

МРНТИ 30.15.35  
УДК 621.01

Е.С. Темирбеков<sup>1</sup>, Г.А. Тукешова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

## СТЕРЖНЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ИНЕРЦИИ

### Аннотация

В механических расчетах рычажных механизмов используются модели конечных элементов где инерция движения стержневых звеньев учитывается обычно приведением к центру масс в виде главного вектора сил и главного момента пар сил, а центр масс входит в конечно-элементную модель конструкции механизма в качестве узла. Учет распределенной инерции движения позволяет создавать более точные модели конечных элементов в структурах пространственной связи. Алгебраически суммируя все распределенные инерционные нагрузки, действующие в обоих направлениях, перпендикулярно и вдоль оси звена постоянного сечения, мы можем показать, что их интенсивность изменяется линейно по всей длине звена. Используя этот подход вместе с теоремой Шаля для точки свободного твердого тела в проекциях на движущиеся оси в методе конечных элементов для прямолинейного однородного стержня, мы приходим к более точной модели конечных элементов, учитывающей аналитически распределенную инерцию движения.

Кроме того, мы получили подвекторы в известном матричном соотношении, который связывает обобщенные силы реакции, действующие в точках контакта стержневого элемента, с узловыми обобщенно-упругими движениями. Эти подвекторы включают вес и инерцию распределенного пространственного движения звена.

**Ключевые слова:** распределенная, инерция, метод конечных элементов, модель, сила, механизм, звено.

### Аңдатпа

Е.С. Темирбеков<sup>1</sup>, Г.А. Тукешова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

## ИНТИРЕКТІ СЫРЫҚТЫ МЕХАНИЗМДЕР ҚҰРЫЛЫМЫН ТАРАЛҒАН ИНЕРЦИЯНЫ ЕСКЕРЕ ОТЫРЫП МОДЕЛДЕУ

Интіректі механизмдердің механикалық есептерінде сырықты буындардың қозғалыс инерциясы массалар центріне бас күштер векторы және бас момент векторы ретінде, ал массалар центрі түйін түрінде механизм құрылымының шектік элемент моделіне кірумен ескерілетін шектік элемент моделі ретінде кеңінен қолданылады. Таралған қозғалыс инерциясын ескеру құрылымдық кеңістіктік байланыстарда шектік элементтердің нақты моделін құруға мүмкіндік береді. Тұрақты қимадағы перпендикуляр және барлық буын бойында әсер ететін таралған инерциялық жүктемелерді алгебралық қосқанда оның таралу қарқындылығы барлық буынға таралатынын көрсете аламыз. Түзу сызықты біртекті сырық үшін шеттік элементтер әдісінде қозғалатын өстердің проекцияларындағы еркін қатты дене нүктелері үшін Шаль теоремасымен қоса осы әдісті қолдана отырып таралған қозғалыс инерциясын аналитикалық ескеретін шектік элементтердің нақты моделіне келеміз. Сонымен қатар біз белгілі матрицалық қатынаста түйіндік жалпылаған серпімді қозғалысымен сырықтық элементтің байланыс нүктелерінде әсер ететін жалпыланған күш реакцияларын байланыстыратын векторшаларды алдық. Бұл векторшалар таралған кеңістіктік буын қозғалысының салмағы мен инерциясын ескереді.

**Түйін сөздер:** таралған, инерция, шектік элементтер әдісі, модель, күш, механизм, буын

### Abstract

## ROD MODELING OF STRUCTURES LEVERING MECHANISMS WITH DISTRIBUTED INERTIA

Temirbekov E.<sup>1</sup>, Tukeshova G.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

To reduce inertia of moving links into resultant force and moment vectors and to represent center of mass as node in finite element models are widely-used in mechanical calculations of linkage mechanisms. Considering distributed inertia of motion makes possible to create more precise finite element models in spatial linkage structures. By algebraically summing all the distributed inertial loads acting in both directions, perpendicular and along the axis of a constant cross section link, we can show that their intensity varies linearly along the length of link. Using this approach together with

Chasles theorem for a point of free rigid body in projections onto the moving axes in the finite element method for rectilinear homogeneous rod, we reach to a more precise finite element model considering analytically distributed inertia of motion. Besides, we obtained subvectors in matrix relation which binds the generalized reaction forces acting at the contact points of the rod element with nodal generalized elastic movements. These subvectors includes the weight and inertia of a distributed spatial movement of link.

