негізінде оқытудың басты мақсаты да осы, оқушының өз іс әрекетін өзінің жоспарлай алуы. Және осы бағыттағы жұмысына қажетті ақпараттарды жинауы, оларды сұрыптауы, іріктеуі, жүйелеуі, аралық нәтижелерді талдауы, қорытуы, аралық нәтижелерді өз ара байланыстыруы, жұмыстың барлық кезеңінде жетекшімен кері байланыс орнатуы, жұмыстың аралық нәтижелерін және жалпы жұмысты бағалауы, оның болашақтағы даму бағыттарын айқындауы. Сонымен, жоғарыда айтылғандарға сүйене отырып, мынадай тұжырым жасауға болады: жобалау іс-әрекеті дегініміз – белгілі бір жағдайларда педагогикалық процесті жетілдіруге мақсатты түрде бағытталған іс-әрекет. Біз болашақ зерттеулерімізде осы анықтаманы негізге алатын боламыз.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1. *Бахишева С. М.. Педагогикалық жобалау: теориясы мен технологиясы:Оқулық.Алматы: ЖШС РПБК «Дәуір», 2011.-336 бет.*
2. *Каргин С.Т., Өтебаев И.С. Педагогика ғылымындағы «жобалау» ұғымының мәні. Қарағанды университетінің хабаршысы.Педагогика сериясы № 1(57)/2010. Б.4-8.*
3. *Арчер Л. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М.: Наука, 1965.*
4. *Надлер Г. Создание идеальных моделей при проектировании. — М., 1966. – С.*
5. *Котляров И.В. Теоретические основы социального проектирования. – Минск,*
6. *Новиков А. М. Методология образования. − М., 2006.*
7. *Nizwardi Jalinus, Rahmat Azis Nabawi, Aznil Mardin.The Seven Steps of Project Based Learning Model to Enhance Productive Competences of Vocational Students 1st International Conference on Technology and Vocational Teachers (ICTVT 2017)- (2017) – Indonesia.*

МРНТИ 27.39.15
УДК 517.98

А.А. Калыбай[1], *Ж.А. Кеулимжаева*[2]

[1]*Университет КИМЭП, Алматы, Казахстан*

[2]*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Нур-Султан, Казахстан*

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛЕДА ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА С МУЛЬТИВЕСОВЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ОСОБОЙ ТОЧКЕ

Аннотация

При решении дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, особенно, когда коэффициенты вырождаются на границе заданной области, возникают проблемы при постановке граничных задач. Обычно, дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами исследуются в подходящем весовом функциональном пространстве. Часто в роли таких пространств рассматривается весовое пространство Соболева или различные обобщения, которые в настоящее время иселдованы в достаточной степени. Однако, в некоторых случаях, когда коэффициенты рассматриваемого дифференциального уравнения сильно вырождаются, постановка граничных задач становится проблематичным. В данной статье рассматривается, так называемое пространство с мультивесовыми производными, где после каждой производной, функция умнажается на весовую функцию и далее берется следующая производная. Управляя поведением весовых функции на границе, можно исследовать сильно вырождающиеся уравнения. Здесь исследованы вопросы существования следов на границе функции из таких пространств.

Ключевые слова: пространство функции, норма пространства, весовое неравенство, граничное значение функции, локально абсолютно непрерывная функция, существования следа.

Аңдатпа

А.А. Калыбай[1], Ж.А. Кеулимжаева[2]

МУЛЬТИСАЛМАҚТЫ ТУЫНДЫЛЫ КЕҢІСТІГІНДЕГІ ЕРЕКШЕ НҮКТЕДЕ ФУНКЦИЯ ІЗІНІҢ БАР БОЛУ ШАРТТАРЫ

[1] КИМЭП университеті, Алматы, Казахстан
[2]Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

Айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулерді шешуде, әсіресе коэффициенттері берілген облыс шекарасында азғындалатын болса, шектік есептерді қоюда мәселелер туындайды. Әдетте, айнымалы коэфициентті дифференциалдық теңдеулер қолайлы салмақты функционалдық кеңістікте зерттеледі. Осындай кеңістіктер ретінде қазіргі уақытта жеткілікті дәрежеде зерттелген Соболев салмақты кеңістігі және әртүрлі жалпылаулары жиі қарастырылады. Алайда, кейбір жағдайларда, қарастырылып отырған дифференциалдық теңдеудің коэффициенттері күшті азғындалса, шектік есептерді қоюда қиындық туады. Бұл мақалада функцияның әрбір туындысын тапқаннан кейін функция салмақты функцияға көбейтіледі, одан кейін келесі туынды алынатын мультисалмақты туындылы кеңістік қарастырылады. Салмақты функциялардың шекарадағы тәртібін басқара отырып, күшті азғындалған теңдеулерді зерттеуге болады. Бұл мақалада осындай кеңістіктердегі функция шекарасындағы іздерінің бар болу мәселелері зерттеледі.

Түйін сөздер: функциялар кеңістігі, кеңістік нормасы, салмақты теңсіздік, функцияның шекаралық мәні, локалді абсолютті үзіліссіз функция.

Abstract

CONDITIONS OF EXISTENCE THE TRACE OF FUNCTIONS FROM SPACE WITH MULTIWEIGHTED DERIVATIVES IN A SPECIAL POINT

Kalybay A.[1], Keulimzhaeva Zh. [2]
[1]KIMEP University, Almaty, Kazakhstan
[2]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

When solving differential equations with variable coefficients, especially when the coefficients degenerate at the boundary of a given domain, problems arise in the formulation of boundary value problems. Usually, differential equations with variable coefficients are investigated in a suitable weight functional space. Often in the role of such spaces the weight Sobolev space or various generalizations are considered, which are currently sufficiently studied. However, in some cases, when the coefficients of the considered differential equation are strongly degenerate, the formulation of boundary value problems becomes problematic. In this work, we consider the so-called space with multiweighted derivatives, where after each derivative, the function is multiplied by the weight function and then the next derivative is taken. By controlling the behavior of the weight functions on the boundary, strongly degenerate equations can be investigated. Here we investigate the existence of traces on the boundary of a function from such spaces.

Keywords: function space, space norm, weight inequality, boundary value of a function, locally absolutely continuous function.

Пусть $I=(0,1)$, n - натуральное число, $\rho_i : I \to R,\ i=1,2,...,n$ - неотрицательные на I функции такие, что

$$\rho_i,\ \rho_i^{-1} \equiv \frac{1}{\rho_i} \in L_1(\alpha,1), \quad i=1,2,...,n-1, \quad \rho_n^{-1} \in L_{p'}(\alpha,1) \tag{1}$$

для всех α: $0<\alpha<1$ и $p' = \dfrac{p}{p-1}$, $1<p<\infty$.

Для функции $f : I \to R$ положим

$$D_{\bar\rho}^0 f(x) \equiv f(x),\ \ D_{\bar\rho}^k f(x) = \rho_k(x) \frac{d}{dx} D_{\bar\rho}^{k-1} f(x),\ \ k=1,2,...,n, \quad x \in I.$$

Если функции $D_{\bar\rho}^k f(x),\ k=0,1,...,n-1$ локально абсолютно непрерывные на интервале I, то его назовем $\bar\rho$ - мультивесовой производной функции f на I порядка $k,\ 0 \le k \le n-1.$

Пусть $W_{p,\bar\rho}^n \equiv W_{p,\bar\rho}^n(I)$ совокупность функции имеющие $\bar\rho$ - мультивесовые производные до порядка $n,\ n \ge 1$ включительно на интервале I и $\left\| D_{\bar\rho}^n f \right\|_{p,I} < \infty$, где $\|\cdot\|_{p,I}$ -норма пространства $L_p(0,1)$.

