МРНТИ 27.01.45
УДК 372.851

https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.09

С.Е. Ералиев[1], Б.М. Қосанов[1], Ж.М. Нурмухамедова[1], Д.М. Нурбаева[1]

[1]Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

СТАНДАРТ ЕМЕС ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ШЕШУ

Аңдатпа

Бұл мақалада стандарт емес есептерді мектепте оқытудың мәселелері қарастырылған. Қазіргі уақытта орта мектептердің негізгі міндеттерінің бірі – оқушылардың шығармашылық ойлау қабілеттерін анықтау және оларды дамыту проблемаларын шешу болып табылатындығын айтып, осы мақсатта оқушылардың математикалық даму дәрежесі олардың есеп шығара білуінен анық байқалады. Есеп дегеніміздің өзі – әрбір мектеп оқушысының ақыл-ойын ұштаудың негізгі құралы деп анықтама беріліп, есеп шығарудың сатыларын, олардың түрлерін атап көрсеткен. Есеп шығару математиканы игерудің ең жоғары продуктивтік формасы және де бұл процесс математикадан өткізілетін барлық кластан тыс жұмыстардың қажетті компоненті болуы керек. Математикалық олимпиадада берілетін есептер - стандарт емес есептер. Олимпиадалық есептер, әдетте біршама зеректікке, біліктілікке есеп шешудің өзіндік стандарт емес әдістерін табуға көмектеседі. Орта мектеп бағдарламасында теңсіздік ұғымының анықтамасын пайдалану, белгілі теңсіздіктердің көмегімен дәлелдеу, оң сандардың арифметикалық ортасы мен геометриялық ортасының өзара байланысын пайдалану, кері жору әдісітерінен басқа әдістермен оларды дәлелдеуді қарастырған.

Түйін сөздер: стандартты емес есептер, олимпиадалық есептер, жоғары продуктивтік форма.

Аннотация

С.Е. Ералиев[1], Б.М. Қосанов[1], Ж.М. Нурмухамедова[1], Д.М. Нурбаева[1]
[1]Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы, Казахстан

РЕШЕНИЕ НЕСТАНДАРТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

В данной статье рассматриваются проблемы обучения в школе нестандартных задач. В настоящее время одной из основных задач средних школ является выявление творчески мыслительных способностей учащихся и решение проблем их развития. Отчет был определен как основной инструмент для развития умственных и мыслительных способностей школьников. Решение задач является наиболее продуктивной формой усвоения математики, и этот процесс должен быть необходимым компонентом всех внеклассных работ, проводимых по математике. Задачи на математической олимпиаде - нестандартные задачи. Олимпийские задачи, как правило, помогут в значительной мере научиться, найти самостоятельные нестандартные методы решения задач. В программе средней школы предусмотрено использование определения понятия неравенства, доказывание с помощью известных неравенств, использование взаимосвязи между арифметической средней и геометрической средней положительных чисел, доказательство их методами, кроме методов обратного похода.

Ключевые слова: нестандартное задание, олимпийское задание, высокопродуктивная форма.

Abstract

SOLVING NONSTANDARD INEQUALITIES

Yeraliyev S.E. [1], Kossanov B.M. [1], Nurmukhamedova Zh.M. [1], Nurbayeva D.M[1].
[1]Kazakh National Pedagogical University after Abai, Almaty, Kazakhstan

This article discusses the problems of teaching non-standard tasks at school. Currently, one of the main tasks of secondary schools is to identify creative thinking abilities of students and solve problems of their development. The report was identified as the main tool for developing students ' mental and thinking abilities. Problem solving is the most productive form of learning mathematics, and this process should be a necessary component of all extracurricular activities conducted in mathematics. Problems at the mathematical Olympiad are non-standard problems. Olympic tasks will usually help you learn a lot, find independent non-standard methods of solving problems. The high school curriculum provides for the use of the definition of inequality, proving using known inequalities, using the relationship between the arithmetic mean and geometric mean of positive numbers, and proving them using methods other than reverse-trip methods.

Keywords: Non- standard task, Olympic task, Highly productive form.

Қазіргі уақытта орта мектептердің негізгі міндеттерінің бірі – оқушылардың шығармашылық ойлау қабілеттерін анықтау және оларды дамыту проблемаларын шешу болып табылады.