**Keywords:** distributed, inertia, finite-element method, model, force, mechanism, link.

В механике машин инерция движения стержневых звеньев учитывается обычно приведением к центру масс в виде главного вектора сил и главного момента пар сил, а центр масс входит в конечно-элементную модель конструкции механизма в качестве узла [1]. Можно создать более точные конечно-элементные модели, аналитически учитывающие распределенную инерцию движения.

Рассмотрим плоскопараллельное движение  $k$ -го звена механизма относительно неподвижной системе координат  $OXY$  (рис.1) [2].

С началом в точке  $O$  введем также систему координат  $OX'Y'$ , положение которой относительно неподвижной системе координат  $OXY$ , определяется углом наклона стержня  $\theta_k$ . С началом  $P_k$  в шарнире, связывающие  $k$ -ое звено с  $(k-1)$ -ым звеном, введем две локальные системы координат. Систему координат  $P_k X_k Y_k$  перемещающиеся вместе со связанным шарниром, и с осями остающиеся соответственно параллельным к осям системы координат  $OXY$ , а также систему координат  $PX'_k Y'_k$  жестко связанным со звеном  $k$ .

Пусть  $k$ -ое звено механизма с постоянным поперечным сечением, движется плоскопараллельно относительно неподвижной системе координат  $OXY$ . И пусть, в некотором мгновенном положении механизма [3], известны  $\theta_k$ , компоненты ускорения  $\bar{w}_{kp}^x$  и  $\bar{w}_{kp}^y$  точки  $P_k$  звена  $k$  относительно неподвижной системе координат  $OXY$ ,  $\bar{\omega}_k$ ,  $\bar{\varepsilon}_k$  - соответственно угловые скорость и ускорение звена  $k$  с направлениями как показано на рисунке 1.

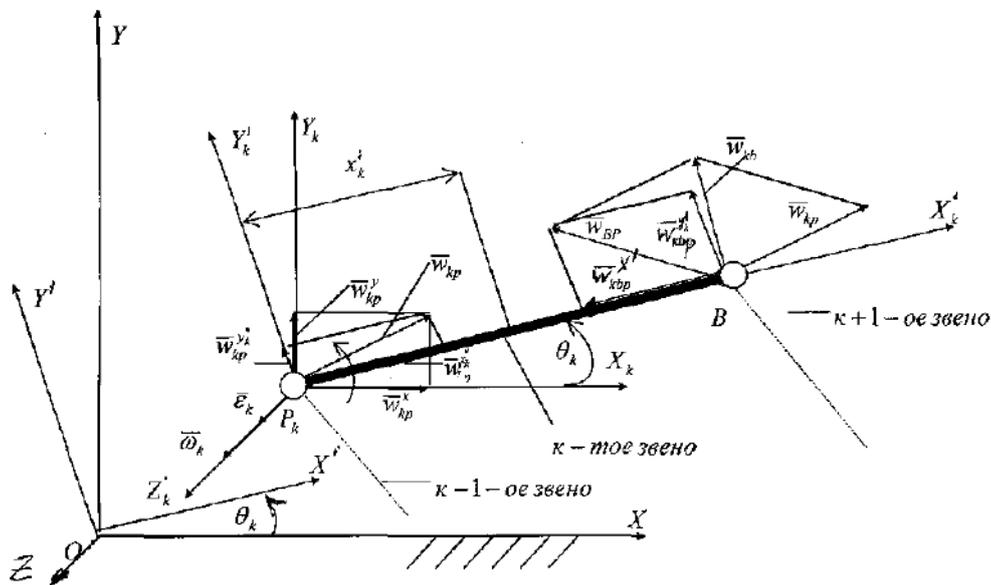


Рисунок 1. Плоскопараллельное движение звена

Определим компоненты вектора ускорений  $\bar{w}_{kp}$  относительно системы координат  $OX'Y'$  из следующих соотношений:

$$\begin{Bmatrix} w_{kp}^{x'} \\ w_{kp}^{y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{kp}^x \\ w_{kp}^y \end{Bmatrix}$$

