

У. Абылкаиров¹ , Х. Кенжебай¹ , А. Шәкір^{1*} 

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: ajdossakir@gmail.com

ЖАДЫ МҮШЕСІ БАР КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСІНІҢ ШЕШІМІНІҢ ЭКСПОНЕНЦИАЛДЫ КЕМУІ

Аңдатпа

Математикалық физика есептерінің қисындылығын, яғни шешімнің бар болуы, жалғыздығы мен орнықтылығын зерттеумен қатар оның шешімдерінің сапалық қасиеттерін зерттеу де маңызды болып табылады. Жалпы алғанда, математикалық физиканың және гидродинамиканың сызықты емес теңдеулері мен теңдеулер жүйесі үшін қойылған тура мен кері есептерінің шешімінің глобалды бар болуы мен жалғыздығын дәлелдеу оңайға соқпайды, себебі сызықты емес есептерді шешудің бірыңғай әдістері жоқ. Алайда, шешімнің кейбір сапалық қасиеттерін зерттей отырып, мәселен, ақырлы уақыттағы шешімнің қирауы не нөлге айналуы (локализациясы), не уақыттың шексіз өсуі кезіндегі өзгерісі және т.б. қасиеттерін іздене отырып, есепке бағалаулар алуға немесе шешімнің жалпы өзгеру сипатын көруге болады. Ұсынылып отырған жұмыста сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтың ағынын сипаттайтын сызықты Кельвин-Фойгт (Осколков) теңдеулер жүйесі үшін уақыттан тәуелді оң жағының коэффициентін анықтау кері есебі қарастырылған. Бұл есептің әлді және әлсіз шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы туралы нәтижелер толыққанды зерттелінді. Бұл мақалада әлді және әлсіз шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы туралы нәтижелерге сүйене отырып, аталмыш кері есептің жалпылама әлсіз шешімінің асимптотикалық қасиеті, нақтырақ айтқанда, экспоненциалды кемуді көрсетіледі.

Түйін сөздер: жады мүшесі бар Кельвин-Фойгт жүйесі, әлсіз шешім, шешімнің экспоненциалды кемуді.

У. Абылкаиров¹, Х. Кенжебай¹, А. Шакир¹

¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ЗАТУХАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КЕЛЬВИНА-ФОЙТА С ПАМЯТЬЮ

Аннотация

Помимо изучения корректности задач математической физики, то есть существования, единственности и устойчивости решений, важно также исследовать качественные свойства слабых решений. В целом, доказать глобальное существование и единственность решений прямых и обратных задач для нелинейных уравнений и систем уравнений математической физики и гидродинамики непросто, поскольку не существует универсальных методов решения нелинейных задач. Однако изучение некоторых качественных свойств решений, таких как разрушение решения за конечное время, локализация решений или изменение решения при бесконечном времени роста и т. п., может дать представление о характере общего изменения оценок или решений. В предлагаемой работе рассматривается обратная задача определения коэффициента правой части в зависимости от времени для системы линейных уравнений Кельвина-Фойгта (Осколкова), описывающей течение несжимаемой вязкоупругой жидкости. Результаты о существовании и единственности сильных и слабых решений этой задачи были получены и тщательно исследованы. В данной статье на основе существования единственности слабого и сильного решения показано асимптотическое свойство обобщенного слабого решения указанной обратной задачи, а именно экспоненциальное убывание.

Ключевые слова: система Кельвин-Фойгта с памятью, слабое решение, экспоненциальное затухание.

U. Abylkairov¹, Kh. Kenzhebai¹, A. Shakir¹

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

EXPONENTIAL DECAY OF SOLUTION TO THE KELVIN-VOIGT EQUATION WITH MEMORY

Abstract

In addition to studying the correctness of problems in mathematical physics, that is, the existence, uniqueness, and stability of solutions, it is also important to study the qualitative properties of these solutions. In general, proving the global existence and uniqueness of solutions to direct and inverse problems for nonlinear equations and systems of equations in mathematical physics and hydrodynamics is not easy, since there are no universal methods for solving nonlinear problems. However, studying some qualitative properties of solutions, such as the blowup of a solution in finite time, localization of solutions, or a large time behaviour of solutions, etc., can provide an idea of the nature of the general change in estimates or solutions. In this paper, we consider the inverse problem of determining the coefficient of the right-hand side as a function of time for a system of linear Kelvin-Voigt (Oskolkov) equations describing the flow of an incompressible viscoelastic fluid. The results on the existence and uniqueness of strong and weak solutions to corresponding problem has been studied. In this article, based on the results of the mentioned work, an asymptotic property of the generalized weak solution of the indicated inverse problem is shown, namely, exponential decay.

Keywords: Kelvin-Voigt system with memory term, weak solution, exponential decay.

