Доказательство следствия 1. Пусть $k_1 \le j \le k_2$. Тогда из условия $\rho_i^{-1} \in L_1(I)$, $k_1+1 \le i \le k_2+1$ имеем $K_{k_2,j+1}(1,0) < \infty$. Из условия существования $D_{\bar{\rho}}^{k_2} f(0)$ следует $\rho_n^{-1}(\cdot)K_{n-1,k_2+1}(\cdot,0) \in L_{p'}(I)$. Так как, $\rho_n^{-1}(t)K_{n-1,j+1}(t,0) \le \rho_n^{-1}(t)K_{n-1,k_2+1}(t,0)K_{k_2,j+1}(1,0)$, то $\rho_n^{-1}(\cdot)K_{n-1,j+1}(\cdot,0) \in L_{p'}(I)$ при всех $j = k_1, k_1+1, ..., k_2$. Тогда по теореме 1 существует конечный предел (3) при $k = k_1, k_1+1, ..., k_2$. Следствие 1 доказано.

Список использованной литературы:

1 Кудрявцев Л. Д., Избранные труды. Том II. Часть первая. Функциональные пространства. Дифференциальные уравнения, Физматлит, М., 2008. - 267 с.

2 Poulsen E. T. Boundary values in function spaces, Math. Scand. – 1962. – V.10, №1 - p. 45–52.

3 Байдельдинов Л.А. Теория многовесовых пространств и ее приложение к краевым задачам для сингулярных дифференциальных уравнений. Докторская диссертация. – Алматы. 1998 -273 с.

МРНТИ 27.39.19
УДК 517.98

А.А. Калыбай[1], А.М. Темирханова[2]

[1] КИМЭП, г. Алматы, Казахстан
[2]Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Нур-Султан, Казахстан

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Аннотация

Задачи решения различных линейных разностных уравнений приводится к изучению свойства матричных операторов в различных функциональных пространствах. Одной из важных задач функционального анализа является установление критерия ограниченности линейных операторов в функциональных пространствах.

Вопрос ограниченности матричных операторов в пространствах последовательностей является классической задачей функционального анализа и в ней много нерешенных проблем. Например, в общем случае по заданной матрице невозможно определить ограниченность матричного оператора в пространствах последовательностей. Поэтому выделяются различные классы матричных операторов, для которых известны критерии их ограниченности. На практике, в связи с разновидностью встречающихся задач, необходимо иметь различные альтернативные критерии ограниченности матричных операторов. В данной работе устанавливается новый альтернативный критерий ограниченности одного класса матричных операторов.

Ключевые слова: ограниченность, матричный оператор, пространство последовательностей, матрица, условие Ойнарова, последовательность

Аңдатпа

А.А. Қалыбай[1], А.М. Темірханова[2]
[1] КИМЭП, Алматы қ., Қазақстан
[2]Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан

ТІЗБЕКТЕРДІҢ САЛМАҚТЫ КЕҢІСТІКТЕРІНДЕ МАТРИЦАЛЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ БІР КЛАССЫНЫҢ ШЕНЕЛІМДІЛІГІ

Әр түрлі сызықты айырымдық теңдеулерді шешу есептері әр түрлі функционалдық кеңістіктерде матрицалық операторлардың қасиеттерін зерттеуге келтіріледі. Функционалдық анализдің негізгі есептерінің бірі ретінде сызықты операторлардың функционалдық кеңістіктердегі шенелімділік критерийлерін орнату есептері болып табылады.

Тізбектер кеңістіктерінде матрицалық операторлардың шенелімділік сұрақтары функционалдық анализдің классикалық есептерінің бірі болып табылады және көптеген шешілмеген есептер бар. Масылы, жалпы жағдайда берілген матрица бойынша оның тізбектер кеңістігінде шенелген болатынын анықтау мүмкін емес. Сондықтан шенелімділік критерийлері белгілі болатын матрицалық операторлар кластарын бөліп қарастырылады. Кездесетін есептердің әр түлі болуына байланысты, практикада матрицалық операторлардың шенелімділігінің әр түрлі альтернативті критерийлері болуы керек. Осы жұмыста матрицалық операторлардың бір классының жаңа альтернативті шенелімділік критерийі орнатылады.