Величины этих ускорения  $\bar{w}_{kbp}^{y'k}$  и  $\bar{w}_{kbp}^{x'k}$  равны:  $w_{kbp}^{y'k} = l_k \varepsilon_k$ ,  $w_{kbp}^{x'k} = l_k \omega_k^2$ . Компоненты ускорения точки  $B$  относительно системы координат  $OX'Y'$  в матричной форме имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} w_b^{x'k} \\ w_b^{y'k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{kp}^{x'k} \\ w_{kp}^{y'k} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w_{kbp}^{x'k} \\ w_{kbp}^{y'k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{kp}^x \\ w_{kp}^y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -l_k \omega_k^2 \\ l_k \varepsilon_k \end{Bmatrix}.$$

Если поперечные сечения вдоль звена постоянные, тогда действия собственного веса звена можно рассматривать как равномерно распределенную нагрузку по длине звена с интенсивностью  $q_{cb}^k = \gamma_k A_k$ , где  $\gamma_k$  - удельный вес материала звена  $k$ ,  $A_k$  - площадь поперечного сечения звена  $k$ . Из-за необходимости дальнейшего расчета звена, эту нагрузку разложим по двум направлениям, по направлению и перпендикулярно оси звена.

$$\begin{Bmatrix} q_{cb}^{x'k} \\ q_{cb}^{y'k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -q_{cb}^k \end{Bmatrix}$$

От ускорения поступательного движения звена появляются следующие силы инерции: инерционные силы от ускорения  $\bar{w}_{kp}^{x'k}$  будет равно,  $q_b^{x'k} = -\frac{\gamma_k A_k}{g} \bar{w}_{kp}^{x'k}$ ,  $q_b^{y'k} = -\frac{\gamma_k A_k}{g} \bar{w}_{kp}^{y'k}$  где  $g$  - ускорения свободного падения твердого тела

От угловой скорости  $\bar{\omega}_k$  вращательного движения звена  $k$  вокруг полюса  $P_k$ , возникают распределенные нагрузки треугольного вида с интенсивностью

$$q_b^{x'k} = \frac{\gamma_k A_k}{g} \omega_k^2 x_k',$$

действующие вдоль оси звена.

От углового ускорения вращательного движения звена  $k$ , вокруг оси  $Z_k'$  проходящий через полюс  $P_k$  возникают распределенные нагрузки треугольного вида с интенсивностью

$$q_b^{y'k} = -\frac{\gamma_k A_k}{g} \varepsilon_k x_k'.$$

Эти нагрузки всегда действуют перпендикулярно к оси звена и направлены противоположно к направлению вектора  $\bar{\varepsilon}_k \times \bar{l}_k$ .

Алгебраически суммируя все нагрузки, действующие по направлению оси  $Y_k'$  (действующие перпендикулярно к оси звена) увидим, что интенсивность суммарной нагрузки меняются по длине звена по линейному закону и определяется с помощью следующего выражение:

$$q_y(x_k') = a_{kq} + b_{kq} x_k'; \quad (1)$$

где  $a_{kq} = -\gamma_k A_k \cos \theta_k - \frac{\gamma_k A_k}{g} w_{kp}^{y'k}$ ,  $b_{kq} = -\frac{\gamma_k A_k}{g} \varepsilon_k$ .

Аналогично суммируя все нагрузки, действующие вдоль оси звена (по направлению оси  $X'_k$ ) увидим, что их интенсивность тоже меняются по длине звена по линейному закону и выражается с помощью следующего уравнение:

$$q_x(x'_k) = a_{kn} + b_{kn}x'_k; \quad (2)$$

где  $a_{kn} = -\gamma_k A_k \sin \theta_k - \frac{\gamma_k A_k}{g} w_{kp}^{x'_k}$ ,  $b_{kn} = \frac{\gamma_k A_k}{g} \omega_k^2$ .

Таким образом, интенсивности сил инерции и тяжести стержня имеют вполне определенное аналитическое выражение. Используя их и метод конечных элементов, основанный на прямолинейном стержне [4-6], получим более точные конечно-элементные модели, аналитически учитывающие распределенную инерцию плоскопараллельного движения.