1 Негізгі ережелер

Бұл мақалада сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтың қозғалысын сипаттайтын сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін коэффициентті кері есеп қарастырылды. Аталмыш кері есептің жалпылама әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі қасиеті зерттелінді.

Қарастырылып отырған кері есептің жалпылама әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі туралы интегралдық мүше болғанда ($K(t) \neq 0$) 1-теорема, болмағанда ($K(t) = 0$) 2-теорема алынды. Теоремалар математикалық қатаң тілде дәлелденді.

2 Кіріспе

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$ шенелген облыс және оның $\partial\Omega$ жатық шекарасы болсын. $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ бүйір бетімен анықталған $Q_T = \Omega \times [0, T], T > 0$ цилиндрінде $(\vec{v}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t), f(t))$ функциялар үштігін анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтардың ағынын сипаттайтын

$$\vec{v}_t - \Delta \vec{v}_t - \nu \Delta \vec{v} - \int_0^t K(t-s) \Delta \vec{v}(\mathbf{x}, s) ds - \nabla p = f(t) \vec{\sigma}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

жады мүшесі бар Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\operatorname{div} \vec{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T \quad (2)$$

сығылмайтын сұйық теңдеуін,

$$\vec{v}(\mathbf{x}, 0) = \vec{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3)$$

бастапқы шартын,

$$\vec{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T \quad (4)$$

сырғанау шекаралық шартын және

$$\int_{\Omega} \vec{v}(\mathbf{x}, t) \vec{\delta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = h(t), \quad t \in [0, T] \quad (5)$$

қосымша шартты қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық, мұндағы $\vec{v}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ – сұйықтың жылдамдығы мен $p(\mathbf{x}, t)$ – сұйықтың қысымы, ал ν оң саны сұйықтың кинематикалық тұтқырлығы. $\vec{F}(\mathbf{x}, t) := f(t)\vec{\sigma}(\mathbf{x})$ және $\vec{\sigma}(\mathbf{x}) := \vec{\omega}(\mathbf{x}) - \Delta\vec{\omega}(\mathbf{x})$ вектор функциясы сыртқы күштердің тығыздығын, ал $f(t)$ сыртқы күштердің интенсивтілігін сипаттайды. Сондай-ақ, $\vec{v}_0(\mathbf{x})$, $\vec{\sigma}(\mathbf{x})$, $h(t)$, $K(t)$ белгілі функциялар. (1)–(2) теңдеулер жүйесі Кельвин-Фойгт немесе Осколков жүйесі деп атайды. Бұл теңдеулер жүйесі сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтың ағынын сипаттайды. Аталмыш теңдеулер жүйесінің физикалық негіздемелері туралы мәліметтерді Павловский, Осколков, Звягин, Турвин [2–4] секілді ғалымдардың жұмысынан көруге болады.

Жалпы жағдайда, математикалық физиканың және гидродинамиканың сызықты және сызықты емес теңдеулері мен теңдеулер жүйесі үшін қойылған тура және кері есептерінің шешімінің глобалды бар болуы мен жалғыздығын дәлелдеу оңайға соқпайды, себебі сызықты емес есептерді шешудің бірыңғай әдістері жоқ. Алайда, шешімнің кейбір сапалық қасиеттерін зерттей отырып, мәселен, ақырлы уақыттағы шешімнің қирауы (шешімнің глобалды шешілмеуі) немесе нөлге айналуы (локализациясы), немесе уақыттың шексіз өсуі кезіндегі өзгерісі және т.б. қасиеттерін зерттей отырып, есепке бағалаулар немесе шешімнің жалпы өзгеру сипатын көруге болады. Бұл жұмыс үшінші автордың Хомпыш және Кабидолдановмен бірге бұған дейінгі жарық көрген [5] жұмысының жалғасы болып табылады. Себебі бұл мақалада сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтың ағынын сипаттайтын сызықты Кельвин-Фойгт (Осколков) теңдеулер жүйесі үшін уақыттан тәуелді оң жағының коэффициентін анықтау кері есебінің жалпылама әлсіз шешімінің асимптотикалық қасиеті, нақтырақ айтқанда, экспоненциалды кемуі көрсетіледі. Бұл есептің әлді және әлсіз шешімдерінің бар болу және жалғыздығы туралы нәтижелер [5] жұмыста алынған.

Сызықты және сызықты емес Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі үшін қойылған оң жағының коэффициентін анықтау кері есептерінің әлсіз және әлді шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы [5–8] жұмыстарда қарастырылған. Сондай-ақ, жалпылама модификацияланған Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесі әлсіз және әлді шешімдерінің ақырлы уақытта қирауы, дәрежелік және экспоненциалды кемуі секілді асимптотикалық қасиеттері тура есептер үшін жеткілікті дәрежеде Хомпыш, Юшков, Мессауди секілді авторлардың [9,10] жұмыстарында зерттелінді.