Стандарт емес есептер оқушылардың ойлау қабілетін дамытады да, ойлауға жетелейді және есепке деген ынтасын, қызығушылығын арттырады.Стандарт емес есептер оқушылардың есепті үйреншікті жолмен шығара салуына мүмкіндік бермейді. Демек, стандарт емес есептер оқушылардың математикалық ойлау қабілетін дамытудың негізгі құралы болып табылады.

Оқушылардың математикалық даму дәрежесі олардың есеп шығара білуінен анық байқалады. Есеп дегеніміздің өзі – әрбір мектеп оқушысының ақыл-ойын ұштаудың негізгі құралы. Әдеттен тыс, қызықты есептердің шешімін табу балалардың математикалық шығармашылығында маңызды орын алады. Ең әуелі, есеп шығаруды үйрену – оның шешімін табу екенін есте ұстаған жөн. Д. Пойа «Математикалық таным» кітабынды (М.1976.13-бет) былай деп жазды: «Егер сіз жүзуді үйренем десеңіз, тайсалмай суға сүңгіп кетіңіз, ал есеп шығаруды үйрену үшін оның шешімін табыңыз» [1].

Кез келген қиын есепті шығару оқушыдан үлкен еңбекті, ерен күші мен табандылықты талап еседі. Бұл қасиеттер баланың есепке ынтасы оянғанда күшейе түседі. Қызықты есептер ақыл-ой энергиясын қозғалысқа келтіретіндіктен, оларды шешу оңайға түседі. Міне, сондықтан мұғалім оқушылар қызығып, өз еріктерімен шығаратын есептерді таңдап алуы қажет.

Оқушылардың математикалық қабілттерін дамыту және математикаға ынтасын тәрбиелеуде әзіл – есептер мен математикалық ребустарды пайдалану тиімді. Есепті шығара алатынына оқушының сенімді болуы да табысқа жеткізетін маңызды фактордың бірі. Есеп шамадан тыс қиын болса, мектеп оқушысының шарасы таусылып, ойлау нәтижелігі төмендейді, әрі қарай үйренуіне нұқсан келеді. Мұғалім есептерді ептілікпен таңдау арқылы өз шәкірттерінің сенім күшін, жігері мен қызығуын, оның шешімін табуға ұмтылуы, қолдан келетіні сену-жетістікке жету үшін қажет алғы шарттар.

Әрбір есепті шығару процесіндегі төрт сатыны ажырата білген дұрыс:

1) есептін шартын ұғу;

2) жоспарын құру;

3) жоспарды жүзеге асыру;

4) «артқа көз салу», яғни табылған шешімді пысықтап үйрену.

Оқушының меңгерген материалын шығармашылықпен ұғынуы және жаңа іс-әрекет тәсілдерінің туындап, дамуы ойлаудың мынадай үш құрамының болуына байланысты:

1) анализ және синтез, салыстыру, аналогия, классификация тәрізді қарапайым ойлау операцияларының жоғарғы деңгейде қалыптасуы;

2) көп болжам, шешімдер варианттары мен тосын идеялар ұсынудан көрінетін ойлау белсенділігінің жоғары деңгейі;

3) өзіндік ойлау әдісінен көрінетін ұйымдасқандық пен мақсаткерліктің жоғары деңгейі.

Аталған ойлау сапаларының қалыптасу оқушының шығармашылық тұлғасын дамытуға оқу материаларын игерудегі қиындықтарды жеңуге жол ашады. Мүның мәні мынады, оқушы білім мен іс-әрекеттің теориялық негізделген тәсілдерін қолданады немесе қойылған мәселені шешуге жаңа тәсілдерді өз бетінше таба алады. Мұғалімнің міндеті осы айтылған ойлау компоненттерін қалыптастыра білу болмақ. Ал оның кілті – шығармашылық есеп шығарту. Оқушылардың шығармашылық есептерді шығаруы олардың білім, білік, дағдысы арқылы іске асады.

Сонымен қатар, сабақта жоғары белсенді ойлау әрекетінің сақталуында мотивация, оқушының өз ісіне ынтысы рөл атқарады. Демек, оқушының шығармашылық іс-әрекетке бейімдейтін, ақыл-ойын, дамытатын құрал деп қызықты есептерді («долбарлау» есептерді, басқатырғылар, логикалық есептер) айтуға болады. Оларды шығармашылық іс-әрекетті жетілдіріп, ақыл-ойды жаттықтырып көмекші, қосымша жол ретінде ұтымды пйдалану мүмкіндігі мол [2].