Түйін сөздер: шенелімділік, матрицалық оператор, тізбектер кеңістігі, матрица, Ойнаров шарты, тізбек.

Abstract

BOUNDEDNESS OF ONE CLASS OF THE MATRIX OPERATORS IN WEIGHTED SPACES OF SEQUENCES

Kalybay A.A. [1], Temirkhanova A.M. [2]
[1]KIMEP, Almaty, Kazakhstan
[2]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Problems of solving different linear difference equation is given to study the properties of the matrix operators in various functional spaces. One of the important problems of functional analysis is to establish criteria of boundedness of the linear operators in functional spaces.

Question of the boundedness of matrix operators in sequence spaces is a classic problem of functional analysis and there are many unsolved problems in it. For example, in the general case it is impossible to establish the boundedness of the matrix operator in the spaces of sequences by the given matrix. Therefore, various classes of matrix operators are considered for which the criteria of their boundedness are known. Due to the variety of encountered problems in practice, it is necessary to have various alternative criteria for the boundedness of matrix operators. In this paper, we establish a new alternative criterion for the boundedness of one class of matrix operators.

Keywords: Boundedness, matrix operator, sequence space, matrix, Oinarov's condition, sequence.

1. Введение

Пусть $u=\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ - последовательность неотрицательных, $v=\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$- последовательность положительных действительных чисел. Пусть $A=(a_{ij}), i\in N,\ j\in N,\ i\geq j$- нижняя треугольная матрица с неотрицательными элементами $a_{ij}\geq 0$.

Пусть l_{pv}- пространство последовательности $f=\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ действительных чисел, для которых конечна норма $\|f\|_{p,v}\equiv\|vf\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\leq p<\infty$.

Рассмотрим матричный оператор

$$(Af)_i=\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}f_j,\ i\in N \text{ из } l_{pv} \text{ в } l_{qu}. \tag{1}$$

Относительно элементов матрицы A будем предполагать, что они удовлетворяют дискретному «условию Ойнарова», т.е. существует $d\geq 1$ и

$$\frac{1}{d}\left(a_{i,k}+a_{k,j}\right)\leq a_{i,j}\leq d\left(a_{i,k}+a_{k,j}\right) \tag{2}$$

при $i\geq k\geq j\geq 1$.

Начальная попытка исследования матричного оператора (1) имеется в работе [1], где при некоторых предположениях на элементы матрицы $(a_{i,j})$ даны достаточные условия ограниченности оператора в пространствах l_p. Далее в работах [2, 3] были получены критерии ограниченности и компактности матричного оператора (1), когда элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют условию (2) при различных значениях параметров пространств последовательностей.

В частности, в работе [2] получено следующее утверждение:

Теорема А. Пусть $1<p\leq q<\infty$ и выполнено (2). Тогда оператор A ограничен из l_{pv} в l_{qu} тогда и только тогда, когда $D=\max\{D_1,D_2\}<\infty$, при этом $\|A\|_{p\to q}\approx D$, где $\|A\|_{p\to q}$ норма оператора A из l_{pv} в l_{qu} и

$$D_1=\sup_{i\geq 1}\left(\sum_{n=i}^{\infty}u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$D_2=\sup_{i\geq 1}\left(\sum_{n=i}^{\infty}a_{n,i}^q\,u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{i}v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Однако, при решении различных задач, существующие критерии ограниченности матричных операторов не всегда подходит для исследуемого объекта, и в этом случае приходится использовать альтернативные критерии. Поэтому, целью данной работы является установить новый альтернативный критерий ограниченности матричного оператора (1) из l_{pv} в l_{qu} при $1 < p \le q < \infty$ в предположении условия (2).

