**МРНТИ 27.39.29**

**10.51889/2959-5894.2024.88.4.006**

**Д.К. Чигамбаева**

Astana IT University, г. Астана, Казахстан
*e-mail: chigambayeva.d@gmail.com*

# ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ТИПА МАРЦИНКЕВИЧА ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ МОРРИ

*Аннотация*

Данная работа посвящена доказательству интерполяционной теоремы для локальных пространств Морри. Целью данной работы является изучение интерполяционных свойств локальных пространств Морри. Анализируются характерные особенности данных пространств. На основе проведенных исследований доказана интерполяционная теорема типа Марцинкевича для локальных пространств Морри на однородных группах. Этот результат важен как для теории функций и функционального анализа, так и для приложений. Выявлена и обоснована интерполяционная способность локальных пространств Морри в случае линейных операторов. Для получения результата использовались методы интерполяции для функциональных пространств, свойства вложения и методы функционального анализа. В качестве метода интерполяции использовался вещественный метод Петре, а в качестве основных неравенств функционального анализа – неравенства Гёльдера, Минковского, Харди. На основе проведенного исследования следует отметить, что в случае линейных операторов шкала данных пространств является интерполяционной в отличие от классических пространств Морри.

**Ключевые слова:** пространства Морри, локальные пространства Морри, квази-аддитивный оператор, линейный оператор, интерполяционная теорема, интерполяционная теорема типа Марцинкевича.

D.K. Chigambayeva
Astana IT University, Astana, Kazakhstan

## MARCINKIEWICZ-TYPE INTERPOLATION THEOREM FOR LOCAL MORREY SPACES

*Abstract*

This paper is devoted to the proof of the interpolation theorem for local Morrey spaces. The purpose of this work is to study the interpolation properties of local Morrey spaces. The characteristic features of these spaces are analyzed. Based on the research carried out, the author proved the Marcinkiewicz-type interpolation theorem for local Morrey spaces on the homogeneous groups. This result is important both for function theory and functional analysis, and for applications. The interpolation ability of local Morrey spaces in the case of linear operators is revealed and justified. To obtain the result, interpolation methods for function spaces, embedding properties, and methods of functional analysis were used. The real Peetre method was used as an interpolation method and Hölder's, Minkowski's, Hardy's inequalities as the basic inequalities of function analysis were used. On the basis of the research, it should be noted that in the case of linear operators the scale of these spaces is interpolational in contrast to the classical Morrey spaces.

**Keywords:** Morrey spaces, local Morrey spaces, quasi-additive operator, linear operator, interpolation theorem, Marcinkiewicz-type interpolation theorem.

Д.К. Чигамбаева
Astana IT University, Астана қ., Қазақстан

## ЛОКАЛДІ МОРРИ КЕҢІСТІКТЕР ҮШІН МАРЦИНКЕВИЧ ТИПТІ ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛЫҚ ТЕОРЕМА

*Аңдатпа*

Бұл жұмыс локалді Морри кеңістіктер үшін интерполяция теоремасын дәлелдеуге арналған. Бұл жұмыстың мақсаты локалді Морри кеңістіктердің интерполяциялық қасиеттерін зерттеу болып табылады. Бұл кеңістіктерге тән белгілер талданады. Жүргізілген зерттеулер негізінде локалді Морри

кеңістіктер үшін Марцинкевич типті біртекті топтарда интерполяциялық теорема дәлелдеген. Бұл нәтиже функция теориясы мен функционалдық талдау үшін де, қолданбалар үшін де маңызды. Сызықтық операторлар жағдайындағы локалді Морри кеңістіктердің интерполяциялық қабілеті ашылған және негізделген. Нәтижені алу үшін функциялық кеңістіктер үшін интерполяция әдістері, кірістіру қасиеттері және функционалдық талдау әдістері қолданылды. Интерполяция әдісі ретінде шынайы Петре әдісі, ал функционалдық талдаудың негізгі теңсіздіктері ретінде Гёлдер, Минковский және Харди теңсіздіктері қолданылды. Зерттеуге сүйене отырып, сызықтық операторлар жағдайында классикалық Морри кеңістігінен айырмашылығы бұл кеңістіктердің масштабы интерполяция болып табылатынын атап өткен жөн.