Мұндай материалдар сан алуан болғанымен, төмендегідей ортақ қасиеттері бар.

1) Қызықты есептердің шешу жолы белгісіз. Олардың шешіміне жету «ойдың броундық қозғалысы» тәрізді, яғни байқап көру, қателесу әдісімен іске асады. Байқап көру арқылы іздену жеке жағдайларда негізгі шешімге бастайтын тізгінді қолға ұстатады;

2) Қызықты есептер оқушының пәнге қызығуына, белсенділігіне негіз болады Есептің сюжетінің шешілу жолының әдеттен тыс болуы бала көңіліне әсер етіп, қайткенде де оны шығаруға итермелейді;

3) Қызықты есептер ойлау заңдылықтарын білуге негізделіп жасалады.

Міне, осындай есеп түрлерін жүйелі түрде қолдану аталған ойлау операцияларын дамытуға, балалардың математикалық түсініктерін қалыптастыруға жағдай жасайды. Қызықты есептерді шығару көбінесе байқап көріп іздену процесімен жүреді. Ойша болжай білу балалардың бойындағы тапқырлық пен аңғарымпаздықты байқатады. Тапқырлық – шығармашылықтың ерекше көрінісі, ол талдау, салыстыру, жалпылау, байланыстарды анықтау, ұқсастыру, тұжырымдау ой елегінен өткізіп, өзара байланыстарды анықтай білу, соның негізінде есеп шығарушы бір тұжырымға келіп, ойын топтайды. Аңғарымпаздың өз білімін кәдеге асыра білудің көрсеткіші болып табылады. Қызықты есептердің шешімін болжауға қол жеткізетін тапқырлық пен аңғарымпаздық ғайыптан келер нәрсе емес. Мұндай ақыл – ой әрекетінің жетістігін оқыту процесінде дамытуға болады, әрі солай ету қажет [3].

Кез келген жағдайда есептің шешімін болжау үшін мұқият талдау жасалады: есептің басты қасиеттерін, фигуралардың кеңістіктегі орналасуы мен топтасуын, олардың ерекшелігін, ұқсас белгілерін ажырата алу. Алайда, қызықты есептерді шығару үшін байкау және қателесу әдісі оншалық сенімді әрі жан-жақты емес. Неғұрлым тиімді әдіс – балаларды ақыл-ой әрекетінің анализ және синтез, салыстыру, ұқсастыру, дәрежелеу тәрізді маңызды тәсілдермен қаруландыру [4].

Танымдық мәні зор болатын, математикалық білім беру жүйесінде жетекші роль атқаратын мәселелер қатарына теңсіздіктер жатады.

Жалпы білім беретін мектептерге арналған оқулықтарды жеңсіздіктерге басты назар аударылмай келеді: мектеп оқушылары математикалық жеңсіздіктерді дәлелдеу дағдысын қалыптастыра алмай келеді. Осы айтылған кемшіліктер мен әдістемелік қиындықтарға көңіл бөлінсе деген мақсатпен мақала мектеп мұғалімдерімен, педагогикалық жоғары оқу орындары физика-математика факультеттерінің студенттеріне арналады.

Орта мектеп бағдарламасында теңсіздік ұғымының анықтамасын пайдалану, белгілі теңсіздіктердің көмегімен дәлелдеу, оң сандардың арифметикалық ортасы мен геометриялық ортасының өзара байланысын пайдалану, кері жору әдісі бойынша дәлелдеулер қолданылады. Бұлардан басқа да тәсілдерді қарастырайық.

Квадраттық үшмүшенің дискриминанты бойынша дәлелденетін теңсіздіктерге тоқталайық.

Көптеген теңсіздіктер квадраттық үшмүше дискриминантының таңбасы арқылы дәлелденеді. Берілген квадраттық үшмүше оң мән қабылдау үшін $a > 0, d < 0$ болуы керек. Төмендегі теңсіздікті дәлелдеу керек.