Пусть $0 \le k \le n-1.$ Если существует конечные пределы $\lim\limits_{x\to 0^+} D_{\bar\rho}^k f(x) \equiv D_{\bar\rho}^k f(0),\ \ \lim\limits_{x\to 1^-} D_{\bar\rho}^k f(x) \equiv D_{\bar\rho}^k f(1),$ то их назовем следами функции $D_{\bar\rho}^k f(x)$ соответственно в точке $x=0,\ x=1.$

Лемма 1. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда для каждой функции $f \in W^n_{p,\bar{\rho}}$, существуют следы $D^k_{\bar{\rho}} f(1),\ k = 0,1,...,n-1$ и для любого $0 < \alpha < 1$

$$\left\| D^k_{\bar{\rho}} f \right\|_{C[\alpha,1]} < \infty, \quad k = 0,1,...,n-1.$$

Доказательство Леммы 1. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $f \in W^n_{p,\bar{\rho}}$. Тогда в силу (1)

$$\int_\alpha^1 \left| \frac{d}{dx} D^{n-1}_{\bar{\rho}} f(x) \right| dx = \int_\alpha^1 \rho_n^{-1}(x) \left| D^n_{\bar{\rho}} f(x) \right| dx \le \left(\int_\alpha^1 \rho_n^{-p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left\| D^n_{\bar{\rho}} f \right\|_p < \infty .$$

Откуда следует существование $D^{n-1}_{\bar{\rho}} f(1)$ и $\left\| D^{n-1}_{\bar{\rho}} f \right\|_{C[\alpha,1]} < \infty.$

Пусть для $k: n-1 \ge k \ge 1$ существует $D^k_{\bar{\rho}} f(1)$ и $\left\| D^k_{\bar{\rho}} f \right\|_{C[\alpha,1]} < \infty.$

Покажем существование $D^{k-1}_{\bar{\rho}} f(1)$ и $\left\| D^{k-1}_{\bar{\rho}} f \right\|_{C[\alpha,1]}$. Опять в силу (1), имеем

$$\int_\alpha^1 \left| \frac{d}{dx} D^{k-1}_{\bar{\rho}} f(x) \right| dx = \int_\alpha^1 \rho_k^{-1}(x) \left| D^k_{\bar{\rho}} f(x) \right| dx \le \int_\alpha^1 \rho_k^{-1}(x) dx \left\| D^k_{\bar{\rho}} f \right\|_{C[\alpha,1]} < \infty.$$

Следовательно существует $D^{k-1}_{\bar{\rho}} f(1)$ и $\left\| D^{k-1}_{\bar{\rho}} f \right\|_{C[\alpha,1]} < \infty$. Лемма 1 доказана.

В силу леммы 1 в пространстве определен функционал

$$\| f \|_{W^n_{p,\bar{\rho}}} = \left\| D^n_{\bar{\rho}} f \right\|_p + \sum_{i=0}^{n-1} | D^i_{\bar{\rho}} f(1) |, \tag{2}$$

который превращает пространство $W^n_{p,\bar{\rho}}$ в нормируемое пространство.

В случае $\rho_i \equiv 1,\ i = 1,2,...,n-1$ и $\rho_n = \varphi$ пространство $W^n_{p,\bar{\rho}}$ переходит в пространство Л.Д.Кудрявцева [1] $L^n_{p,\bar{\rho}}(I)$ с нормой

$$\| f \|_{L^n_{p,\varphi}} = \left\| \varphi f^{(n)} \right\|_p + \sum_{i=0}^{n-1} | f^{(i)}(1) |.$$

Условие существования конечного значения $\lim\limits_{x \to 0^+} f^{(k)}(x) \equiv f^{(i)}(0),\ 1 \le k \le n$ для функции $f \in L^n_{p,\varphi}(I)$ впервые даны в работе [2], откуда следует, что, если $f^{(k)}(0)$ существует, то существуют $f^{(i)}(0),\quad 0 \le i \le k$.

В случае $\rho_i = t^{\alpha_i}, \alpha_i \in R,\ i = 1,2,...,n$ пространство $W^n_{p,\bar{\rho}}$ и вопросы существования следов $D^k_{\bar{\rho}} f(0),\ 0 \le k \le n$ изучены в работе [3].