**Түйін сөздер:** Морри кеңістіктер, локалді Морри кеңістіктер, квази-аддитивті оператор, сызықты оператор, интерполяциялық теорема, Марцинкевич типті интерполяциялық теорема.

**Основные положения**

В данной статье представлен интерполяционный метод, рассмотренных в локальных пространствах типа Морри на однородных группах. Исследование акцентирует внимание на интерполяционной теореме типа Марцинкевича специфично рассмотренной в случае локальных пространств Морри с применением свойств однородных групп. Результаты подтверждают необходимость дальнейшего анализа интерполяционных свойств пространств типа Морри с их применением на случай ограниченности различных интегральных операторов в них. Это даст перспективы для разработки теории пространств типа Морри для однородных групп.

**Введение**

Пусть $0 < p \leq \infty$ и $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$. Пространства Морри $M_p^\lambda$ определяются как пространства всех функций $f \epsilon\, L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$, таких что

$$||f||_{M_p^\lambda} \equiv ||f||_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sup_{t>0} t^{-\lambda}||f||_{L_p(B_t(x))} < \infty,$$

где $B_t(x)$ – открытый шар радиуса $t > 0$ с центром в точке $x\epsilon\mathbb{R}^n$ (см. [1]). Если $\lambda = 0$, то $M_p^0(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$, если $\lambda = \frac{n}{p}$, то $M_p^{n/p}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Если $\lambda < 0$ или $\lambda > \frac{n}{p}$, то $M_p^\lambda = \Theta$, где $\Theta$ – множество всех функций, эквивалентных нулю на $\mathbb{R}^n$.

Пространства Морри и их различные обобщения интенсивно изучаются с точки зрения современной теории интерполяции и играют важную роль в приложениях к вариационному исчислению и теории уравнений в частных производных [2]. Классические пространства Морри были введены в связи с изучением уравнений с частными производными. Кроме того, пространства Морри оказались весьма удобными и естественными для изучения сложных и важных уравнений математической физики. Наконец, отметим, что теория пространств Морри в последнее время получила свое естественное и мощное развитие в рамках теории интерполяции функциональных пространств.

Интерполяционные результаты для пространств Морри были получены Стампакиа [3], Кампанато и Мерфи [4] в 1964 г. Было доказано в работе [4], что для $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$ и

$$T: L_{q_0} \to M_{p_0}^{\lambda_0} \text{ с нормой } M_0 \text{ и}$$

$$T: L_{q_1} \to M_{p_1}^{\lambda_1} \text{ с нормой } M_1, \text{ тогда}$$

$$T: L_q \to M_p^\lambda$$

с нормой $M_0 \leq cM_0{}^{1-\theta}M_1{}^{\theta}$ при $0 < \theta < 1$ и $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \lambda = (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_0$.

Далее Петре [5], Бласко, Руиз и Вега [6,7] в 1995 г. в работе [7] рассмотрели интерполяционную проблему для пространств Морри вещественным интерполяционным методом и доказали , что

$$(M_p^{\lambda_0}, M_p^{\lambda_1})_{\theta,\infty} \subset M_p^{\lambda},$$

где $1 \leq p < \infty, 0 < \lambda_0 < \frac{n}{p_0}, 0 < \lambda_1 < \frac{n}{p_1}, \lambda = (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_0, 0 < \theta < 1.$

В частности, Петре доказал, что

$$(M_p^{\lambda_0}, M_p^{\lambda_1})_{\theta,\infty} \neq M_p^{\lambda}.$$

Было проведено более подробное исследование проблемы интерполяции для пространств Морри. В частности, Лемарие-Рюссет [8] в 2013 г. доказал следующее вложение

$$(M_{p_0}^{\lambda_0}, M_{p_1}^{\lambda_1})_{\theta,\infty} \subset M_p^{\lambda},$$

где $1 \leq p_0, p_1 < \infty$ и $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ верно тогда и только тогда, когда $p_0 = p_1$.

Дальнейшие обобщения свойств интерполяции были получены в [9], а именно была доказана интерполяционная теорема типа Марцинкевича для обобщенных пространств Морри $M_{p,q,\Omega}^{\lambda}$ [10].