$a \succ 0, b \succ 0, c \succ 0$ болғанда $a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2 \geq abc(a+b+c)$

$$\mathrm{a}^2b^2 + \mathrm{c}^2b^2 + \mathrm{a}^2c^2 - \mathrm{a}^2bc - \mathrm{b}^2ac - \mathrm{c}^2ab = (b^2 - bc + c^2)a^2 - bc(b+c)a + \mathrm{c}^2b^2 \geq 0$$

Бұл теңсіздікті квадраттық үшмүше деп қарастырсақ:

$$D = b^2c^2(b+c)^2 - 4b^2c^2(b^2 - bc + c^2)$$
$$= b^2c^2(b^2 + 2bc + c^2) - 4b^4c^2 + 4b^3c^3 - 4b^2c^4$$
$$= b^4c^2 + 2b^3c^3 + b^2c^4 - 4b^4c^2 + 4b^3c^3 - 4b^2c^4 = 6b^3c^3 - 3b^2c^4 - 3b^4c^2$$
$$= -3b^2c^2(b^2 + c^2 + 2bc) = -3b^2c^2(b-c) \leq 0$$

Яғни, a санының кез келген мәнінде берілген теңсіздік дұрыс болады. b мен c бойынша квадраттық үшмүше алу арқылы да осындай қорытындыға келеміз.

x-тің кез келген мәнінде $kx^2 - (5k+1)x + 3(2k+1)$ квадраттық үшмүшесі оң мән қабылдай ма?

$$k > 0, D = (5k+1)^2 - 12k(2k+1) = 25k^2 + 10k + 1 - 24k^2 - 12k = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \geq 0$$

Демек, x-ң кез келген мәнінде квадраттық үшмүше оң мән қабылдай алмайды.

«Күшейту» әдісі бойынша дәлелденетін теңсіздіктерді қарастырайық:

Егер $A > B, B \geq C$ болса, онда $A > C$ деген қасиетке сүйеніп көптеген теңсіздіктерді дәлелдеуге болады.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} \prec 1 (n \in N, n > 1)$ теңсіздігін дәлелдейік,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}\prec\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^n}$$
$$=\frac{2-1}{1\cdot2}+\frac{3-2}{2\cdot3}+\frac{4-3}{3\cdot4}+..+\frac{n-(n-1)}{(n-1)^n}$$
$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\ldots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$$
$$=1-\frac{1}{n}\prec1$$

$A=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\prec\frac{3}{4}$ теңсіздігін дәлелдейік

$$A=\frac{1}{2n}\left[(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n})+(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1})+\ldots+(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n})\right]$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2}+\ldots+\frac{3n}{2n^2})$$
$$\prec\frac{1}{2}(\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2}+\ldots+\frac{3n}{2n^2})$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)\frac{3}{2n}\prec\frac{3}{4}+\frac{3}{4n}\prec\frac{3}{4}$$

Теңсіздіктердің екі бөлігінде 1 санынан азайту әдісі.

Бұл әдіс теңіздіктің екі жағыда 1-ден кіші дұрыс бөлшек болған жағдайда қолданылады. Ол үшін теңсіздіктің екі бөлігін өз алдына түрлендіріп, ықшамдап, содан кейін олардың екі бөлігін 1-ден шегеру керек. Сол арқылы нәтижені салыстыруға болады.

Мысал.

$\frac{2n-1}{2n}\prec\frac{2n}{2n+1}$ теқсіздігін дәлелдейік.

$1-\frac{2n-1}{2n}=\frac{1}{2n}$; $1-\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$ яғни $\frac{1}{2n}\succ\frac{1}{2n+1}$

Демек, $1-A\succ1-B$ болса , онда $B\succ A$

Сондықтан $\frac{2n-1}{2n}\prec\frac{2n}{2n+1}$.

$\frac{33331}{33334}\succ\frac{44441}{44445}$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

$A=\frac{33334-3}{33334}=1-\frac{3}{33334}\bullet\frac{4}{4}$; $B=\frac{44445-4}{44445}=1-\frac{4}{44445}\bullet\frac{3}{3}$

$1-A=\frac{12}{133336};1-B=\frac{12}{133335}$, Демек $A>B$.

Теңсіздіктердің оң және сол бөліктерінің қатынасын 1-мен салыстыру.

Егер $A\succ B\succ0$ болса, онда. $A:B\succ1$

Керісінше егер $B\succ0$ болса, онда алдындағы теңсіздіктен $A\succ B$ болады.

Мысал.

Кез келген $n\in N$ үшін

$1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\sqrt{2n+1}<2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n$ екенін дәлелдеу керек.

