений // Materiały XVI Międzynarodowej naukowo-praktycznej konferencji, «Naukowa przestrzeń Europy - 2020», Volume 7, Przemysł: Nauka i studia, 2020. – С.86-90