

М.М. Нұрахметова¹, Д.Б. Нұрахметов^{1*}

¹Астана халықаралық университеті, Астана қ., Қазақстан

*e-mail: daulet.nurakhmetov2023@gmail.com

«ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ТЕОРИЯСЫ» ПӘНІНЕН СТУДЕНТТЕРДІҢ ӨЗДІК ЖҰМЫСТАРЫН ҰЙЫМДАСТЫРУ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Бұл жұмыстың басты мақсаты студенттерге жай дифференциалдық тендеулер теориясынан екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті және біртекті емес дифференциалдық тендеулерге қойылған бастапқы есептердің дербес шешімдеріне анализ жасап үйрету. Жұмыста студенттердің оқытушымен өздік жұмысында қарастырылған жаттығулар тізімі берілген. Талқыланған жаттығулар тізімінің шешімі мен анализі келтірілген. Қарастырылған тақырып бойынша студенттердің өздік жұмысына ұсынылған тапсырмалар тізімі ұсынылған. Сондай-ақ, студенттердің тапсырмаларды орындаулары бойынша қорытынды жасалған. Өздік жұмыстарда студенттің белсенділік танытуы білім алушы бойында ғылыми-зерттеу жұмыстарын жүргізуге деген қызығушылығын арттырады. Ғылыми зерттеулерде есептің шешіміне анализ жүргізу мен болашаққа болжам жасай алу жоғары бағаланатын қабілет екендігі белгілі. Білім алушылардың өздік жұмысын орындау барысында алған білімдері мен тәжірибелері олардың кәсіби маман болып қалыптасуына айтарлықтай әсер етеді деп сенеміз.

Түйін сөздер: Дифференциалдық тендеулер, біртекті, біртекті емес, өздік жұмыстар, шешімнің қалпы, дербес шешім, бастапқы есеп, жалпы шешім.

М.М. Нұрахметова¹, Д.Б. Нұрахметов^{1*}

¹Международный университет Астана, г. Астана, Казахстан

ОБ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ПРЕДМЕТУ «ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Аннотация

Основная цель данной работы – научить студентов анализировать частные решения начальных задач для однородных и неоднородных дифференциальных уравнений с постоянным коэффициентом второго порядка теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Работа содержит перечень упражнений, рассматриваемых учащимися в самостоятельной работе с преподавателем. Дано решение и анализ перечня обсуждаемых упражнений. Представлен перечень заданий, предлагаемых для самостоятельной работы студентов по рассматриваемой теме. Также был сделан вывод о выполнении заданий студентами. Активность студента в самостоятельных работах повышает интерес студента к проведению научных исследований. Известно, что умение анализировать решение проблемы и прогнозировать будущее является высоко ценным навыком в научных исследованиях. Мы верим, что знания и опыт, полученные студентами в ходе самостоятельной работы, окажут существенное влияние на их профессиональное развитие.

Ключевые слова: Дифференциальные уравнения, однородные, неоднородные, самостоятельная работа, поведения решений, частное решение, начальная задача, общее решение.

M.M. Nurakhmetova¹, D.B. Nurakhmetov^{1*}

¹ Astana International University, Astana, Kazakhstan

ON ORGANISING INDIVIDUAL WORK OF STUDENTS ON THE SUBJECT "THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS"

Abstract

The main objective of this work is to teach students to analyse particular solutions of initial value problems for homogeneous and inhomogeneous differential equations of the second order with a constant coefficient from the theory of ordinary differential equations. The work contains a list of exercises considered by the

students in independent work with the teacher. A solution and analysis of the list of exercises discussed is given. A list of tasks offered for students' independent work on the topic under consideration is presented. It was also concluded about the performance of the students' assignments. Student's activity in independent works increases student's interest in conducting scientific research. It is known that in scientific research, the ability to analyze the solution of a problem and make predictions about the future is a highly valued skill. We believe that the knowledge and experience gained by students through independent work will have a significant impact on their professional development.

Keywords: Differential equations, homogeneous, inhomogeneous, independent work, behavior of solutions, particular solution, initial problem, general solution.

Негізгі ережелер

Мақала «дифференциалдық теңдеулер теориясы» пәнінен студенттердің өздік жұмыстарын ұйымдастыруға арналған. Қолданылатын негізгі әдіс «зерттеуге негізделген оқыту» болып табылады. Зерттеу барысында білім алушылардың алған білімдерін жетілдіре отырып, жаңа тақырыпты жан-жақты меңгеру жолы ұсынылады. Бұл үшін арнайы әзірлеген жаттығулар мен тапсырмалар тізімі әзірленген. Зерттеу нәтижесінде «БВ01506 Математика» білім беру бағдарламасы бойынша оқитын 3-курс студенттері тұрақты коэффициентті біртекті және біртекті емес екінші ретті дифференциалдық теңдеуге қойылған бастапқы есептің шешіміне анализ жасауды үйренеді. Сондай-ақ, бастапқы есептің шешімінің қалпына дифференциалдық теңдеудің коэффициенттері мен сыртқы күштің әсерінің ерекшелігін және шешімнің қалпын өзгерту үшін бастапқы шарттарға арнайы таңдау жасауға болатындығын практикалық тұрғыдан меңгереді. Практика барысында компьютерлік алгебра жүйесімен танысады.