(1)–(5) кері есебінің әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі $K(t)$ функциясының нөлге тең және нөлден өзгеше болғанда дәлелденеді. Егер $K(t)$ функциясы нөлге тең болса, онда әлсіз шешімнің экспоненциалды кемуі [11,12] жұмыстардағыдай оңай дәлелдеуге болады. Ал, $K(t)$ функциясы нөлден өзгеше жағдайда әлсіз шешімнің экспоненциалды кемуін дәлелдеу оңайға соқпайды әрі жаңа талпыныстарды қажет етеді.

3 Зерттеу әдіснамасы

Бұл мақаладағы алынған нәтижелер теориялық зерттеудің жемісі болып табылады. Сонымен қатар, арнайы лабораторияларда жүзеге асырылатын эксперименттік зерттеулер мен талдаулар жүргізілмегенін авторлар ұжымы хабарлайды. Зерттеу барысында дербес туындылы дифференциалдық теңдеулері, Навье-Стокс жүйесі және онымен байланысты гидродинамиканың теңдеулері үшін қойылған сызықты және сызықты емес есептерді математикалық тұрғыдан ізденуде пайдаланылатын заманауи және классикалық әдістердің тиімді комбинациясы қолданылды. Мысалға айтар болсақ, энергетикалық функциялар әдісі, енгізу теоремалары және т.б.

Функционалдық теңсіздіктер

Сұйық механикасынан белгілі келесі функционалдық кеңістіктердің анықтамасын берейік

$$\mathfrak{Z} := \{\vec{v} \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} \vec{v} = 0\},$$

$$V := \left\{ L^2(\Omega) \text{ нормасы бойынша } \mathfrak{Z} \text{ тұйықталуы} \right\};$$

$$\mathbf{H} := \left\{ W_2^1(\Omega) \text{ нормасы бойынша } \mathfrak{Z} \text{ тұйықталуы} \right\}.$$

1-анықтама. (1)-(5) кері есебінің әлсіз шешімі деп

$$1. \vec{v} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}), \quad \vec{v}_t \in L^2(0, T; \mathbf{H}), \quad f(t) \in L^2[0, T];$$

$$2. \Omega - \text{да барлық дерлік жерде } \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \text{ бастапқы шартты};$$

$$3. \text{барлық } t \in (0, T) \text{ үшін (5) қосымша шартты};$$

$$4. \text{Кез келген } \varphi \in \mathbf{H} \text{ және барлық } t \in (0, T) \text{ үшін төмендегі интегралдық тепе-теңдікті}$$

$$\frac{d}{dt} \left((\vec{v}(t), \vec{\varphi})_{2, \Omega} + (\nabla \vec{v}(t), \nabla \vec{\varphi})_{2, \Omega} \right) + \nu (\nabla \vec{v}(t), \nabla \vec{\varphi})_{2, \Omega} = f(t) (\vec{\sigma}, \vec{\varphi})_{2, \Omega} - \int_0^t K(t-s) (\nabla \vec{v}(s), \nabla \vec{\varphi})_{2, \Omega} ds \quad (6)$$

қанағаттандыратын $(\vec{v}(x, t), f(t))$ функциялар жұбын атайды.

Айталық, (1)-(5) кері есебінің берілгендеі келесі шарттарды қанағаттандырсын

$$\vec{v}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}; \quad (7)$$

$$\vec{\omega}(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}, h(t) \in W_2^1([0, T]); \quad (8)$$

(1)-(5) есебінің әлсіз шешімінің бар болуы мен жалғыздығы [5] жұмыста дәлелденді.

$K(t) \neq 0$ кезде экспоненциалды кемуі

Ең алдымен $K(t) \neq 0$ жағдайда, (1)-(5) есебінің әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуін көрсетейік. Олай болса, (1) өрнекті $\vec{v}$ функциясына көбейтіп, x айнымалысы бойынша Ω облыста интегралдап және бөліктеп интегралдау өрнегінің көмегімен

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\vec{v}(t)\|_V^2 + \|\vec{v}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \right) + \nu \|\vec{v}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 = \int_0^t K(t-s) (\nabla \vec{v}(s), \nabla \vec{v}(t))_{2, \Omega} ds + S_1(\vec{v}, t) h(t) := \sum_{i=1}^2 J_i \quad (9)$$

энергетикалық теңдігін алуға болады, мұндағы

$$S_1(\vec{v}(t), t) = \frac{1}{k_0} \left(h'(t) + \nu (\nabla \vec{v}(t), \nabla \vec{\omega})_{2, \Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \vec{v}(s), \nabla \vec{\omega})_{2, \Omega} ds \right); \quad k_0 = \|\vec{\omega}\|_V^2 + \|\vec{\omega}\|_{\mathbf{H}}^2.$$