Замечание. Далее неравенства вида $M \le \alpha K$, когда значение положительной постоянной α для нашей цели не существенно, будем обозначать $M << K$, а $M \approx K$ будет означать наличие двусторонней оценки $M << K << M$.

2. Основной результат

Пусть

$$B_1 = \sup_{i\ge 1}\left(\sum_{n=i}^{\infty} u_n^q\right)^{-\frac{1}{q'}}\left(\sum_{j=i}^{\infty} v_j^{-p'}\left(\sum_{k=j}^{\infty} a_{k,j} u_k^q\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$B_2 = \sup_{i\ge 1}\left(\sum_{n=i}^{\infty} a_{n,i}^q\, u_n^q\right)^{-\frac{1}{q'}}\left(\sum_{j=i}^{\infty} v_j^{-p'}\left(\sum_{k=j}^{\infty} a_{k,j}^q u_k^q\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$ *и выполнено (2). Тогда оператор A ограничен из* l_{pv} *в* l_{qu} *тогда и только тогда, когда* $B = \max\{B_1, B_2\} < \infty$, *при этом* $\|A\|_{p\to q} \approx B$.

Для доказательства Теоремы 1 мы используем следующую Лемму, доказанную в работе [4]:

Лемма А. *Пусть* $1 < q < \infty$, $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, $u \ge 0$ *и* A*–матричный оператор вида (1) с условием (2). Пусть для* $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{i=1}^{n} a_{n,i} f_i\right)^q < \infty.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{i=1}^{n} a_{n,i} f_i\right)^q \approx \sum_{i=1}^{\infty} f_i \left(\sum_{j=1}^{i} f_j\right)^{q-1} \sum_{n=i}^{\infty} a_{n,i}^q u_n^q +$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty} f_i \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j\right)^{q-1} \sum_{n=i}^{\infty} a_{n,i} u_n^q, \qquad (3)$$

где константы эквивалентности не зависят от f.

Доказательство Теоремы 1. *Необходимость*. Пусть оператор *A* ограничен из l_{pv} в l_{qu}. Тогда сопряженный оператор A^* ограничен из $l_{q'u^{-1}}$ в $l_{p'v^{-1}}$, т.е. выполнено неравенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{-p'}\left(\sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n}\, g_i\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \le \|A\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|u_i^{-1} g_i\right|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}, \qquad (4)$$

где $\|A\|$ - норма оператора A из l_{pv} в l_{qu}.

Из (3) и из ограниченности оператора *A* из l_{pv} в l_{qu} имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^{q-1} \sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n}^q u_i^q \le C \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} f_k\right)^q \le C\|A\|^q \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Следовательно, $\sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n}^q u_i^q < \infty$ для всех $n \in N$.

Из (2) следует, что $a_{i,n} \geq \frac{1}{d} a_{k,n}$ при $i \geq k$. Поэтому $\left(\frac{1}{d} a_{k,n}\right)^q \sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \leq \sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n}^q u_i^q < \infty$, т.е. $\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q < \infty$ для всех $k \geq 1$.

Пусть $k \in N$ и $k > 1$. Положим $g_i = 0, \quad 1 \leq i \leq k-1$ и $g_i = u_i^q, \quad i \geq k$. Тогда из (4) имеем

$$\left(\sum_{n=k}^{\infty} v_n^{-p'} \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n} u_i^q\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|A\| \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Откуда

$$B_1 = \sup_{k \geq 1} \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q\right)^{-\frac{1}{q'}} \left(\sum_{n=k}^{\infty} v_n^{-p'} \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n} u_i^q\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|A\| < \infty \tag{5}$$