Рассмотрим понятие однородных групп. Группу Ли (на $\mathbb{R}^n$) $\mathbb{G}$ назовем однородной, если имеет место расширение $D_\lambda(x)$, такое что

$$D_\lambda(x) := (\lambda^{v_1}x_1, \dots, \lambda^{v_n}x_n), \qquad v_1, \dots, v_n > 0, \quad D_\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

которое является автоморфизмом группы $\mathbb{G}$ для каждого $\lambda > 0$. Более того, шар с центром в точке $x\epsilon\mathbb{G}$ и радиусом $t > 0$ определим как

$$B(x,t) := \{y\epsilon\mathbb{G}: |x^{-1}y| < t\}.$$

Заметим, что мера Хаара на $\mathbb{G}$ совпадает с мерой Лебега, а мера шара имеет следующую оценку

$$C^{-1}t^n \leq |B(x,t)| \leq Ct^n.$$

Однородные группы предоставляют собой локальные модели для многих вопросов субэллиптического анализа и субримановой геометрии, их важность широко признана, поскольку существенная роль они сыграли в выводе точных субэллиптических оценок для дифференциальных операторов на многообразиях. Для обсуждения понятия и свойств однородных групп можно найти в книге [11].

В данной работе мы доказываем интерполяционную теорему типа Марцинкевича для локальных пространств Морри $LM_p^{\lambda}(\mathbb{G})$ на однородных группах. Рассмотрим $LM_p^{\lambda}(\mathbb{G})$ с следующей конечной нормой для всех $x\epsilon\mathbb{G}$

$$||f||_{LM_p^{\lambda}(\mathbb{G})} = \sup_{t>0} t^{-\lambda}||f||_{L_p(B(x,t))}.$$

Заметим, что взаимосвязь локальных пространств Морри с пространствами Морри выражается следующим образом

$$||f||_{M_p^{\lambda}(\mathbb{G})} = \sup_{x\in\mathbb{G}}||f(x+\cdot)||_{LM_p^{\lambda}(\mathbb{G})}.$$

**Методология исследования**

В данной работе для доказательства утверждений используются известные функциональные неравенства, а именно неравенства Гёльдера, Минковского, Харди.

Если $0 < p, p_0, p_1 \leq \infty$ и $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1}$, тогда верно неравенство Гёльдера

$$||fg||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq ||f||_{L_{p_0}(\mathbb{R}^n)} ||g||_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)} \tag{1}$$

для всех функций $f \in L_{p_0}(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L_{p_1}(\mathbb{R}^n)$.

Еси $0 < p \leq \infty$, тогда верно неравенство Минковского

$$||f + g||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{(\frac{1}{p}-1)_+} (||f||_{L_p(\mathbb{R}^n)} + ||g||_{L_p(\mathbb{R}^n)}) \tag{2}$$

для всех функций $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ и $a_+ = \max\{0, a\}$ для всех $a \in \mathbb{R}$.

Если $\mu > 0, -\infty < \nu < \infty$ и $0 < \sigma \leq \tau \leq \infty$, тогда верны следующие аналоги неравенств Харди

$$(\int_0^\infty (y^{-\mu} (\int_0^y (r^{-\nu} |g(r)|)^\sigma \frac{dr}{r})^{\frac{1}{\sigma}})^\tau \frac{dy}{y})^{\frac{1}{\tau}} \leq (\mu\sigma)^{-\frac{1}{\sigma}} (\int_0^\infty (y^{-\mu-\nu} |g(y)|)^\tau \frac{dy}{y})^{\frac{1}{\tau}} \tag{3}$$

и

$$(\int_0^\infty (y^{\mu} (\int_y^\infty (r^{-\nu} |g(r)|)^\sigma \frac{dr}{r})^{\frac{1}{\sigma}})^\tau \frac{dy}{y})^{\frac{1}{\tau}} \leq (\mu\sigma)^{-\frac{1}{\sigma}} (\int_0^\infty (y^{\mu-\nu} |g(y)|)^\tau \frac{dy}{y})^{\frac{1}{\tau}}. \tag{4}$$

Приведем свойства вложения локальных пространств Морри.