Кіріспе

Жай дифференциалдық теңдеулер теориясы жаратылыстану бағытындағы болашақ мамандар үшін негізгі пәндердің бірі болып саналады. Мұндағы қарастырылатын сұрақтар білім алушының осы пәнді меңгергенге дейінгі математикалық талдау, аналитикалық геометрия, сызықтық алгебра, физика және информатика сияқты пәндерімен тығыз байланыста дамиды. Пәндегі қарастырылатын негізгі сұрақтарды меңгеру дәріс, практикалық сабақ, студенттің оқытушымен өздік жұмысы және студенттің жеке өздік жұмысы сияқты жұмыс түрлерімен іске асады. Қарастырылатын сұрақтардың негізгі легі бірінші ретті сызықты және сызықты емес теңдеулер және оларға қойылған бастапқы есептің шешімінің бар және жалғыз болуы туралы теорема, тұрақты немесе айнымалы коэффициентті біртекті немесе біртекті емес жоғары ретті жай дифференциалдық теңдеулерге қойылған бастапқы және шекаралық есептер, дифференциалдық теңдеулер жүйесі және бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулермен беріледі [1-7]. Осы тұста білім алушылардың алған білімдерін жүйелеп, кәсіби тұрғыдан маман ретінде қалыптасуы үшін студенттің өздік жұмысының атқаратын рөлі ерекше. Өйткені білім алушы дәрістен алған теориялық білімін, практикалық сабақтан алған тәжірибесі мен оқытушымен өткізген өздік жұмысы барысындағы оқытушы кеңесін өздік жұмыс ретінде ұсынылған есептерді шешуге қолдана алу дағдысын қалыптастыруы қажет. Ал бұл есептердің нақты практикалық қолданысының бар болуының тақырыптың маңыздылығын арттырады. Екінші ретті тұрақты коэффициентті біртекті емес дифференциалдық теңдеулерге қойылған бастапқы есептердің тербелмелі жүйелерді модельдеудегі қолданысы осыған бір жақсы мысал [8].

Біріншіден, жоғары ретті тұрақты коэффициентті біртекті дифференциалдық теңдеулерге қойылған бастапқы есепті шешу біртекті емес дифференциалдық теңдеуге қойылған бастапқы есепті шешуге қолданылады. Сондықтан алдымен біртекті дифференциалдық теңдеуге қойылған бастапқы есепті шығарып үйрену маңызды болып табылады [2-7]. Жоғары ретті дифференциалдық теңдеу екінші ретті болғанда, серіппеге ілінген қосарланған массаның тербелісін сипаттайды [2-4]. Сондықтан екінші ретті дифференциалдық теңдеулерге қойылған бастапқы есептерді қарастыру теориялық және практикалық тұрғыдан да маңызды болып

табылады. Практикалық сабақтарда кеңінен қолданылатын [9, Б. 74-79] жұжыстағы есептердің көпшілігі бастапқы есептің шешімін табумен және бекітілген бастапқы шарттарымен дифференциалдық теңдеудің коэффициенттеріне есептің шешімінің қалпының өзгеруіне қатысты қандай да бір шарт табуға байланысты ұсынылған. Сондай-ақ, басқа ғылым саласымен байланысты пәнаралық есептер кеңінен қамтылған. [4] жұмыста бастапқы есептің шешімін тауып қана қоймай, оған әртүрлі талдау жасау ұсынылған. «Бұндай есептер білім алушының аналитикалық қабілетін дамытып, өткен тақырыпты тереңірек меңгеруіне мүмкіндік береді және зерттеушілік қабілетін оятуға түрткі болады» деп *бірінші болжам* жасаймыз. Осыған байланысты оқытушымен студенттің өздік жұмысын ұйымдастыру барысында «Дискуссия» бөлімде бірнеше жаттығу жан-жақты талқыланып, толықтай шығарылды. Сонымен қатар білім алушыларға өздік жұмысы ретінде ұсынылған есептердің шығарылу үлгісі ұсынылады. Білім алушылардың өздік жұмысын орындауы бойынша жұмыстарына талқылау келтіріледі.

Екіншіден, тұрақты коэффициентті бнртексті және біртекті емес екінші ретті дифференциалдық теңдеуге қойылған бастапқы есептердің шешімінің қалпын зерттеу барсыныда студенттерге әртүрлі ақпараттық және коммуникациялық технологияларға (АКТ) негізделген әдістер таныстырылып, зерттеуге оларды қолдану ұсынылған. Оқытушының студенттермен өздік жұмысында шешімдерді талдауға Maple компьютерлік пакеті қолданылады [10]. Алайда басқа да компьютерлік алгебра жүйелерін немесе АКТ қолдануға шектеу жоқ екендігі студенттерге ескертіліп, Maple calculator, GeoGebra, wolfram alpha немесе desmos графикалық калькуляторын қолдануға ұсыныс берілді. Осы бағытта «студенттер бастапқы есептердің шешімдерінің қалпын толықтай зерттеу үшін АКТ-ға негізделген әдістерді жетік меңгерулері қажет» деген *екінші болжам* жасаймыз.