Основной целью статьи является нахождения необходимых и достаточных условии существования следа $D^k_{\bar{\rho}} f(0),\quad 0 \le k \le n-1$ для функции $f \in W^n_{p,\bar{\rho}}$. Далее будет видно, в связи с разными поведениями функции ρ_i, $i = 1,2,...,n$ в окрестности точки $x = 0$ условие существования $D^k_{\bar{\rho}} f(0),\ 0 \le k \le n-1$ для функции $f \in W^n_{p,\bar{\rho}}$ сильно отличается, чем для функции $f \in L^n_{p,\varphi}(I)$.

Для $0 < s \le x \le 1$ и для $i, j = 0, 1,..., n-1$ определим функции $K_{j,i+1}$:

$$K_{j,i+1}(x,s) = (-1)^{j-i} \int_s^x \rho_j^{-1}(t_j) \int_s^{t_j} \rho_{j-1}^{-1}(t_{j-1}) ... \int_s^{t_{i+2}} \rho_{i+1}^{-1}(t_{i+1}) dt_{i+1} dt_{i+2} ... dt_j$$

при $j \ge i,\ K_{i,i+1}(x,s) \equiv 1$ и $K_{j,i+1}(x,s) \equiv 0$ при $j < i$.

Рассмотрим вопрос о существовании конечного предела

$$\lim_{x \to 0^+} D^k_{\bar{\rho}} f(x) \equiv D^k_{\bar{\rho}} f(0), \quad 0 \le k \le n-1. \tag{3}$$

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, $0 \le k \le n-1$ и выполнено (1). Тогда для любого $f \in W^n_{p,\bar{\rho}}$ существует конечный предел (3) тогда и только тогда, когда

$$K_{j,k+1}(1,0) < \infty\,, \; j = k+1, k+2, ..., n-1, \tag{4}$$

$$\int_0^1 \rho_n^{-p'}(t)\,|\,K_{n-1,k+1}(t,0)\,|^{p'}\,dt < \infty \tag{5}$$

при этом имеет место оценка

$$\left\| D^k_{\bar{\rho}} f \right\|_{C[0,1]} \le C \left\| f \right\|_{W^n_{p,\bar{\rho}}}, \tag{6}$$

где константа $C > 0$ не зависит от $f \in W^n_{p,\bar{\rho}}$.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Так как $D^n_{\bar{\rho}} K_{j,1}(1,x) \equiv 0$ и $\left\| K_{j,1}(1,\cdot) \right\|_{W^n_{p,\bar{\rho}}} = 1,$ то $K_{j,k+1}(1,x) \in W^n_{p,\bar{\rho}}$, $n-1 \ge j \ge k+1$. Поэтому выполнено (4). Пусть $\forall f \in W^n_{p,\bar{\rho}}$ существует $D^k_{\bar{\rho}} f(0),\; 0 \le k \le n-1,$ но

$$\int_0^1 \rho_n^{-p'}(t)\,|\,K_{n-1,k+1}(t,0)\,|^{p'}\,dt = \infty\,. \tag{7}$$

Тогда на основании теоремы об общем виде линейных непрерывных функционалов на $L_p(I)$ существует функция $0 \le g \in L_p(I)$ такая, что

$$\int_0^1 \rho_n^{-1}(t)\,|\,K_{n-1,k+1}(t,0)\,|\,g(t)dt = +\infty. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(s) = (-1)^{n-1} \int_s^1 g(t) \rho_n^{-1}(t) K_{n-1,1}(t,s)dt,\; s \in I. \tag{9}$$

В силу условия (1) и $g \in L_p(I)$ функция f_0 определена на I. Так как функция $K_{n-1,1}(t,s)$ при любом фиксированном $s \in I$ непрерывна, то на основании (1) и $g \in L_p(I)$ интеграл (9) существует для всех $s \in I$. Из интегрального представления функции f_0 следует, что она абсолютно непрерывна на любом отрезке $[\varepsilon,1], 0 < \varepsilon < 1$.