*Лемма 1.1 Пусть* $0 < p_0 < p_1 < \infty$, *тогда*

$$LM_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{G}) \hookrightarrow LM_{p_0}^{\lambda_0}(\mathbb{G}),$$

*где* $\lambda_1 = \lambda_0 + \frac{n(p_0 - p_1)}{p_0 p_1}$;

*Доказательство.* Пусть $f \in LM_{p_1,q}^{\lambda_1}(\mathbb{G})$. Применяя неравенство Гёльдера (1) и, заметив что $|B(x,t)| \leq Ct^n$, получим следующие неравенства

$$||f||_{LM_{p_0}^{\lambda_0}(\mathbb{G})} = \sup_{t>0} t^{-\lambda_0} ||f||_{L_{p_0}(B(\mathrm{x},t))} \leq$$

$$\leq \sup_{t>0} t^{-\lambda_0} |B(x,t)|^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} ||f||_{L_{p_1}(B(\mathrm{x},t))} \cong$$

$$\cong \sup_{t>0} t^{-\left(\lambda_0 - \frac{n(p_1 - p_0)}{p_0 p_1}\right)} ||f||_{L_{p_1}(B(\mathrm{x},t))} = ||f||_{LM_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{G})},$$

что означает вложение $LM_{p_1,q}^{\lambda_1}(\mathbb{G}) \hookrightarrow LM_{p_0,q}^{\lambda_0}(\mathbb{G})$, что и требовалось доказать.

Для доказательства основного вывода используются методы теории функций и функционального анализа, методы вещественной интерполяции [12,13].

**Результат исследования**

*Теорема 1.2*

*Пусть* $0 \leq \alpha_0, \alpha_1 < \infty, 0 \leq \beta_0, \beta_1 < \infty$, $\alpha_0 \neq \alpha_1$, $\beta_0 \neq \beta_1, 0 < p, q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ *и*

$$\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1, \ \beta = (1-\theta)\beta_0 + \theta\beta_1.$$

*Пусть $T$ – квазиаддитивный оператор на $\bigcup_{x\epsilon\mathbb{G}}\left(LM_p^{\alpha_0}(\mathbb{G})+LM_p^{\alpha_1}(\mathbb{G})\right)$, такой что для некоторых $M_0, M_1>0$ верны следующие неравенства*

$$||Tf||_{LM_q^{\beta_i}(\mathbb{G})}\leq M_i||f||_{LM_p^{\alpha_i}(\mathbb{G})} \tag{5}$$

*для всех* $x\epsilon\mathbb{G},\ f\in LM_p^{\alpha_i}(\mathbb{G}),\ i=0,1,$ *тогда*

$$||Tf||_{LM_q^{\beta}(\mathbb{G})}\leq cAM_0^{1-\theta}M_1^{\theta}||f||_{LM_p^{\alpha}(\mathbb{G})}$$

*для всех* $f\in LM_p^{\alpha}(\mathbb{G})$ *и* $c>0$.

**Дискуссия**

*Доказательство.*

1. Пусть $f\in LM_p^{\alpha}(\mathbb{G})$. Для $x\epsilon\mathbb{G},\ s>0$ определим фунции

$$f_{0,s}=\begin{cases} f(y), \text{если } |x^{-1}y|\leq s\\ 0, \text{в противном случае}\end{cases}$$

и

$$f_{1,s}=\begin{cases} f(y), \text{если } |x^{-1}y|>s\\ 0, \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда $f=f_{0,s}+f_{1,s}$ и по неравенству (2) имеем

$$||Tf||_{L_q(B(\mathrm{x},t))}=||T\left(f_{0,s}+f_{1,s}\right)||_{L_q(B(\mathrm{x},t))}\leq A||\ |Tf_{0,s}|+|Tf_{1,s}|\ ||_{L_q(B(x,t))}\leq$$

$$\leq 2^{(\frac{1}{q}-1)_+}A(||Tf_{0,s}||_{L_q(B(x,t))}+||Tf_{1,s}||_{L_q(B(x,t))}),$$

где $\mathrm{a}_+=\max\{0,\mathrm{a}\}$.

Из неравенства (5) получим

$$||Tf_{0,s}||_{L_q(B(x,t))}=t^{\beta_0}t^{-\beta_0}||Tf_{0,s}||_{L_q(B(x,t))}\leq$$

$$\leq t^{\beta_0}\sup_{r>0}r^{-\beta_0}||Tf_{0,s}||_{L_q(B(x,r))}=t^{\beta_0}||Tf_{0,s}||_{LM_q^{\beta_0}(\mathbb{G})}\leq M_0t^{\beta_0}||f_{0,s}||_{LM_p^{\alpha_0}(\mathbb{G})}=$$

$$=M_0t^{\beta_0}\left(\sup_{0\leq r\leq s}r^{-\alpha_0}\,||f_{0,s}||_{L_p(B(x,r))}+\sup_{r>s}r^{-\alpha_0}\,||f_{0,s}||_{L_p(B(x,r))}\right).$$