Зерттеу әдіснамасы

Зерттеу 2024-2025 оқу жылының 1-семестрінде Астана халықаралық университетіндегі педагогикалық институтының «БВ01506 Математика» білім беру бағдарламасы бойынша оқитын 3-курстың 40 студентіне жүргізілді. Зерттеу «зерттеуге негізделген оқыту» әдісіне негізделген. Бұл әдістің дифференциалдық теңдеулер теориясын оқытудағы қолданысы туралы халықаралық басылымдардағы зерттеулерге толықтай шолуды оқырман [11] жұмыстан оқып таныса алады. Зерттеу барысында тұрақты коэффициентті біртекті және біртекті емес екінші ретті дифференциалдық теңдеуге қойылған бастапқы есептің шешімінің қалпын зерттеу тақырыбына арналған өздік жұмысының кейбір өзекті сұрақтары бойынша талдау жасалды.

Зерттеу нәтижелері

Студенттердің өздік тапсырмаларын орындау мерзімі 1 аптаны қамтыды. Жалпы студенттер саны 40, ал тапсырмаларды уақытында орындаған студенттер саны 36 болды. Олардың ішінде 12 ұл, 24 қыз. 60-65 пайыз аралығында баға алған студенттер саны 4, 70-85 пайыз аралығында баға алған студенттер саны 28, 90-95 пайыз аралығында баға алған студенттер саны 4. Білім алушылардың білім деңгейі келесі критерийлерге қатысты бағаланды:

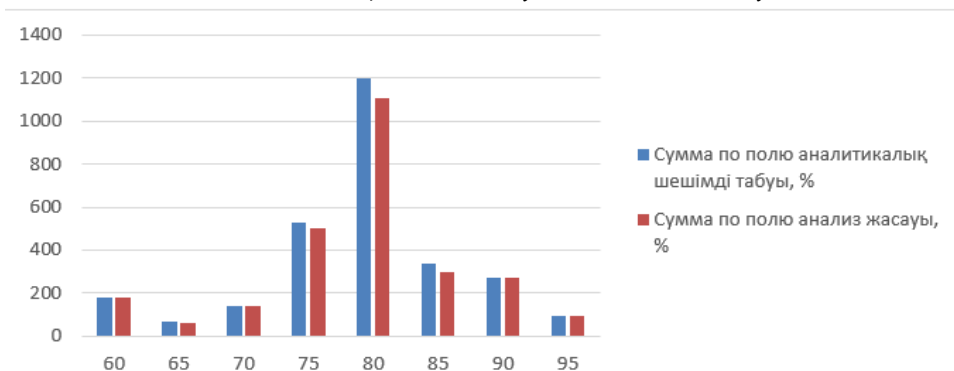
1. Аналитикалық шешімді таба алуы;
2. Анализ жасай алуы.
3. Анализ жасауға және график салуға жаңа технологияларды пайдалана алуы.

Анализ жасау барысында білім алушылар алынған аналитикалық шешімнің негізінде немесе жаңа технологиялардың көмегімен шешімнің қалпын графиктерді пайдаланып зерттеу арқылы жеткен. Енді соларға кеңірек тоқталайық.

Аналитикалық шешім табу мен анализ жасау арасындағы корреляциялық коэффициент 0,83-ті көрсетті. Яғни, бұл критерийлер арасындағы корреляцияның жоғары екенін білдіреді. 1-суреттен көріп отырғанымыздай 60-70 пайыз бен 90-95 пайыз арасында баға алған