Уравнения равновесия элемента стержня с учетом (1) равны [7-10]:

$$\frac{dN}{dx} + q_x = \frac{dN}{dx} + a_n + b_n x = 0, \quad \frac{dQ_y}{dx} + q_y = \frac{dQ_y}{dx} + a_q + b_q x = 0; \quad \frac{dM_z}{dx} - Q_y = 0; \quad (3)$$

Индексы «к» и «'» для удобства записи не опущены.

Уравнения совместности деформаций, перемещений и связи деформаций и внутренних усилий для стержней имеют вид:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}; \quad \chi = \frac{d\varphi}{dx}; \quad \aleph_y = -\frac{d^2 w_z}{dx^2}; \quad \aleph_z = -\frac{d^2 w_y}{dx^2} \quad (4)$$

$$N = EF\varepsilon_x; \quad M = GJ\chi; \quad M_y = EJ_y \aleph_y; \quad M_z = EJ_z \aleph_z \quad (5)$$

Если длина звена  $l$  и заданы смещения  $u_o, w_{yo}, w_{zo}, u_l, w_{yl}, w_{zl}$  и повороты  $\varphi_o, \varphi_{yo}, \varphi_{zo}, \varphi_l, \varphi_{yl}, \varphi_{zl}$ , в торцевых сечениях стержня, то решая совместно (3)-(5) относительно упругих перемещений, получим:

$$u = u_o + (u_l - u_o) \frac{x}{l} + \frac{a_n x}{2EF} (x-l) - \frac{b_n x}{6EF} (x^2 - l^2), \quad \varphi = \varphi_o + (\varphi_l - \varphi_o) \frac{x}{l}$$

$$w_y = (1 + \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2}) w_{yo} + \frac{x^2}{l^2} (3 - 2\frac{x}{l}) w_{yl} + x \cdot (1 - \frac{x}{l})^2 \varphi_{zo} + (\frac{x}{l} - 1) \cdot \frac{x^2}{l} \cdot \varphi_{zl} +$$

$$+ \frac{a_q^y}{EJ_z} \cdot \frac{x^2}{24} (l-x)^2 + \frac{b_q^y}{EJ_z} \cdot \frac{x^2}{120} \cdot (2l^3 - 3l^2 x + x^3)$$

$$w_z = (1 + \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2}) w_{zo} + \frac{x^2}{l^2} (3 - 2\frac{x}{l}) w_{zl} + x \cdot (1 - \frac{x}{l})^2 \varphi_{yo} + (\frac{x}{l} - 1) \cdot \frac{x^2}{l} \cdot \varphi_{yl}$$

Тогда из (5) с учетом (4) получим:

$$N_l = EF \left[ \frac{u_l - u_o}{l} - \frac{a_n l}{2EF} - \frac{b_n l^2}{EF} \right], \quad M_o = \frac{GJ}{l} (\varphi_l - \varphi_o)$$

$$N_o = EF \left[ \frac{u_l - u_o}{l} + \frac{a_n l}{2EF} + \frac{b_n l^2}{2EF} \right], \quad M_l = \frac{GJ}{l} (\varphi_l - \varphi_o)$$

$$Q_{yo} = -\frac{6EJ_z}{l^3} (2w_{yo} + l\varphi_{zo} - 2w_{yl} + l\varphi_{zl}) + \frac{a_q l}{2} + \frac{3b_q l^2}{20}$$

$$Q_{yl} = -\frac{6EJ_z}{l^3} (2w_{yo} + l\varphi_{zo} - 2w_{yl} + l\varphi_{zl}) - \frac{a_q l}{2} - \frac{7b_q l^2}{20}$$

$$Q_{zo} = -\frac{6EJ_z}{l^3} (2w_{zo} + l\varphi_{yo} - 2w_{zl} + l\varphi_{yl}), \quad Q_{zl} = -\frac{6EJ_z}{l^3} (2w_{zo} + l\varphi_{yo} - 2w_{zl} + l\varphi_{yl})$$

$$M_{z0} = \frac{EJ_z}{l^2} (6w_{y0} + 4l\varphi_{z0} - 6w_{yl} + 2l\varphi_{zl}) - \frac{a_l l^2}{12} - \frac{b_l l^3}{30}$$