Теперь, положим, $g_i = 0, \quad 1 \leq i \leq k-1$ и $g_i = a_{i,k}^{q-1} u_i^q, \quad i \geq k$. Тогда из (4) получим

$$\left(\sum_{n=k}^{\infty} v_n^{-p'} \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n}\, a_{i,k}^{q-1}\, u_i^q\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|A\| \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^q\, u_i^q\right)^{\frac{1}{q'}}$$

или в силу соотношения $a_{i,k} \geq \frac{1}{d} a_{i,n}$ при $k \leq n$, вытекающее из (2), получим

$$\left(\frac{1}{d}\right)^{q-1} \left(\sum_{n=k}^{\infty} v_n^{-p'} \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n}^q\, u_i^q\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|A\| \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^q\, u_i^q\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Откуда

$$B_2 \leq \|A\| d^{\,q-1} < \infty \tag{6}$$

Из (5) и (6) имеем

$$B = \max\{B_1, B_2\} \leq \|A\| d^{\,q-1} \tag{7}$$

Достаточность. Пусть $B < \infty$. Пусть f – финитная неотрицательная последовательность из l_{pv}. Тогда используя неравенство Гёлдера, получим

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^{q-1} \sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n}^q\, u_i^q \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (v_n f_n)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{-p'} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^{p'(q-1)} \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n}^q\, u_i^q\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \\ = J \left(\sum_{n=1}^{\infty} (v_n f_n)^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{gathered} \tag{8}$$

Произведем преобразование Абеля

$$J = \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{-p'} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^{p'(q-1)} \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n}^q\, u_i^q\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} v_j^{-p'} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}^q u_i^q\right)^{p'} \Delta^{-} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^{p'(q-1)}\right)^{\frac{1}{p'}} \tag{9}$$

где $\Delta^{-} F_n = F_n - F_{n-1}$.

Из $B_2 < \infty$ имеем $\sum_{j=n}^{\infty} v_j^{-p'} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}^q\, u_i^q \right)^{p'} \le B_2^{p'} \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n}^q\, u_i^q \right)^{\frac{p'}{q'}}$. Применяя это соотношение к (9) и обозначение $\Delta^+ F_n = F_n - F_{n+1}$, получим

$$J \le B_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n}^q\, u_i^q \right)^{\frac{p'}{q'}} \Delta^- \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right)^{p'(q-1)} \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= B_2 \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s=n}^{\infty} \left(\Delta^+ \sum_{i=s}^{\infty} a_{i,s}^q u_i^q \right) \left(\Delta^- \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right)^{p'(q-1)} \right)^{\frac{q'}{p'}} \right)^{\frac{p'}{q'}} \right)^{\frac{q'}{p'}} \right]^{\frac{1}{q'}} \le$$

(применим неравенство Минковского)

$$\le B_2 \left[\sum_{s=1}^{\infty} \left(\Delta^+ \sum_{i=s}^{\infty} a_{i,s}^q\, u_i^q \right) \left(\sum_{n=1}^{s} \Delta^- \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right)^{p'(q-1)} \right)^{\frac{q'}{p'}} \right]^{\frac{1}{q'}} = B_2 \left[\sum_{s=1}^{\infty} \left(\Delta^+ \sum_{i=s}^{\infty} a_{i,s}^q\, u_i^q \right) \left(\sum_{k=1}^{s} f_k \right)^{q} \right]^{\frac{1}{q'}} \le$$

$$\le B_2 \left[\sum_{s=1}^{\infty} f_s \left(\sum_{k=1}^{s} f_k \right)^{q-1} \sum_{i=s}^{\infty} a_{i,s}^q\, u_i^q \right]^{\frac{1}{q'}} << B_2 \left(\sum_{s=1}^{\infty} u_s^q \left(\sum_{i=1}^{s} a_{s,i}\, f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q'}} \qquad (10)$$

В последнем неравенстве использовано (3).