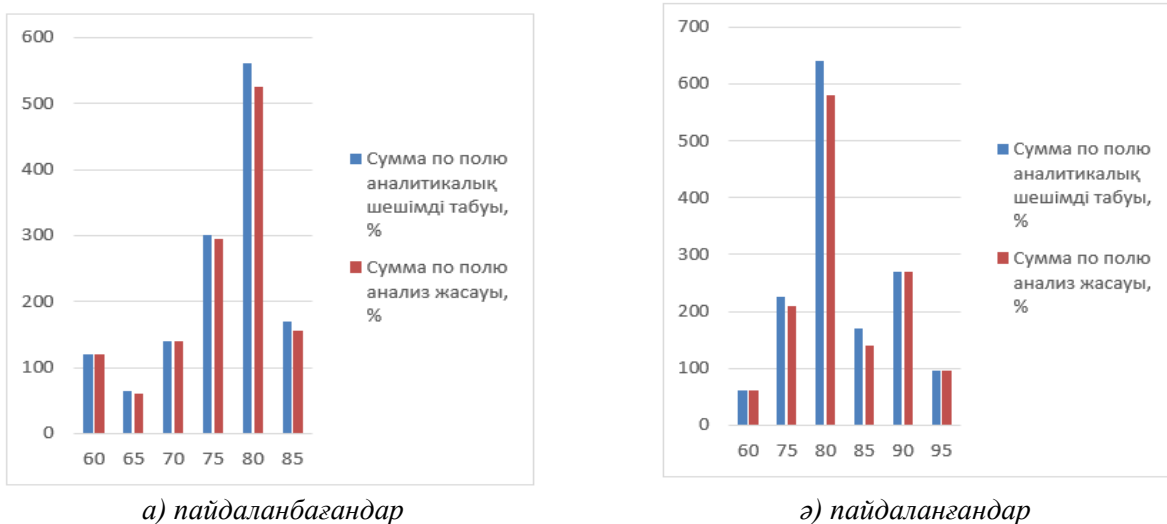
студенттердің арасында аналитикалық шешім табу мен анализ жасау шамалас, ал 75-85 пайыз баға алғандарда аналитикалық шешім табу сәл басымырақ болып келген. Бұдан біздің бірінші болжамымыздың дұрыс екенін байқаймыз. Алынған дербес шешімге анализ жасауда барлық білім алушылар жаңа технологияларды пайдаланбаған. Алайда, пайдаланбаса да, жақсы анализ жасай білген студенттер де бар. Жоғары баға алған студенттердің басым көпшілігі жаңа технологияларды пайдалана отырып, күрделі талдау жүргізе алған, 2-суретті қараңыз. Бұл біздің екінші болжамымыздың дұрыс екенін көрсетеді.

Аналитикалық шешім табу мен анализ жасау



Сурет 1. Аналитикалық шешімді таба алуы

Аналитикалық шешім, анализ, жаңа технология



Сурет 2. Жаңа технологияны қолдану туралы ақпарат

Дискуссия

Бұл бөлімді білім алушылармен студенттердің өздік жұмысына ұсынылған есептерді шығаруға дейінгі оқытушымен жүргізілген өздік жұмысында қарастырылған жаттығулар тізімін келтірумен бастайық. Білім алушылар тұрақты коэффициентті біртекті және біртекті емес жоғары ретті қарапайым дифференциалдық теңдеулерге қойылған бастапқы есепті шешудің екі әдісі бойынша толық дәріс алып, [9, Б. 74-79] есептер жинағы бойынша 2 сағаттық практикалық жұмыс жасап келді. Меңгерген әдістері: анықталмаған коэффициенттер мен тұрақтыны вариациялау. Осыған дейінгі дағдыларын жетілдіру мақсатында келесі жаттығулар тізімі ұсынылып, талқыланды.

1-жаттығу. $0 < t < 10$ аралығында

$$y'' + y' - 6y = 0 \quad (1)$$

теңдеуі мен келесі бастапқы шарттарды

$$y(0) = 5, y'(0) = 0 \quad (2)$$

қанағаттандыратын Коши есебінің дербес шешімін табыңыз. Сондай-ақ, шешімнің қалпын зерттеңіз.

Шешуі. Алдымен (1)-теңдеуге қатысты сипаттамалық теңдеуін жазайық:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0. \quad (3)$$

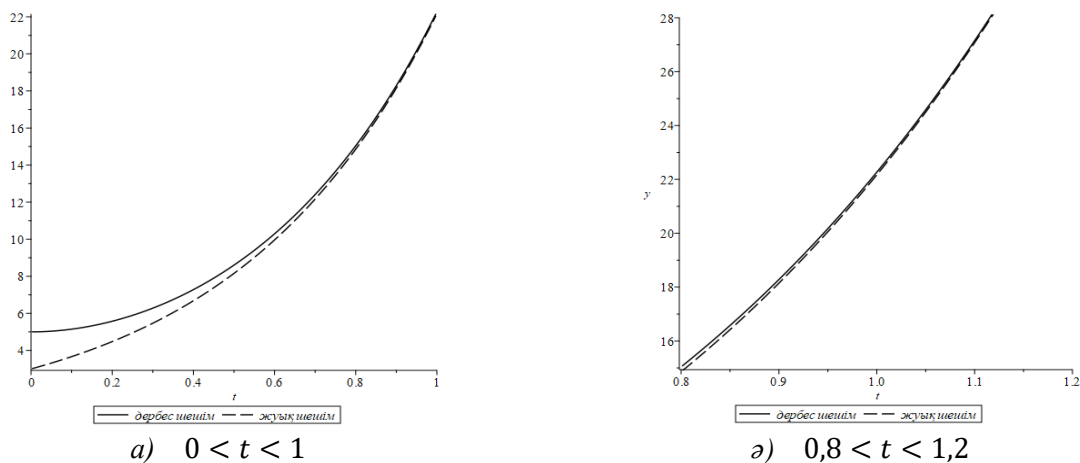
(3)-сипаттамалық теңдеудің түбірлері $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$. Сәйкесінше, (1)-теңдеудің жалпы шешімі