Если $0<r\leq s$ и $|x^{-1}y|\leq r$, тогда $|x^{-1}y|\leq s$ и $f_{0,s}(y)=f(y)$, следовательно $||f_{0,s}||_{L_p(B(x,r))}==||f||_{L_p(B(x,r))}$. Если $r>s$ и $y\epsilon\mathbb{G}\backslash B(x,r)$, тогда $f_{0,s}(y)=0$, следовательно $||f_{0,s}||_{L_p(B(x,r))}=||f||_{L_p(B(x,s))}$. Таким образом,

$$\sup_{0\leq r\leq s}r^{-\alpha_0}\,||f_{0,s}||_{L_p(B(x,r))}=\sup_{0\leq r\leq s}r^{-\alpha_0}\,||f||_{L_p(B(x,r))}$$

и

$$\sup_{r>s}r^{-\alpha_0}\,||f_{0,s}||_{L_p(B(x,r))}=||f||_{L_p(B(x,s))}\sup_{r>s}r^{-\alpha_0}=$$

$$=||f||_{L_p(B(x,s))}s^{-\alpha_0}=||f||_{L_p(B(x,s))}s^{-\alpha_0}s^{\alpha_1}\sup_{r>s}r^{-\alpha_1}=$$

$$=s^{\alpha_1-\alpha_0}\sup_{r>s}r^{-\alpha_1}||f||_{L_p(B(x,s))}.$$

Следовательно,

$$||Tf_{0,s}||_{L_q(B(x,t))} \leq$$

$$\leq M_0 t^{\beta_0} \left[ \sup_{0 \leq r \leq s} r^{-\alpha_0} ||f||_{L_p(B(x,r))} + s^{\alpha_1 - \alpha_0} \sup_{r>s} r^{-\alpha_1} ||f||_{L_p(B(x,s))} \right].$$

Аналогично, из неравенства (5), поскольку $f_{1,s}(y) = 0$, если $|x^{-1}y| \leq r$ и $|f_{1,s}(y)| \leq |f(y)|$, если $y \in B(x,r) \cap (\mathbb{G} \backslash B(x,s))$, получим, что

$$||Tf_{1,s}||_{L_q(B(x,t))} = t^{\beta_1} t^{-\beta_1} ||Tf_{1,s}||_{L_q(B(x,t))} \leq$$

$$\leq M_1 t^{\beta_1} \left( \sup_{0 \leq r \leq s} r^{-\alpha_1} ||f_{1,s}||_{L_p(B(x,r))} + \sup_{r>s} r^{-\alpha_1} ||f_{1,s}||_{L_p(B(x,r))} \right) \leq$$

$$M_1 t^{\beta_1} \sup_{r>s} r^{-\alpha_1} ||f||_{L_p(B(x,r) \cap (\mathbb{G} \backslash B(x,s)))} \leq M_1 t^{\beta_1} \sup_{r>s} r^{-\alpha_1} ||f||_{L_p(B(x,r))}.$$

Так, для всех $t > 0$ и $s > 0$ имеем

$$||Tf||_{L_q(B(x,t))} \leq c_1 A (M_0 t^{\beta_0} [\sup_{0 \leq r \leq s} r^{-\alpha_0} ||f||_{L_p(B(x,r))} + s^{\alpha_1 - \alpha_0} \sup_{r>s} r^{-\alpha_1} ||f||_{L_p(B(x,r))}]$$
$$+ M_1 t^{\beta_1} \sup_{r>s} r^{-\alpha_1} ||f||_{L_p(B(x,r))},$$

где $c_1 > 0$ зависит от параметра $q$.