Беря последовательно операции $D^1_{\bar{\rho}} f_0, D^2_{\bar{\rho}} f_0, ..., D^i_{\bar{\rho}} f_0,$ заключаем, что каждая функция $D^i_{\bar{\rho}} f_0,\; 1 \le i \le n-1$ абсолютно непрерывна на отрезке $[\varepsilon,1], 0 < \varepsilon < 1,$ поэтому существует $D^i_{\bar{\rho}} f_0(s),\; 1 \le i \le n-1$ при всех $s \in I$ и $D^n_{\bar{\rho}} f_0(s)$ при почти всех $s \in I$. При нахождений производных, учитывая, что $K_{j,i+1}(s,s) = 0$ при $j > i$ и $D^i_{\bar{\rho}} K_{n-1,1}(1,s) = K_{n-1,i+1}(t,s),\;\; 0 \le i \le n-1$, имеем

$$D^k_{\rho} f_0(s) = (-1)^{n-1-k} \int_s^1 g(t) \rho_n^{-1}(t) K_{n-1,k+1}(t,s)dt = \int_s^1 g(t) \rho_n^{-1}(t)\,|\,K_{n-1,k+1}(t,s)\,|\,dt,\; s \in I, \tag{10}$$

$$D^n_{\bar{\rho}} f_0(s) = g(s), s \in I. \tag{11}$$

Так как $g \in L_p$, то из (11) следует, что $f_0 \in W^n_{p,\bar{\rho}}$. Тогда, по условию существует $\lim\limits_{s \to 0^+} D^k_{\bar{\rho}} f(s) \equiv D^k_{\bar{\rho}} f(0)$. Но из (10), в силу (8), следует $\lim\limits_{s \to 0^+} D^k_{\bar{\rho}} f(s) = \infty$. Полученное противоречие доказывает необходимую часть теоремы 1.

Достаточность. Пусть выполнено (4) и (5). Пусть $f \in W^n_{p,\bar{\rho}}$ и $0 \le k \le n-1$. В случае $k = n-1$ по определению $K_{n-1,n}(t,s) \equiv 1$ и условие (5) дает $\rho_n^{-1} \in L_{p'}(I)$. Тогда по неравенству Гельдера

$$\int_0^1 \left|\frac{d}{dt} D_{\bar\rho}^{n-1} f(t)\right| dt = \int_0^1 \rho_n^{-1}(t) \left|D_{\bar\rho}^n f(t)\right| dt \le \left\|\rho_n^{-1}\right\|_{p'} \left\|D_{\bar\rho}^n f\right\|_p < \infty,$$

т.е существует конечный предел (3) при $k = n-1$. Из представления

$$D_{\bar\rho}^{n-1} f(x) = -\int_x^1 \rho_n^{-1}(t) D_{\bar\rho}^n f(t) dt + D_{\bar\rho}^{n-1} f(1), \quad x \in I \tag{12}$$

и из условий $\rho_n^{-1} \in L_{p'}(I)$, $f \in W_{p,\bar\rho}^n$ следует

$$\max_{0\le x\le 1}\left|D_{\bar\rho}^{n-1} f(x)\right| \le \left\|\rho_n^{-1}\right\|_{p'} \left\|D_{\bar\rho}^n f\right\|_p + \left|D_{\bar\rho}^{n-1} f(1)\right| \le \max\left\{\left\|\rho_n^{-1}\right\|_{p'}, 1\right\} \|f\|_{W_{p,\bar\rho}^n},$$

т.е. (6) справедлива при $k = n-1$.