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}. \quad (4)$$

(4)-жалпы шешімде (2)-бастапқы шарттарды ескерсек, (1)-теңдеуге қойылған (2)-бастапқы шартпен Коши есебінің дербес шешімі келесі түрге ие болады

$$y(t) = 2e^{-3t} + 3e^{2t}. \quad (5)$$

Енді шешімнің қалпын зерттеу үшін (5)-формуламен анықталған дербес шешімнің графигін салайық, 3-суретті қараңыз. Алдымен $0 < t < 10$ аралығында $y(t)$ дербес шешімнің қалпын қарастырсақ, онда уақыт өткен сайын бірінші қосылғыштың нөлге ұмтылатынын байқаймыз. Ендеше бұл дербес шешім мен оның жуықтауы болып келетін $y_{ж}(t) \approx 3e^{2t}$ тек екінші қосылғыштан тұратын бөлігі қай уақыттан бастап бір-біріне жуық болатынын зерттейік.



Сурет 3. (5)-дербес шешімнің қалпы

Дербес шешім $y(t)$ мен $y_{ж}(t)$ жуық шешімнің графигін $0 < t < 1$ аралығында салайық, 1 а) суретті қараңыз. Бұл суреттен байқайтынымыз, дербес шешім мен жуық шешім $0 < t < 0,8$ аралығында бір-бірінен алшақ орналасқан, сонымен қатар нөлдің маңайында бастапқы шарттың жуық шешім үшін орындалмай тұрғанын көреміз. Алайда уақыт өткен сайын, жуық шешім мен дербес шешімнің қалпы бірдей бола түсетінін 1, ә) суреттен көреміз. Ол дегеніміз $1,2 < t < 10$ уақыт аралығында дербес шешімнің орнына жуық шешімді алуға болатынын көрсетеді. Ал жуық шешім бізге кейбір есеп-қисаптарды жүргізуге ыңғайлылығымен маңызды. Сондықтан, әрбір бастапқы есепті шығарып, дербес табумен қатар біздер оның

қалпын да қатар зерттей білуіміз керек. Бұндай талдаулар кейбір кезде практикалық тұрғыдан уақыт үнемдеуге мүмкіндік беретінімен құнды болып саналады.

2-жаттығу. $1 < t < 3$ аралығында

$$y'' + 5y' + 4y = 0 \quad (6)$$

теңдеуі мен келесі бастапқы шарттарды

$$y(1) = 1, y'(1) = 1 \quad (7)$$

қанағаттандыратын Коши есебінің дербес шешімін табыңыз. Сондай-ақ, шешімнің максимум мәнін есептеңіз.

Шешуі. Алдымен (6)-теңдеуге

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0. \quad (8)$$

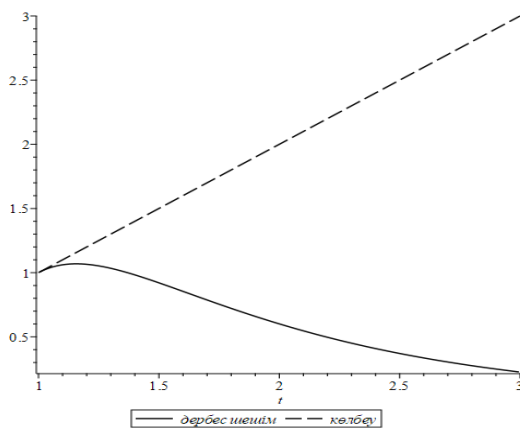
(8)-сипаттамалық теңдеудің түбірлері $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1$. Сәйкесінше, (6)-теңдеудің жалпы шешімі

$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-t}. \quad (9)$$

(9)-жалпы шешімде (7)-бастапқы шарттарды ескерсек, (6)-теңдеуге қойылған (7)-бастапқы шартпен Коши есебінің дербес шешімі келесі түрге ие болады

$$y(t) = -\frac{2}{3} e^{-4(t-1)} + \frac{5}{3} e^{-(t-1)}. \quad (10)$$

Коши есебінің (10)-дербес шешімі бастапқыда артады, себебі оның бастапқы көлбеуі оң екенін (7)-бастапқы шарттың екіншісінен көреміз, яғни $y'(1) = 1$. Алайда уақыт өскен сайын оның нөлге ұмтылатынын байқаймыз, себебі дербес шешімнің екі қосылғышы да теріс экспоненциалды функциялар болып тұр. Сондықтан дербес шешімнің максимум нүктесі болуы керек және 2-суреттегі дербес шешімнің графигі мұны растайды.



Сурет 4. (10)-дербес шешімнің қалпы

4-суретте көлбеудің графигін салу үшін біз берілген Коши есебіндегі бастапқы шарттарды пайдаланамыз, мұнда көлбеудің теңдеуі

$$y_{\text{көлбеу}}(t) = y'(1)(t - 1) + y(1)$$

формуласына сәйкес. Ендеше дербес шешімге сәйкес көлбеу

$$y_{\text{көлбеу}}(t) = t$$

формуласымен анықталады.