2. Предположим, что $\alpha_0 < \alpha_1, \beta_0 < \beta_1$ и положим $s = ct^{\gamma}$, где $\gamma = \frac{\beta_1 - \beta_0}{\alpha_1 - \alpha_0}$, и $c > 0$ будет выбрана позже. Тогда

$$||Tf||_{LM_q^{\beta}(\mathbb{G})} = \sup_{t>0} t^{-\beta} ||Tf||_{L_q(B(x,t))} \leq$$

$$\leq \mathrm{c} A (M_0 I_1 + M_0 I_2 + M_1 I_3),$$

где

$$I_1 = \sup_{t>0} t^{\beta_0 - \beta} \sup_{0 \leq r \leq ct^{\gamma}} r^{-\alpha_0} ||f||_{L_p(B(x,r))},$$

$$I_2 = (ct^{\gamma})^{\alpha_1 - \alpha_0} \sup_{t>0} t^{\beta_0 - \beta} \sup_{r > ct^{\gamma}} r^{-\alpha_1} ||f||_{L_p(B(x,r))}$$

и

$$I_3 = \sup_{t>0} t^{\beta_1 - \beta} \sup_{r > ct^{\gamma}} r^{-\alpha_1} ||f||_{L_p(B(x,r))}.$$

Делая замену переменной $ct^{\gamma} = y$, получим $t = c^{-\frac{1}{\gamma}} y^{\frac{1}{\gamma}}$ и поскольку $-\frac{\beta_0 - \beta}{\gamma} = -\frac{\beta_0 - (1-\theta)\beta_0 - \theta\beta_1}{\gamma} = \theta(\alpha_1 - \alpha_0)$, и $-\frac{\beta_1 - \beta}{\gamma} = -\frac{\beta_1 - (1-\theta)\beta_0 - \theta\beta_1}{\gamma} = -(1-\theta)(\alpha_1 - \alpha_0)$, имеем

$$I_1 = c^{\theta(\alpha_1 - \alpha_0)} J_1, \ I_2 = c^{\theta(\alpha_1 - \alpha_0)} J_2, \ I_3 = c^{-(1-\theta)(\alpha_1 - \alpha_0)} J_3,$$

где

$$J_1 = \sup_{y>0} y^{-\theta(\alpha_1 - \alpha_0)} \sup_{0 \leq r \leq y} r^{-\alpha_0} ||f||_{L_p(B(x,r))},$$

$$J_2 = \sup_{y>0} y^{(1-\theta)(\alpha_1 - \alpha_0)} \sup_{r>y} r^{-\alpha_1} ||f||_{L_p(B(x,r))}$$

и

$$J_3 = \sup_{y>0} y^{(1-\theta)(\alpha_1 - \alpha_0)} \sup_{r>y} r^{-\alpha_1} ||f||_{L_p(B(x,r))}.$$

3. Для интегральных оценок $J_1, J_2, J_3$ применим аналоги неравенств Харди (3) и (4)

$$J_1 \leq \sup_{y>0} y^{-\alpha} ||f||_{L_p(B(x,y))} = ||f||_{LM_p^{\alpha}(\mathbb{G})},$$

$$J_2 \leq ||f||_{LM_p^{\alpha}(\mathbb{G})}$$

и

$$J_3 \leq ||f||_{LM_p^{\alpha}(\mathbb{G})}.$$

Следовательно,

$$||Tf||_{LM_q^{\beta}(\mathbb{G})} \leq cA\left(M_0 c^{\theta(\alpha_1-\alpha_0)} + M_1 c^{-(1-\theta)(\alpha_1-\alpha_0)}\right)||f||_{LM_p^{\alpha}(\mathbb{G})},$$

где $c > 0$ зависит только от $p$.

4. Положим теперь $c = \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1-\alpha_0}}$, тогда

$$||Tf||_{LM_q^{\beta}(\mathbb{G})} \leq 2cAM_0^{1-\theta} M_1^{\theta} ||f||_{LM_p^{\alpha}(\mathbb{G})}.$$

5. Если $\alpha_1 < \alpha_0, \beta_0 < \beta_1$ или $\alpha_0 < \alpha_1, \beta_1 < \beta_0$ или $\alpha_1 < \alpha_0, \beta_1 < \beta_0$, тогда рассуждения аналогичны шагам 2–4, меняя только выбор параметров $\gamma$ и $c$.

В первом случае $\gamma = \frac{\beta_1-\beta_0}{\alpha_0-\alpha_1}$, $c = \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_0-\alpha_1}}$, во втором случае $\gamma = \frac{\beta_0-\beta_1}{\alpha_1-\alpha_0}$, $c = \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_0-\alpha_1}}$, в третьем случае $\gamma = \frac{\beta_0-\beta_1}{\alpha_0-\alpha_1}$, $c = \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_0-\alpha_1}}$.