$$M_{zl} = -\frac{EJ_z}{l^2} (6w_{y0} + 2l\varphi_{z0} - 6w_{yl} + 4l\varphi_{zl}) - \frac{a_l l^2}{12} - \frac{b_l l^3}{20} \quad M_{y0} = -\frac{EJ_z}{l^2} (-6w_{z0} + 4l\varphi_{y0} + 6w_{zl} + 2l\varphi_{zl}),$$

$$M_{yl} = -\frac{EJ_z}{l^2} (-6w_{z0} + 4l\varphi_{y0} + 6w_{zl} + 2l\varphi_{zl})$$

Учитывая положительные направления внешних и внутренних геометрических и силовых факторов:

$$\varphi_{y0} = -\varphi_2^{ij}; \quad \varphi_{yl} = -\varphi_2^{ji}; \quad N_0 = -R_{1N\xi}^{ij}; \quad Q_{y0} = -R_{2N\xi}^{ij}; \quad Q_{z0} = -R_{3N\xi}^{ij};$$

$$M_0 = -R_{1M\xi}^{ij}; \quad M_{y0} = -R_{2M\xi}^{ij}; \quad M_{z0} = -R_{3M\xi}^{ij};$$

а направления остальных факторов совпадают и опуская промежуточные преобразования, получаем основные соотношения равновесия МКЭ для прямолинейного стержня:

$$\begin{Bmatrix} \bar{R}_\xi^{ij} \\ \bar{R}_\xi^{ji} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^{ij} & B_{12}^{ij} \\ B_{21}^{ij} & B_{22}^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_\xi^{ij} \\ \bar{U}_\xi^{ji} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{Q}^{ij} \\ \bar{Q}^{ji} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

связывающие обобщенные реактивные силы  $\bar{R}_\xi^{ij} = [R_{1N\xi}^{ij} R_{2N\xi}^{ij} R_{3N\xi}^{ij} R_{1M\xi}^{ij} R_{2M\xi}^{ij} R_{3M\xi}^{ij}]^T$ ;  $\bar{R}_\xi^{ji} = [R_{1N\xi}^{ji} R_{2N\xi}^{ji} R_{3N\xi}^{ji} R_{1M\xi}^{ji} R_{2M\xi}^{ji} R_{3M\xi}^{ji}]^T$ , действующие в узлах стержня с узловыми обобщенными перемещениями  $\bar{U}_\xi^{ij} = [u_1^{ij} u_2^{ij} u_3^{ij} \varphi_1^{ij} \varphi_2^{ij} \varphi_3^{ij}]^T$  и  $\bar{U}_\xi^{ji} = [u_1^{ji} u_2^{ji} u_3^{ji} \varphi_1^{ji} \varphi_2^{ji} \varphi_3^{ji}]^T$ . Квадратные подматрицы  $[B_{rq}^{ij}] (r=1,2; q=1,2)$  матрицы жесткости  $[B^{ij}]$  стержневого элемента не изменяются, а подвекторы  $\bar{Q}^{ij}$  и  $\bar{Q}^{ji}$ , получают уже с учетом инерции следующий вид (7).

Т.о., определены элементы подвекторов  $\bar{Q}^{ij}$  и  $\bar{Q}^{ji}$ , аналитически учитывающие не только вес, но и распределенную инерцию плоскопараллельного движения стержня:

$$\bar{Q}^{ij} = \begin{Bmatrix} -\frac{a_n l}{2} - \frac{b_n l^2}{2} \\ \frac{a_q l}{2} - \frac{3b_q l^2}{20} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{a_q l^2}{12} - \frac{b_q l^3}{30} \end{Bmatrix}, \quad \bar{Q}^{ji} = \begin{Bmatrix} -\frac{a_n l}{2} - \frac{b_n l^2}{2} \\ \frac{a_q l}{2} - \frac{7b_q l^2}{20} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a_q l^2}{12} + \frac{b_q l^3}{30} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Аналогичным образом рассмотрели пространственное движение  $k$ -го стержня относительно неподвижной системы координат  $OXYZ$ .