Енді (10) өрнектің оң жағын бағалайық

$$|J_1| \leq \frac{\varepsilon_0 \nu}{4} \|\vec{v}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{\varepsilon_0 \nu} \left(\int_0^t K(t-s) \|\vec{v}(s)\|_{\mathbf{H}} ds \right)^2, \quad (10)$$

$$|J_2| \leq \frac{|h(t)| \cdot |h'(t)|}{k_0} + \frac{\varepsilon_0 \nu}{4} \|\vec{v}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\nu}{\varepsilon k_0^2} |h(t)|^2 \|\vec{\omega}\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2 \varepsilon_1 k_0^2} |h(t)|^2 \|\vec{\omega}\|_{\mathbf{H}} + \frac{\varepsilon_1}{2} \|\vec{\omega}\|_{\mathbf{H}} \left(\int_0^t K(t-s) \|\vec{v}(s)\|_{\mathbf{H}} ds \right)^2. \quad (11)$$

Соңғы (10), (11) бағалауларды (9) өрнекке оң жағына апарып қойсақ, онда

$$\frac{d}{dt} \left(\|\bar{v}(t)\|_V^2 + \|\bar{v}(t)\|_H^2 \right) + \nu(2 - \varepsilon_0) \|\bar{v}(t)\|_H^2 \leq \left(\frac{2}{\varepsilon_0 \nu} + \varepsilon_1 \|\bar{\omega}\|_H \right) \left(\int_0^t K(t-s) \|\bar{v}(s)\|_H ds \right)^2 + C_1(t) \quad (12)$$

бағалауы тұжырымдалады, мұндағы $C_1(t) := \left(\frac{2\nu}{\varepsilon k_0^2} \|\bar{\omega}\|_H^2 + \frac{1}{\varepsilon_1 k_0^2} \|\bar{\omega}\|_H \right) |h(t)|^2 + \frac{|h(t)| \times |h'(t)|}{k_0}$. Соңғы өрнекті s бойынша 0 –ден t –ға дейін интегралдағанда, келесі өрнек қорытылады

$$\|\bar{v}(t)\|_V^2 + \|\bar{v}(t)\|_H^2 + \nu(2 - \varepsilon_0) \int_0^t \|\bar{v}(s)\|_H^2 ds \leq \left(\frac{2}{\varepsilon_0 \nu} + \varepsilon_1 \|\bar{\omega}\|_H \right) \int_0^t \left(\int_0^s K(s-\tau) \|\bar{v}(\tau)\|_H d\tau \right)^2 ds + C_2, \quad (13)$$

мұндағы $C_2 := \int_0^t C_1(s) ds$. Сонымен қатар, (13) өрнектегі интегралдық мүше үшін

$$\left(\int_0^t K(t-\tau) \|\bar{v}(\tau)\|_H d\tau \right)^2 \leq \int_0^t |K(t-\tau)| d\tau \int_0^t |K(t-\tau)| \|\bar{v}(\tau)\|_H^2 d\tau = \|K\|_{L^1[0,T]} \int_0^t |K(t-\tau)| \|\bar{v}(\tau)\|_H^2 d\tau \quad (14)$$

бағалауын қорытуға болады. Сондай-ақ, m_0, α оң сандары табылып, $|K(t)| \leq m_0 e^{-\alpha t}$, $t \in R^+$ болса, онда төмендегі бағалауды алуға болады

$$y_1(t) = \|K\|_{L^1[0,T]} = \int_0^t |K(\tau)| d\tau \leq \frac{m_0}{\alpha} \quad \text{және} \quad y_2(t) = \|K\|_{L^2[0,T]} = \left(\int_0^t |K(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{m_0}{\sqrt{2\alpha}} \quad (15)$$

Жоғарыдағы (15) өрнектің көмегімен келесі теңсіздік тұжырымдалады

$$\int_0^t \int_0^s |K(s-\tau)| \|\bar{v}(\tau)\|_H^2 d\tau ds \leq \int_0^t \int_0^t |K(s-\tau)| \|\bar{v}(\tau)\|_H^2 d\tau ds = \int_0^t \|\bar{v}(\tau)\|_H^2 \int_0^t |K(s-\tau)| ds d\tau \leq \|K\|_{L^1[0,T]} \int_0^t \|\bar{v}(\tau)\|_H^2 d\tau \quad (16)$$

Осылайша (14)-(16) өрнектерді (13) өрнекке ескерсек, онда бағалау алынады

$$\|\bar{v}(t)\|_V^2 + \|\bar{v}(t)\|_H^2 + C_0 \int_0^t \|\bar{v}(s)\|_H^2 ds \leq M_1, \quad (17)$$

мұндағы $C_0 := \nu(2 - \varepsilon_0) - \left(\frac{2\nu}{\varepsilon k_0^2} \|\bar{\omega}\|_H^2 + \frac{1}{\varepsilon_1 k_0^2} \|\bar{\omega}\|_H \right) \left(\frac{m_0}{\alpha} \right)^2 > 0$ және M_1 есептің берілгендерінен тәуелді

оң сан. Мысалы, $\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon_0}{2\nu \|\bar{\omega}\|_H}$, $\varepsilon_0 := \left(\frac{2m_0}{\alpha} \right)^2$, $\alpha^2 > (2m_0)^2$ мәні үшін $C_0 > 0$ болады.