Теорема 1 доказана.

**Заключение**

Методом вещественной интерполяции доказана интерполяционная теорема типа Марцинкевича для локальных пространств Морри.

*Замечание*. Если $T$ – линейный оператор, то утверждение Теоремы 1 следует, используя стандартные аргументы теории интерполяции из равенства

$$(LM_p^{\lambda_0}(\mathbb{G}), LM_p^{\lambda_1}(\mathbb{G}))_{\theta,\tau} = LM_p^{\lambda}(\mathbb{G}),$$

где $0 < p, \tau \leq \infty, 0 < \lambda_0, \lambda_1 < \infty, \lambda_0 \neq \lambda_1, 0 < \theta < 1,\ \lambda = (1-\theta)\lambda_0 + \theta\lambda_1$.

**Благодарность**

Автор выражает благодарность Центру международных программ Болашак в прохождении научной стажировки за финансовую поддержку и Центру анализа и дифференциальных уравнений департамента математики Гентского университета. Также автор выражает благодарность профессору М. Ружанскому за ценные советы.

*Список использованных источников*

*[1] Morrey C.B. On the solution of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1938. – Vol. 43. – pp. 126–166. DOI: 10.1090/S0002-9947-1938-1501936-8*

*[2] Adams D.R. Morrey spaces // Birkhäuser. – 2015. – 124 p. https://dokumen.pub/morrey-spaces-1st-ed-3319266799-978-3-319-26679-4-978-3-319-26681-7-3319266810.html*

*[3] Stampacchia G. $L_{p,\lambda}$-spaces and interpolation // Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – Vol. 17. – pp. 293–306. DOI:10.1002/cpa.3160170303*

*[4] Campanato A., Murthy M.K.V. Una generalizzazione del teorema di Riesz-Thorin // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. – 1965. – Vol. 19. – pp. 87–100.* https://eudml.org/doc/83343

*[5] Peetre J. A new approach in interpolation spaces // Studia Math. – 1970. – Vol. 34. – pp. 23–42.* https://eudml.org/doc/217430

*[6] Ruiz A., Vega L. Corrigenda to "Unique continuation for Schrödinger operators" and a remark on interpolation on Morrey spaces // Publ. Mat., Barc. – 1995. – Vol. 39. – pp. 405–411. DOI:*10.5565/PUBLMAT_39295_15

*[7] Blasco O., Ruiz A., Vega L. Non interpolation in Morrey-Campanato and block spaces // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. – 1999. – Vol. 28(1). – pp. 31–40.* http://www.numdam.org/item/?id=ASNSP_1999_4_28_1_31_0

*[8] Lemarié-Rieusset P.G. The role of Morrey spaces in the study of Navier-Stokes and Euler equations // Eurasian Mathematical Journal. – 2012. – Vol. 3(3). – pp. 62–93.* https://www.semanticscholar.org/paper/The-role-of-Morrey-spaces-in-the-study-of-Navier-%E2%80%93-Rieusset/f922fbdcc201036bd3e714333c59bdc68bdad1b7

*[9] Burenkov V.I., Nursultanov E.D., Chigambayeva D.K. Marcinkiewicz-type interpolation theorem and estimates for convolutions for Morrey-type spaces // Eurasian mathematical journal. – 2018. – Vol. 9(2). – pp. 82–88.* https://emj.enu.kz/index.php/main/article/view/118

*[10] Burenkov V.I., Nursultanov E.D., Chigambayeva D.K. Marcinkiewicz-type interpolation theorem for Morrey-type spaces and its corollaries // Complex variables and elliptic equation. – 2020. – Vol. 65(1). – pp. 87–108. DOI:*10.1080/17476933.2019.1664488

*[11] Ruzhansky M., Suragan D. Hardy inequalities on homogeneous groups // Progress in Mathematics. – Vol. 327. – 571 p. DOI:10.1007/978-3-030-02895-4*

*[12] Bergh J., Löfström J. Interolation spaces. An introduction // Springer. – 1976.* https://books.google.kz/books/about/Interpolation_Spaces.html?id=QlrsCAAAQBAJ&redir_esc=y

*[13] Peetre J. On the theory of $L_p$ spaces // J. Funct. Anal. – 1969. – Vol. 4. – pp. 71–87. DOI:10.1016/0022-1236(69)90022-6*