Максимум нүктенің координаталарын 2-суреттегі графиктен бағалауға болады, бірақ оларды дәлірек табу үшін шешімге көлденең жанама түзу жүргізілетін нүктені іздейміз. (10)-дербес шешімді t -ға қатысты дифференциалдау арқылы, біз мынаны аламыз:

$$y'(t) = \frac{8}{3}e^{-4(t-1)} - \frac{5}{3}e^{-(t-1)}.$$

y' мәнін нөлге тең етіп, e^{t-1} көбейтсек, t_m кризистік мәні $e^{-3(t-1)} = \frac{5}{8}$ мәнін қанағаттандыратынын көреміз; демек

$$t_m = -\frac{1}{3} \ln \frac{5}{8} + 1 \approx 1,157$$

Сәйкесінше y_m максимум мәні

$$y_m = \frac{8}{3}e^{-4(t_m-1)} - \frac{5}{3}e^{-(t_m-1)} \approx 1,069$$

Сонымен, берілген Коши есебінің дербес шешімінің максимум мәні 1,069-ға тең екенін таптық.

3-жаттығу. $0 < t < 60$ аралығында

$$y'' + a^2y = b \sin \omega x \quad (11)$$

теңдеуі мен келесі бастапқы шарттарды

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad (12)$$

қанағаттандыратын Коши есебінің $\omega \neq a$ болғанда және $\omega = a$ болғанда дербес шешімін тауып, a мен b -ның әртүрлі мәндеріндегі графиктерін салыңыз.

Шешуі. Алдымен (11)-теңдеудің шешімі берілген дифференциалдық теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің

$$y'' + a^2y = 0 \quad (13)$$

жалпы шешімі мен біртекті емес (11)-теңдеудің бір дербес шешімінің қосындысынан тұратынын ескереміз. Ендеше (13)-ші теңдеудің сипаттамалық теңдеуі

$$\lambda^2 + a^2 = 0. \quad (14)$$

(14)-сипаттамалық теңдеудің түбірлері $\lambda_1 = -ai, \lambda_2 = ai$. Сәйкесінше, (13)-теңдеудің жалпы шешімі

$$y_0(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at. \quad (15)$$

Енді (11)-теңдеудің бір дербес шешімін табу қажет. Бұл жерде екі жағдайды қарастырамыз.

1-жағдай. Алдымен $\omega \neq a$ жағдайды қарастырайық. Ол кезде (11)-теңдеудің бір дербес шешімі

$$y_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (16)$$

(16)-функцияны (11)-теңдеуге қойып, $A = 0, B = \frac{b}{a^2 - \omega^2}$ табамыз [2]. Сәйкесінше,

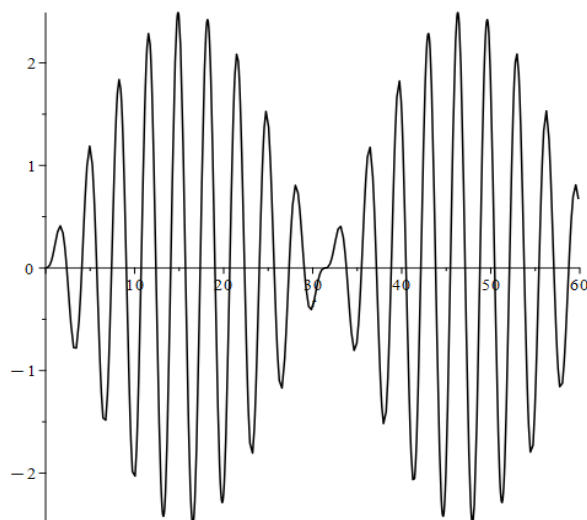
$$y_1(t) = \frac{b}{a^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

(11)-теңдеуінің жалпы шешімі

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at + \frac{b}{a^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (17)$$

(17)-жалпы шешімдегі белгісіз c_1 және c_2 коэффициенттерін табу үшін (12)-бастапқы шарттарды пайдаланмыз. Сонда (11), (12)-бастапқы есептің дербес шешімі келесі түрге ие болады

$$y(t) = -\frac{b\omega \sin at}{a(a^2 - \omega^2)} + \frac{b \sin \omega t}{a^2 - \omega^2}. \quad (18)$$



Сурет 5. (18)-дербес шешімнің қалпы, $a = 2, b = 1, \omega = 1.8$

Енді (18)-дербес шешімді әртүрлі a, b және ω мәндері үшін зерттеуге болады. Айталық, $a = 2, b = 1, \omega = 1.8$ болсын. Бұл кезде дербес шешімнің графигі 5-суретте көрсетілген. Біртекті емес теңдеудің оң жағындағы функция механикалық жүйелерде сыртқы күшті сипаттайды. Егер ол нөлге тең болса, онда механикалық жүйеге ешқандай сыртқы күш әсер етпегенін білдіреді. Бұл кезде оны еркін тербеліс деп атайды, ал оның меншікті дөңгелек жиілігі a -ға тең болады. Ал егер сыртқы күштің жиілігі ω -ға мейілінше жақындайтын болса, онда дербес шешімнің амплитудасы да мейілінше өсетінін көреміз.