Пусть $0 \le k < n-1$. Умножая обе части (12) на $\rho_{n-1}^{-1}(\cdot)$ интегрируем обе части от x до 1, $x \in I$, имеем

$$D_{\bar\rho}^{n-2} f(x) = (-1)\int_x^1 K_{n-1,n-2+1}(t,x)\rho_n^{-1}(t) D_{\bar\rho}^n f(t) dt + K_{n-1,n-2+1}(1,x) D_{\bar\rho}^{n-1} f(1) + D_{\bar\rho}^{n-2} f(1).$$

Умножая обе части этого равентсва на $\rho_{n-2}^{-1}(\cdot)$ и интегрируя обе части от x до 1, $x \in I$, находим $D_{\bar\rho}^{n-3} f(x)$ и продолжая этот процесс до умножения $\rho_i^{-1}(\cdot), 0 < i < n-1,$ имеем

$$D_{\bar\rho}^{i} f(x) = (-1)^{n-i}\int_x^1 K_{n-1,i+1}(t,x)\rho_n^{-1}(t) D_{\bar\rho}^n f(t) dt + \sum_{j=i}^{n-1} K_{j,i+1}(1,x) D_{\bar\rho}^{j} f(1), \quad x \in I. \tag{13}$$

В этом равенстве пологая $i = k+1$ и умножая обе части на $\rho_{k+1}^{-1}(\cdot)$, а затем интегрируя обе части от x до 1, $x \in I$ имеем

$$\int_x^1 \frac{d}{ds} D_{\bar\rho}^{k} f(s) ds = (-1)^{n-k-1}\int_x^1 K_{n-1,k+1}(t,x)\rho_n^{-1}(t) D_{\bar\rho}^n f(t) dt - \sum_{j=k+1}^{n-1} K_{j,k+1}(1,x) D_{\bar\rho}^{j} f(1), \quad x \in I.$$

Откуда, используя неравенство Гельдера, получим

$$\int_x^1 \left|\frac{d}{ds} D_{\bar\rho}^{k} f(s)\right| ds \le \int_x^1 K_{n-1,k+1}(t,0)\rho_n^{-1}(t) D_{\bar\rho}^n f(t) dt + \sum_{j=k+1}^{n-1} |K_{j,k+1}(1,x)|\,|D_{\bar\rho}^{j} f(1)| \le$$

$$\le \left(\int_x^1 K_{n-1,k+1}^{p'}(t,x)\rho_n^{-p'}(t) dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left\|D_{\bar\rho}^n f\right\|_p + \sum_{j=k+1}^{n-1} \left|K_{j,k+1}(1,x)\right| \left|D_{\bar\rho}^{j} f(1)\right|$$

Теперь, устремляя $x \to 0^+$ и на основания (4) и (5), имеем

$$\int_0^1 \left|\frac{d}{ds} D_{\bar\rho}^{k} f(s)\right| ds < \infty, \text{ т.е. существует конечный } D_{\bar\rho}^{k} f(0).$$

Из (13) при $i = k$ применяя неравенство Гельдера получим

$$\max_{0\le t\le 1}\left|D_{\bar\rho}^{k} f(t)\right| \le C\|f\|_{W_{p,\bar\rho}^n},$$

где $C = \max\left\{ \left\|\rho_n^{-1}(\cdot) K_{n-1,k+1}(\cdot,0)\right\|_p, \max\limits_{k\le j\le n-1}\left|K_{j,k+1}(1,0)\right|\right\}$, т.е. неравенство (6) справедливо при $0 \le k < n-1$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если существует конечный предел (3) при $k: 0 \le k < n-1$ для всех $f \in W_{p,\bar\rho}^n$, то по теореме 1 выполнено (4) и (5). Из (4) следует $\rho_{k+1}^{-1} \in L_1(I)$. Однако, из $\rho_{k+1}^{-1} \in L_1(I)$ еще не следует выполнение, даже (4).

Следствие 1. Пусть $1 < p < \infty$ и $0 \le k_1 < k_2 \le n-1$. Если $\rho_i^{-1} \in L_1(I)$ при всех $i = k_1+1, k_1+2, ..., k_2+1$ и существует (3) при $k = k_2$, то существует конечный предел (3) при всех $k: k_1 \le k \le k_2$.