Енді $0 < \gamma < \alpha$ саны үшін $\bar{v} = \bar{u}e^{-\gamma t}$ деп алсақ және $\bar{v}_t = \bar{u}_t e^{-\gamma t} - \gamma \bar{u} e^{-\gamma t}$ тең екенін көру оңай. Бұл ұйғарымдарды (1) өрнекке ескерсек, онда төмендегі өрнек шығады

$$\bar{u}_t e^{-\gamma t} - \gamma \bar{u} e^{-\gamma t} - \Delta(\bar{u}_t e^{-\gamma t} - \gamma \bar{u} e^{-\gamma t}) - \nu \Delta \bar{u} e^{-\gamma t} - \int_0^t K(t-s) \Delta \bar{u} e^{-\gamma s} ds =$$

$$\frac{\vec{\sigma}(x)}{k_0} \left[h'(t) + \nu \int_{\Omega} \nabla \bar{u} e^{-\gamma t} \nabla \bar{\omega} dx + \int_0^t K(t-s) \int_{\Omega} \nabla \bar{u} e^{-\gamma s} \nabla \bar{\omega} dx ds \right]$$

Соңғы өрнектің екі жағына $e^{-\gamma t}$ -ті көбейтсек, онда келесі өрнек тұжырымдалады

$$\begin{aligned} \bar{u}_t - \gamma \bar{u} - (\Delta \bar{u}_t - \gamma \Delta \bar{u}) - \nu \Delta \bar{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \bar{u} e^{\gamma(t-s)} ds = \\ \frac{\vec{\sigma}(x)}{k_0} \left[h'(t) e^{-\gamma t} + \nu \int_{\Omega} \nabla \bar{u} \nabla \bar{\omega} dx + \int_0^t K(t-s) \int_{\Omega} \nabla \bar{u} e^{\gamma(t-s)} \nabla \bar{\omega} dx ds \right] \end{aligned}$$

Мұнан соң жоғарыдағы өрнекті $\bar{u}$ функциясына көбейтіп, x айнымалысы бойынша Ω облыста интегралдап, бөліктеп интегралдасақ, онда келесі теңдік шығады

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\bar{u}(t)\|_V^2 + \|\bar{u}(t)\|_{\mathbf{H}}^2) - \gamma \|\bar{u}(t)\|_V^2 - \gamma \|\bar{u}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \nu \|\bar{u}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 = \int_0^t K_{\gamma}(t-s) (\nabla \bar{u}(s), \nabla \bar{u}(t))_{2,\Omega} ds + \\ \frac{h(t) e^{-\gamma t}}{k_0} \left[h'(t) + \nu (\nabla \bar{u}, \nabla \bar{\omega})_{2,\Omega} + \int_0^t K_{\gamma}(t-s) (\nabla \bar{u}, \nabla \bar{\omega})_{2,\Omega} ds \right], \end{aligned} \quad (18)$$

мұндағы $K_{\gamma}(t) := K(t) e^{\gamma t}$. Егер $\gamma < \alpha$ жағдайда төмендегі бағалауларды алуға болады

$$\|K_{\gamma}(t)\|_{L^1[0,T]} = \int_0^t K(s) e^{\gamma s} ds \leq \int_0^t m e^{-(\alpha-\gamma)s} ds \leq \frac{m}{\alpha-\gamma}; \quad \|K_{\gamma}(t)\|_{L^2[0,T]} = \left(\int_0^t |K(s) e^{\gamma s}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{m}{\sqrt{2(\alpha-\gamma)}}. \quad (19)$$

Сонымен қатар, Фридрихс теңсіздігінен

$$-\|\bar{u}(t)\|_V^2 \geq -C \|\bar{u}(t)\|_{\mathbf{H}}^2$$

теңсіздігін қорытуға болады. Соңғы бағалаудан

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\bar{u}(t)\|_V^2 + \|\bar{u}(t)\|_{\mathbf{H}}^2) + (\nu - \gamma - \gamma C) \|\bar{u}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \leq \int_0^t K_{\gamma}(t-s) (\nabla \bar{u}(s), \nabla \bar{u}(t))_{2,\Omega} ds + \\ \frac{h(t) e^{-\gamma t}}{k_0} \left[h'(t) - \nu (\nabla \bar{u}, \nabla \bar{\omega})_{2,\Omega} + \int_0^t K_{\gamma}(t-s) (\nabla \bar{u}, \nabla \bar{\omega})_{2,\Omega} ds \right] \end{aligned} \quad (20)$$