Подвекторы  $\bar{Q}^{ij}$  и  $\bar{Q}^{ji}$  с учетом уравнений равновесия, аналитически учитывающие не только вес, но и распределенную инерцию пространственного движения стержня  $k$  определяются следующим образом:

$$\vec{Q}^{ij} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{a_{kn}l}{2} - \frac{b_{kn}l^2}{2} \\ a_{kq}^y l - 3b_{kq}^y l^2 \\ \frac{2}{a_{kq}^z l} - \frac{20}{3b_{kq}^z l^2} \\ \frac{2}{2} - \frac{20}{20} \\ \frac{ml}{2} \\ \frac{a_{kq}^z l^2}{12} + \frac{b_{kq}^z l^3}{30} \\ \frac{a_{kq}^y l^2}{12} - \frac{b_{kq}^y l^3}{30} \end{array} \right\}, \quad \vec{Q}^{ji} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{a_{kn}l}{2} - \frac{b_{kn}l^2}{2} \\ a_{kq}^y l - 7b_{kq}^y l^2 \\ \frac{2}{a_{kq}^z l} - \frac{20}{7b_{kq}^z l^2} \\ \frac{2}{2} - \frac{20}{20} \\ -\frac{ml}{2} \\ -\frac{a_{kq}^z l^2}{12} - \frac{b_{kq}^z l^3}{30} \\ \frac{a_{kq}^y l^2}{12} + \frac{b_{kq}^y l^3}{30} \end{array} \right\} \quad (8)$$

Т.о., определены элементы подвекторов  $\vec{Q}^{ij}$  и  $\vec{Q}^{ji}$ , аналитически учитывающие вес и распределенную инерцию (8) пространственного движения звена стержневого механизма.

Мы в этой работе получили новые аналитические выражения интенсивности инерционных сил и весов звеньев для двух случаев движения: плоскопараллельного (7) и пространственного (8). Это один из немногих анализов распределенных сил инерции в пространственном механизме, позволяющий достичь оптимального динамического отклика связи на этапе проектирования. Описанная модель была применена для динамического расчета упругих колебаний структуры механизма класса IV с внешней призматической парой.

Полученные результаты позволяют сделать вывод об эффективности предложенного метода, алгоритма и компьютерного программного обеспечения с точки зрения их применения при численном моделировании механизмов упругих колебаний высокого класса.

Наша будущая работа будет заключаться в разработке более точных методов расчета прочности конструкций и жесткости связей. Будет рассмотрен более общий случай, когда узлы соединения имеют линейно изменяющееся переменное сечение.

Список использованной литературы:

- 1 Джолдасбеков У.А., Темирбеков Е.С. Некоторые аспекты анализа и синтеза механизмов высоких классов.- Астана: Акмолинский ЦНТИ, 2006.- 299с.
- 2 Джолдасбеков У.А., Байгунчиков Ж.Ж. Аналитическая кинематика плоских рычажных механизмов высоких классов. -Алма-Ата: изд-во КазГУ, 1980. -101с.
- 3 Temirbekov Y.S., Baimukhanov S. Designing of Sixlink Mechanism Schemes with the Changeable Contour. Taking into Account Forces Transfer // World Congress on Engineering. London, U.K., 6-8 July, 2011, p.38-43.
- 4 Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., «Мир», 1975, 541.
- 5 Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / под ред. А.Ф. Смирнова.- М.: Стройиздат, 1982 - 448с.
- 6 Шапошников Н.Н. и др. Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость.- М.: Машиностроение, 1981, 333с.
- 7 Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. М., Стойиздат, 1977. 132 с.
- 8 Тер-Эммануильян Н.Я. Численные методы в механике деформируемого твердого тела. Учебное пособие. – Изд-во КазГУ, 1985, 68 с.
- 9 Темирбеков Е.С. Конечно-элементное моделирование рычажных механизмов. Разработка мобильных подмостей. Монография. – Астана. 2007, 218 с.
- 10 Фролова О.А. Анализ напряженно-деформированного состояния стержневых элементов конструкции с учетом стат. и динам. воздействий // Вестник Тамбов. унив-а. серия Ест. и тех. науки. — 2016. — Т. 21. — с. 1400– 1404.