2-жағдай. Енді $\omega = a$ жағдайды қарастырайық. Ол кезде (11)-теңдеудің бір дербес шешімі

$$y_1(t) = t(A \cos at + B \sin at). \quad (19)$$

(19)-функцияны (11)-теңдеуге қойып, $A = -\frac{b}{2a}, B = 0$ табамыз [2]. Сәйкесінше,

$$y_1(t) = -\frac{bt}{2a} \cos at.$$

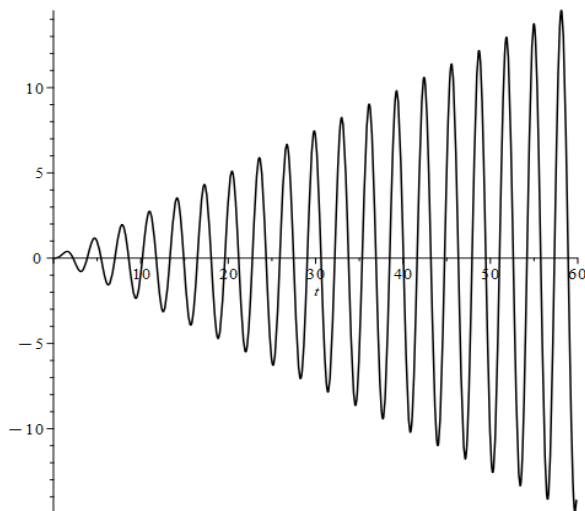
(11)-теңдеуінің жалпы шешімі

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at - \frac{bt}{2a} \cos at. \quad (20)$$

(20)-жалпы шешімдегі белгісіз c_1 және c_2 коэффициенттерін табу үшін (12)-бастапқы шарттарды пайдаланмыз. Сонда (11), (12)-бастапқы есептің дербес шешімі келесі түрге ие болады

$$y(t) = \frac{b \sin at}{2a^2} - \frac{bt \cos at}{2a}. \quad (21)$$

(21)-дербес шешімдегі екінші қосылғыш тербеліс амплитудасы шексіз өсетінін көрсетеді. Бұны ғылымда резонанс құбылысы дейді. Бұл кезде жүйенің тербеліс жиілігі сырттан әсер ететін күштің жиілігімен бірдей болып қалады.



Сурет 6. (21)-дербес шешімнің қалпы, $a = \omega = 1.8$, $b = 1$

Енді (21)-дербес шешімді әртүрлі a, b және ω мәндері үшін зерттеуге болады. Айталық, $b = 1$, $a = \omega = 1.8$ болсын. Бұл кезде (11), (12) Коши есебінің шешімі уақыт өткен сайын шексіз өсетінін 6-суреттен көруге болады.

Төменде студенттердің өздік жұмысына ұсынылған есептер тізімін келтіреміз [4]:

1. $4y'' - 8y' + 3y = 0$, $0 < x < 2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \frac{1}{2}$ бастапқы есебін шеш. $[0; 2]$

аралығында есептің шешімінің ең үлкен мәнін табыңыз.

2. 2.1.-2.3. есептерде берілген Коши есептерінің шешімдерін табыңыз. Графиктерін сызып, t уақыт өткен сайын $y(t)$ шешімінің қалпын сипаттаңыз.

2.1. $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

2.2. $y'' + 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

2.3. $y'' + 8y' - 9y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

3. Берілген $y'' - y = 0$, $y(0) = \frac{5}{4}$, $y'(0) = -\frac{3}{4}$ бастапқы есебін шешіңіз. $0 \leq t \leq 2$ аралығында шешімін сызып, оның минимум мәнін табыңыз.

4. $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = \alpha$, $y'(0) = 2$ бастапқы есебін шешіңіз. $t \rightarrow \infty$ -да шешім нөлге ұмтылатындай α - ны табыңыз.

5. Тербелмелі жүйені сипаттайтын келесі бастапқы есепті қарастырыңыз:

5.1. $u'' + u' = 3\cos\omega t$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$

5.2. $u'' + u' = 3\cos\omega t$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$

а) $\omega \neq 1$ үшін шешімді табыңыз.

б) $\omega = 0,7$; $\omega = 0,8$; $\omega = 0,9$; болғанда $u(t)$ шешімін сызыңыз.

Студенттер өздік жұмысын орындау барысында аналитикалық шешімді табуды үйреніп қана қоймай, оған анализ жасауды меңгерді. Бұл студенттердің математикалық білімін жетілдіру бойынша мақсатына жеткендігімен құнды. Анализ барысында аналитикалық шешімге АКТ-ның әртүрлі әдістерін қолдана білуі білім алушылардың технологияны

қолдана алу құзіреттілігі мен сапалы анализ жүргізу дағдысын арттырды. 1-3-ші топтағы есептермен жақсы шұғылданған студентке 4-есепті шығару аса қиындық туғызбағанын байқадық. Бұл есептің маңыздылығы білім алушыға бастапқы шарттарды өзгерту арқылы бастапқы есептің шешімінің қалпын басқартуды үйрету болды. Бұл нәтижелер кейінгі жылдары жүргізілген зерттеу жұмыстарымен үйлеседі [11]-[13].