Из (8) и (10), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right)^{q-1} \sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n}^q u_i^q << B_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (v_n\, f_n)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{s=1}^{\infty} u_s^q \left(\sum_{i=1}^{s} a_{s,i}\, f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q'}}. \qquad (11)$$

Опять применяя неравенство Гёлдера, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\, f_k \right)^{q-1} \sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n} u_i^q \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} (v_n\, f_n)^p \right)^{\frac{1}{p}} \hat{J}, \qquad (12)$$

где $\hat{J} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^{p'} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\, f_k \right)^{p'(q-1)} \left(\sum_{i=n}^{\infty} a_{i,n} u_i^q \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$.

Применим преобразование Абеля

$$\hat{J} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} v_n^{p'} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}\, u_i^q \right)^{p'} \Delta^- \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\, f_k \right)^{p'(q-1)} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Используя соотношение $\sum_{j=n}^{\infty} v_j^{-p'} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} u_i^q \right)^{p'} \le B_1^{p'} \left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i^q \right)^{\frac{p'}{q'}}$, вытекающее из $B_1 < \infty$, имеем

$$\hat{J}=B_1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=n}^{\infty}u_i^q\right)^{\frac{p'}{q'}}\Delta^-\left(\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}\ f_k\right)^{p'(q-1)}\right)^{\frac{1}{p'}}=$$

(далее оцениваем также, как и выше)

$$=B_1\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{s=n}^{\infty}\left(\Delta^+\sum_{i=s}^{\infty}u_i^q\right)\left(\Delta^-\left(\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}f_k\right)^{p'(q-1)}\right)^{\frac{q'}{p'}}\right)^{\frac{p'}{q'}}\right)^{\frac{q'}{p'}}\right]^{\frac{1}{q'}}\le$$

$$\le B_1\left(\sum_{s=1}^{\infty}\left(\Delta^+\sum_{i=s}^{\infty}u_i^q\right)\left(\sum_{n=1}^{s}\Delta^-\left(\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}f_k\right)^{p'(q-1)}\right)^{\frac{q'}{p'}}\right)^{\frac{1}{q'}}=B_1\left(\sum_{s=1}^{\infty}\left(\Delta^+\sum_{i=s}^{\infty}u_i^q\right)\left(\sum_{k=1}^{s}a_{s,k}f_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q'}}=$$

$$=B_1\left(\sum_{s=1}^{\infty}u_s^q\left(\sum_{k=1}^{s}a_{s,k}f_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q'}}. \qquad (13)$$

Из (12) и (13) имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty}f_n\left(\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}f_k\right)^{q-1}\sum_{i=n}^{\infty}a_{i,n}u_i^q\le B_1\left(\sum_{s=1}^{\infty}u_s^q\left(\sum_{k=1}^{s}a_{s,k}f_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(v_nf_n)^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (14)$$

Из (8), (11) и (14) имеем

$$\left(\sum_{s=1}^{\infty}u_s^q\left(\sum_{k=1}^{s}a_{s,k}f_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}<<(B_1+B_2)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(v_kf_k)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

т.е. оператор A ограничен из l_{pv} в l_{qu} и для его нормы $\|A\|$ имеет место оценка

$$\|A\|<<(B_1+B_2)<<\max\{B_1,B_2\}.$$

Это соотношение вместе с (7) дает $\|A\|\approx B$. Теорема доказана.

Список использованной литературы:

1 Andersen K.F., Heinig H.P. Weighted norm inequalities for certain integral operators, SIAM J. Math.14 –1983. –№ 14. –P. 834-844.

2 Ойнаров Р., Шалгинбаева С.Х., Весовая аддитивная оценка одного класса матричных операторов // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. –2004. –№ 1. –С. 39-49.

3 Oinarov R., Okpoti C.A., Persson L.-E.Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case q < p, Math. Inequal. Appl. –2007. –V.10, № 4. –P. 843-861

4 Калыбай А.А., Темирханова А.М., Ключевая лемма в вопросе ограниченности матричного оператора в весовых пространствах // Вестник КазНПУ им. Абая. -2019. –№ 3(67). –С.38-43.