өрнегі алынады. Осылайша (10) және (18), (19), (20) өрнектерден келесі нәтижені алуға болады

$$\|\bar{u}(t)\|_V^2 \leq M_2,$$

мұндағы M_2 есептің берілгендерінен тәуелді оң сан және $\vec{v} = \bar{u} e^{-\gamma t}$ өрнегін ескеріп төмендегі нәтижені тұжырымдауға болады

$$\Psi(t) = \|\vec{v}(t)\|_V \leq M_2 e^{-\gamma t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Олай болса, алынған нәтижені теорема ретінде тұжырымдайық.

1-теорема. Айталық, (7), (8) шарттары орындалсын. Сонымен бірге m_0, α оң сандары табылып $|K(t)| \leq m_0 e^{-\alpha t}, t \in R^+$ және (15) шарт орынды болсын. Онда $M_2 > 0$ саны табылып $0 < \gamma < \alpha$ үшін $\Psi(t)$ функциясы келесі қасиетке ие болады

$$\Psi(t) \leq M_2 e^{-2\gamma t},$$

яғни $\Psi(t)$ функциясы t шексіздікке ұмтылғанда ($t \rightarrow \infty$) экспоненциалды кемиді.

$K(t) = 0$ кезде экспоненциалды кемуі

Енді (1)-(5) кері есебінің әлсіз шешімінің $K(t) = 0$ және $\vec{\sigma}(x) := \vec{\omega}(x)$ болғанда экспоненциалды кемуін зерттейік. (1) теңдеулер жүйесін $\vec{v}$ және $\vec{v}_t$ функцияларына көбейтіп, x айнымалысы бойынша Ω облыста интегралдайық. Мұнан кейін, бөліктеп интегралдау өрнегін қолданып, келесі энергетикалық теңдіктер шығады

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\vec{v}(t)\|_V^2 + \|\vec{v}(t)\|_H^2) + \nu \|\vec{v}(t)\|_H^2 = S_2(\vec{v}, t) h(t) \quad (21)$$

$$\frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}(t)\|_H^2 + \|\vec{v}_t(t)\|_V^2 + \|\vec{v}_t(t)\|_H^2 = S_2(\vec{v}, t) h'(t) \quad (22)$$

мұндағы

$$S_2(\vec{v}(t), t) = \frac{1}{l_0} (h'(t) + (\nabla \vec{v}_t(t), \nabla \vec{\omega})_{2,\Omega} + \nu (\nabla \vec{v}(t), \nabla \vec{\omega})_{2,\Omega}); \quad l_0 = \|\vec{\omega}\|_V^2. \quad (23)$$

Осылайша (21) және (22) өрнектерден келесі теңдікті тұжырымдауға болады

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\vec{v}(t)\|_V^2 + (\nu + 1) \|\vec{v}(t)\|_H^2) + \nu \|\vec{v}(t)\|_H^2 + \|\vec{v}_t(t)\|_V^2 + \|\vec{v}_t(t)\|_H^2 = S_2(\vec{v}(t), t) h(t) + S_2(\vec{v}(t), t) h'(t) \quad (24)$$

Соңғы өрнектің оң жағындағы қосылғыштарды бағалайық

$$|S_2(\vec{v}(t), t) h(t)| \leq \frac{|h(t)|^2 + |h'(t)|^2}{2l_0^2} + \frac{1}{4} \|\vec{v}_t(t)\|_H^2 + \frac{1+\nu}{l_0^2} |h(t)|^2 \|\vec{\omega}\|_H^2 + \frac{\nu}{4} \|\vec{v}(t)\|_H^2 \quad (25)$$

$$|S_2(\vec{v}(t), t) h'(t)| \leq \frac{|h'(t)|^2}{l_0^2} + \frac{1}{4} \|\vec{v}_t(t)\|_H^2 + \frac{1+\nu}{l_0^2} |h'(t)|^2 \|\vec{\omega}\|_H^2 + \frac{\nu}{4} \|\vec{v}(t)\|_H^2 \quad (26)$$

Мұнан кейін (25) және (26) бағалауларды (24) теңдіктің оң жағына қойғанда

$$\Phi'(t) + \nu \|\vec{v}(t)\|_H^2 + \|\vec{v}_t(t)\|_V^2 + \|\vec{v}_t(t)\|_H^2 \leq A (|h(t)|^2 + |h'(t)|^2) \quad (27)$$