$\frac{1\bullet3}{2\bullet2}\prec1,$ $\frac{4\bullet3}{4\bullet4}\prec1,$ …. $\frac{(2n-1)\bullet(2n+1)}{2n\bullet2n}\prec1,$

болғандықтан, осы теңсіздіктерді мүшелеп көбейтсек:

$$\frac{1\bullet 3^2\bullet 7^2\bullet\ldots\bullet(2n-1)^2(2n+1)}{2^2\bullet 4^2\bullet 6^2\bullet\ldots\bullet 2n^2}$$ Осыдан $$\frac{1\bullet 3\bullet 5\bullet 7\bullet\ldots\bullet(2n-1)}{2\bullet 4\bullet 6\bullet\ldots\bullet 2n}\prec\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Яғни $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\sqrt{2n+1} < 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n$

Кез келген мөлден үлкен $a_1, a_2, \ldots a_n$ сондары берілсін. Бұл сандардың арасындағы төмендегі қатынастар:

$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=A_n$ -арифметикалық орташа,

$\sqrt[n]{a_1\bullet a_2\bullet\ldots\bullet a_n}=\sigma_n$ - геометриялық орташа,

$\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}{\sqrt{n}}=Q_n$ - квадраттық орташа,

$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=H_n$ -гармоникалық орташа деп аталады.

Бұл орташалардың арасында $H_n\le\sigma_n\le A_n\le Q_n$ қатынасы орындалады. Көп жағдайда теңсіздіктерді дәлелдегенде осы қатынастар қолданылады.

$a_1, a_2, \ldots a_n$ оң сандарының арифметикалық орташасы олардың геометриялық орташасынан үлкен немесе тең болады:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\bullet a_2\bullet\ldots\bullet a_n}$$

Бұл теңсіздікті Коши теңсіздігі деп айтады. Осы теңсіздікті дәлелдейік.

$\sqrt[n]{a_1\bullet a_2\bullet\ldots\bullet a_n}=\sigma_n$ геометриялық орташасындағы сандар

$a_1\ge a_2\ge a_3\ge\ldots\ge a_n$ теңсіздіктерін қанағаттандырсын.

$$a_1a_2=(\sqrt{a_1a_2})^2=\sigma^2,\ a_1a_2a_3=(\sqrt[3]{a_1a_2a_3})^3=\sigma^3,\ldots,a_1a_2\ldots a_n=(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n})^n=\sigma^n$$

Болғандықтан $\frac{a_1}{\sigma}=1,\frac{a_1a_2}{\sigma^2}=1,\ldots,\frac{a_1a_2\ldots a_n}{\sigma^n}=1$

әрі $\frac{\sigma}{a_1}=1,\frac{\sigma^2}{a_1a_2}=1,\ldots,\frac{\sigma^n}{a_1a_2\ldots a_n}=1$ болады.

Осыдан

$$\frac{a_1}{\sigma}\bullet\frac{\sigma}{a_1}+\frac{a_1a_2}{\sigma^2}\bullet\frac{\sigma^2}{a_1a_2}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_n}{\sigma^n}\bullet\frac{\sigma^n}{a_1a_2\ldots a_n}=n\le\frac{a_1}{\sigma}\bullet 1+\frac{a_1a_2}{\sigma^2}\bullet\frac{\sigma}{a_1}+\ldots$$

$$+\frac{a_1a_2\ldots a_n}{\sigma^n}\bullet\frac{\sigma^{n-1}}{a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}}=\frac{a_1}{\sigma}+\frac{a_2}{\sigma}+\frac{a_3}{\sigma}+\ldots+\frac{a_n}{\sigma}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{\sigma}$$

Яғни $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\ge\sigma=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$ дәлелдеу керегі де осы еді.

Мысал.

$n!\le\left(\frac{n+1}{2}\right)^n,(n\ge 2)$ теңсіздігін дәлелдеу керек.

$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\bullet 2\bullet 3\ldots n}\le\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}=\frac{(n+1)\bullet n}{2n}=\frac{n+1}{2}$$

Бұл теңсіздіктің екі жағын **n**-ге дәрежелесек $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ дәлелдеу керегі де осы еді.

Чебышев теңсіздігі.

а) Егер $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge 0$ және $b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \ldots \ge b_n \ge 0$ болса, онда $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \ge (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \bullet (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$

Төмендегі n-теңсіздікті мүшелеп қоссақ:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \ge (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \quad (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \ge (a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_nb_{n-1})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \ge (a_1b_n + a_2b_1 + \ldots + a_nb_{n-1})$$

Чебышев теңсіздігінің дұрыстығына көзіміз жетеді.

б) Егер $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge 0$ және $b_1 \le b_2 \le b_3 \le \ldots \le b_n \le 0$ болса, онда $n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \le (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \bullet (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$ теңсіздігі орындалады.