теңсіздігі тұжырымдалады, мұндағы

$$\Phi(t) := \frac{1}{2} (\|\vec{v}(t)\|_V^2 + (\nu + 1) \|\vec{v}(t)\|_H^2) \quad \text{және} \quad A := \left(\frac{2(1+\nu) \|\vec{\omega}\|_H^2 + 1 + 2l_0}{l_0^2} \right).$$

Пуанкаре теңсіздігін пайдаланып келесі бағалауды да алуға болады

$$\nu \|\vec{v}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \geq \frac{\nu}{C(\Omega)+1+\nu} \left(\|\vec{v}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + (\nu+1) \|\vec{v}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \right) = \mu \Phi(t), \quad (28)$$

мұндағы

$$\mu := \frac{\nu}{C(\Omega)+1+\nu}. \quad (29)$$

Енді (28) бағалауды (27) теңсіздікке ескерсек әрі алынған нәтижені $e^{\mu t}$ – ға көбейтсек, онда

$$e^{\mu t} \Phi'(t) + \mu e^{\mu t} \Phi(t) \leq A \left(|h(t)|^2 + |h'(t)|^2 \right) e^{\mu t} \quad (30)$$

Соңғы өрнекті s айнымалысы бойынша 0 – ден t – ға дейін интегралдағанда, келесі өрнек қорытылады

$$\Phi(t) \leq e^{-\mu t} \left(A \int_0^t \left(|h(s)|^2 + |h'(s)|^2 \right) e^{\mu s} ds + \Phi(0) \right). \quad (31)$$

Онда (31) теңсіздікте t шексіздікке ұмтылғанда ($t \rightarrow \infty$) $\Phi(t)$ функциясы 0 – ге ұмтылады ($\Phi(t) \rightarrow 0$). Олай болса, алынған нәтижені теорема ретінде тұжырымдайық.

2-теорема. Айталық, (7), (8) шарттар орындалсын және $K(t)=0$, $h(t)$ мен $h'(t)$ функциялары монотонды кемімелі болсын. Сонымен қатар, келесі шарт орындалсын

$$A \int_0^t \left(|h(s)|^2 + |h'(s)|^2 \right) e^{\mu s} ds + \Phi(0) < +\infty$$

мұндағы μ саны (29) өрнегімен анықталады. Онда ақырлы C оң саны табылып, $\Phi(t)$ функциясы келесі қасиетке ие болады

$$\Phi(t) \leq C e^{-\mu t},$$

яғни $\Phi(t)$ функциясы t шексіздікке ұмтылғанда ($t \rightarrow \infty$) экспоненциалды кемиді.

4 Зерттеу нәтижелері

Бұл мақаладағы зерттеу теориялық сипат алатынын ескерте отырып, авторлар ұжымы ізденудің нәтижесі ретінде екі теорема алды. Оның алғашқы теоремада сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін коэффициентті кері есептің әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі дәлелденді, екінші теоремада сызықты Кельвин-Фойгт жүйесі үшін коэффициентті кері есептің әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі көрсетілді. Алынған нәтижелер Қазақ ұлттық университетінің механика математика факультеті «дифференциалдық теңдеулер мен басқару теориясы» лабораториясының жас ғалымдар мен ғылыми қызметкерлері арасында талқыланып, апробациядан өткізілді.

5 Дискуссия

Бұл жұмыстағы негізгі зерттеу нысаны сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін коэффициентті кері есеп болып табылады. Ал кері есептер теориясындағы

негізгі қиындық, олардың табиғатынан қисынды қойылмауы болып табылады. Оларды шешімділікке зерттеу айтарлық қиындық туындарары сөзсіз. Демек, шешімділік зерттеу мүмкін болмаған жағдайда, ең болмағанда олардың шешімдерінің асимптотикалық қасиеттері туралы ақпарат алу құнды нәтиже екенін аңғаруға болады. Сондықтан мақалада алынған нәтижелер сандық шешімдерді ізденуде, практикада көп көмегін тигізеді.

6 Қорытынды

Бұл жұмыста сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтың қозғалысын сипаттайтын жады мүшесі бар (интегро-дифференциалдық) сызықты Кельвин-Фойгт жүйесі үшін уақыттан тәуелді оң жағының коэффициентін анықтау кері есебінің әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі дәлелденді. Дәлелдеу барысында алгебралық теңсіздіктер мен функционалдық анализдің енгізу теоремалары қолданылды. Шешімнің экспоненциалды кемуі энергетикалық әдіс арқылы алынды, ал алынған нәтиже жаңа болып табылады.

7 Алғыс

Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитетінің №AP19676624 гранты қаржыландырды.

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

- [1] Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S. *Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Boston: Birkhäuser. 2002. – 343 p.
- [2] Павловский В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Докл. АН СССР. — 1971, — Т. 200(4), — С. 809–812.
- [3] Осолоков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. — 1989, — Т. 179, — С.137–182.
- [4] Zvyagin V.G., Turbin M.V. (2010) The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids // J. Math. Sci.—Vol.168, — P.157–308. <https://doi.org/10.1007/s10958-010-9981-2>
- [5] Khompysh Kh., Kabidoldanova A., Shakir A. (2023) Inverse problems for nonlinear Navier-Stokes-Voigt system with memory // Chaos, Solitons and Fractals. —Vol.177, № 12. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.114182>
- [6] Shakir A. (2023) Global solvability of inverse problem for linear Kelvin-Voigt equations with memory // J. Math., Mech. and Comp. Sci. —Vol.118(2), —P.30–41. <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2023.v118.i2.04>
- [7] Antontsev S.N., Khompysh Kh. (2021) An inverse problem for generalized Kelvin-Voigt equation with p-Laplacian and damping term // Inverse Problems. — Vol.37. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/abc1362>
- [8] Khompysh Kh., Nugymanova N. (2022) Inverse problem for integro-differential Kelvin-Voigt equation // Journal of inverse and ill-posed problems., — Vol. 31(6), — P.835–847. <https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0157>
- [9] Yushkov E.V. (2012) On the blow-up of a solution of a non-local system of equations of hydrodynamic type // Izv. Math. —Vol.76(1), —P.201–224. [10.1070/IM2012v076n01ABEH002580](https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002580)
- [10] Messaoudi S.A. (2006) Blow-up of positive-initial-energy solutions of a nonlinear viscoelastic hyperbolic equation // J. Math. Anal. Appl. — Vol. 320(2), — P. 902–915. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.07.022>
- [11] Antontsev S.N., Aitzhanov S.E. (2019) Inverse problem for an equation with a nonstandard growth condition // J. Appl. Mech. Tech. Phys. —Vol. 60 (2). — P. 265–277. <https://doi.org/10.1134/S0021894419020081>
- [12] Gur S., Yaman M., Yilmaz Y. (2016) Finite time blow up of solutions to an inverse problem for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearity // J. Nonl. Sci. Appl. — Vol. 9, — P. 1902–1910. <http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.04.44>

References

- [1] Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S. (2002) *Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Boston: Birkhäuser. – 343 p.
- [2] Pavlovsky V.A. (1971) K voprosu o teoreticheskom opisanii slavykh vodnykh rastvorov polimerov [On the theoretical description of weak aqueous solutions of polymers], Dokl. Akad. Nauk SSSR. 200(4), 809–812. (In Russian)
- [3] Oskolkov A.P. (1989) Nachalno-kraevaya zadacha dlya urabneniy dvizheniya zhidkosti Kelvina-Foigta I zhidkosti Oldroida [Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voigt fluids and Oldroyd fluids], Proc. Steklov Inst. Math. 179, 137–182. (In Russian)
- [4] Zvyagin V.G., Turbin M.V. (2010) The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt fluids // J. Math. Sci. 168, 157–308. <https://doi.org/10.1007/s10958-010-9981-2>
- [5] Khompysh Kh., Kابدoldanova A., Shakir A. (2023) Inverse problems for nonlinear Navier-Stokes-Voigt system with memory // Chaos, Solitons and Fractals. 177, № 12. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.114182>
- [6] Shakir A. (2023) Global solvability of inverse problem for linear Kelvin-Voigt equations with memory // J. Math., Mech. and Comp. Sci. 118(2), 30–41. <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2023.v118.i2.04>
- [7] Antontsev S.N., Khompysh Kh. (2021) An inverse problem for generalized Kelvin-Voigt equation with p-Laplacian and damping term//Inverse Problems. 37. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/ac1362>
- [8] Khompysh Kh., Nugymanova N. (2022) Inverse problem for integro-differential Kelvin-Voigt equation // Journal of inverse and ill-posed problems., 31(6), 835–847. <https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0157>
- [9] Yushkov E.V. (2012) On the blow-up of a solution of a non-local system of equations of hydrodynamic type // Izv. Math. 76(1), 201–224. [10.1070/IM2012v076n01ABEH002580](https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002580)
- [10] Messaoudi S.A. (2006) Blow-up of positive-initial-energy solutions of a nonlinear viscoelastic hyperbolic equation // J. Math. Anal. Appl. 320(2), 902–915. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.07.022>
- [11] Antontsev S.N., Aitzhanov S.E. (2019) Inverse problem for an equation with a nonstandard growth condition // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 60 (2), 265-277. <https://doi.org/10.1134/S0021894419020081>
- [12] Gur S., Yaman M., Yilmaz Y. (2016) Finite time blow up of solutions to an inverse problem for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearity // J. Nonl. Sci. Appl. 9, 1902-1910. <http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.04.44>