Мысал.

Егер $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4 \ge 0$ және $b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge b_4 \ge 0$ болса, онда $4(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) \ge (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \bullet (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$ теңсіздігінің орандалатындығын дәлелдеу керек.

Есептің шарттары орындалса, онда

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \ge a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \ge a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_4 + a_4b_1$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \ge a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \ge a_1b_4 + a_2b_1 + a_3b_2 + a_4b_3$$

Бұл теңсіздітердің сол жағындағы өрнектерді бөлек, оң жағындағы өрнектерді бөлек қоссақ:

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) \ge a_1 \bullet (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + a_2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) +$$
$$a_3(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + a_4(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$$

дәлелдеу керегі де осы еді [5].

Математикадан өтілетін факультативтік сабақтарда оқушылардың қызығушулығын қалыптастыруға, еңбек дағдысын, ізденімпаздығын арттыруға, өзінің мектеп бағдарламасы бойынша алған білімін дамыта отырып, оның өмірге қажеттілігін айқындауға, қолдана білуге дағдылантуға баулу керек.

Мектеп курсындағы математиканың мәні оның көп қырлылығында, ягни негізгі объектілері нақты өмірге негізделгендігінде. Сондықтан бағдарламадан тыс стандарт емес есептерді шығару оқушылардың білім жүйесін және ойлау қабілетін кең түрде дамытады.

Есеп шығару математиканы игерудің ең жоғары продуктивтік формасы және де бұл процесс математикадан өткізілетін барлық кластан тыс жұмыстардың қажетті компоненті болуы керек. Математикалық олимпиадада берілетін есептер - стандарт емес есептер. Олимпиадалық есептер, әдетте біршама зеректікке, біліктілікке есеп шешудің өзіндік стандарт емес әдістерін табуға көмектеседі.

Пайдаланған әдебиеттер тізімі:

1. Пойа Д. Математикалық таным. Москва, 1976 ж.

2. Ералиев С. Натурал сандардың қасиеттеріне арналған стандарт емес есептерді шешу тәсілдері // «Ұлы даланың жеті қыры – ұлттық болмыстың негізі» атты халықаралық ғылыми- тәжірибелік конференция еңбектері. – Шымкент, «Әлем» баспаханасы, 2019ж. – 368 б.

3. Ералиев С., Абуова А.Е. Алгебралық теңсіздіктерді дәлелдеудің кейбір тәсілдері // «Ұлы даланың жеті қыры – ұлттық болмыстың негізі» атты халықаралық ғылыми- тәжірибелік конференция еңбектері. – Шымкент, «Әлем» баспаханасы, 2019ж. – 368 б.

4. *Серікбаева В.Е. Математикалық пәнаралық байланыстары. Оқу әдістемелік құрал - Алматы, 2007ж. – 199 б.*
5. *Шалбаев Е.Б., Қаңлыбаев Қ.И., Шияпов К.М. Теңсіздіктер. Алматы, «Глобус» баспасы 2007ж. – 62 б.*

References:

1. *Poja D.(1976) Matematikalyk tanym [Mathematical knowledge.]. Moskva. (In Kazakh)*
2. *Eraliev S. (2019) Natural sandardyn kasietterine arnalgan standart emes esepterdi sheshu təsilderi[Methods for solving non-standard problems on the properties of natural numbers]. «Uly dalanyn zheti kyry – ulttyk bolmystyn negizi» atty halykaralyk gylymi- tazhiribelik konferencija enbekteri. – Shymkent, «Alem» baspahanasy, 368. (In Kazakh)*
3. *Eraliev S., Abuova A.E. (2019) Algebralyk tensizdikterdi dəleldeudin kejbir təsilderi [Some ways to prove algebraic inequalities]. «Uly dalanyn zheti kyry – ulttyk bolmystyn negizi» atty halykaralyk gylymi- tazhiribelik konferencija enbekteri. Shymkent, «Alem» baspahanasy, 368. (In Kazakh)*
4. *Serikbaeva V.E.,(2007) Matematikalyk panaralyk bajlanystary [Mathematical interdisciplinary connections]. Oku adistemelik kural. Almaty, 199. (In Kazakh)*
5. *Shalbaev E.B., Қanlybaev Қ.I., Shijapov K.M. (2007) Tensizdikten[Inequalities]]. Almaty, «Globus» baspasy 62 (In Kazakh)*