Қорытынды

Жұмыста «6B01506 Математика» білім беру бағдарламасы бойынша оқитын 3-курс студенттеріне ұсынылған тұрақты коэффициентті біртекті және біртекті емес екінші ретті дифференциалдық теңдеуге қойылған бастапқы есептің шешімінің қалпын зерттеу тақырыбына арналған өздік жұмысын ұйымдастыру жолы ұсынылған. Өздік жұмысының алдында студенттердің оқытушымен өздік жұмысында қарастыратын жаттығулар тізімі мен талқылауы келтірілген.

Сондай-ақ, екінші ретті тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеулерге қойылған бастапқы есептің тербелмелі жүйені модельдеуде қолданылатын жолы мен анализ жасауы жан-жақты қарастырылған. Студенттердің осындай өздік жұмыстарымен шұғылдануы болашақта олардың ғылыми-зерттеу жұмыстарымен айналысуына негіз болуы да мүмкін.

Алғыс

Зерттеу нәтижелерін талдау барысында пайдалы пікірлер айтып, құнды кеңестерімен бөліскені үшін профессор Джумабаев Серик Асетовичке авторлар алғыс айтады. Екінші автор Maplesoft компаниясына Maple-2024 компьютерлік пакетімен қамтамасыз еткені үшін алғыс білдіреді.

Қаржылық қолдау. Зерттеу жұмысы ешбір қаржылық қолдаудың көмегінсіз орындалды.

Пайдаланылған дереккөздер тізімі

- [1] Жаутыков О.А. Жай дифференциалдық теңдеулер. I бөлім. - Алматы, 1950. – 52б.
- [2] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Леннанд, 2022. – 512 с. <http://urss.ru>
- [3] Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Ленанд, 2023. - 448с. <http://urss.ru>
- [4] Boyce W.E., DiPrima R.C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. 10th Edition. USA 2012 Wiley. – 833 p. <https://www.imsc.res.in/~pralay/diprima.pdf>
- [5] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1964. – 272 с. <https://csc-knu.github.io/de/book/petrovsky-2009.pdf>
- [6] Көлекеев К. Д., Назарова К. Ж. Дифференциалдық теңдеулер: Оқулығы. - Алматы: ЖШС РПБК “Дәуір”, 2012. - 216 б. <https://rmebrk.kz/bilim/kolekeev-differencialdyk.pdf>
- [7] Байарыстанов А.О., Қошанов Б.Д. Дифференциалдық теңдеулер және қатарлар теориясы мен есептері: оқулық. – Алматы, Альманахъ, 2022. – 210 б. <https://almanah-library.kz/>
- [8] Wei, D., Nurakhmetov, D., Aniyarov, A., Zhang, D., Spitas, C. Lumped-parameter model for dynamic monolayer graphene sheets (Article). Vol. 534, No. 117062, 1 – 9. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117062>
- [9] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Изд. 9-е. М.: Ленанд, 2022. – 240 с. <http://urss.ru>
- [10] Hunt, B.R.; Lardy, L.J.; Lipsman, R.L.; Osborn, J.E.; Rosenberg, J.M. Differential Equations with Maple, 3rd ed.; John Wiley & Sons, 235 Inc., 2009; p.264 <https://jp.maplesoft.com/books/details.aspx?id=288>
- [11] Lozada E.; Guerrero-Ortiz C.; Coronel A.; Medina R. (2021) Classroom Methodologies for Teaching and Learning Ordinary Differential Equations: A Systemic Literature Review and Bibliometric Analysis. Mathematics. Vol. 9, No. 7, 745, 1-40 <https://doi.org/10.3390/math9070745>
- [12] Habre S. (2019) Inquiry-oriented differential equations: A guided journey of learning // Teach. Math. Its Appl. Vol. 39, No.3, 201–212 <http://dx.doi.org/10.1093/teamat/hrz015>
- [13] Maat S.M., Zakaria E. (2011) Exploring students' understanding of ordinary differential equations using computer algebraic system (cas). TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Technology. Vol. 10, No. 3, 1-6. <https://eric.ed.gov/?id=EJ944949>

References

- [1] Zhautykov O.A. Zhaj differencialdyq teңdeuler. I bөlim [Ordinary differential equations. Part I] Almaty, 1950. – 52b. (in Kazakh)
- [2] Stepanov V.V. Kurs differencial'nyh uravnenij [Course of differential equations] – M.: Lennand, 2022. – 512 s. <http://urss.ru> (In Russian)
- [3] Fedorjuk M.V. Obyknovennye differencial'nye uravnenija [Ordinary differential equations] – M.: Lenand, 2023. - 448s. <http://urss.ru> (In Russian)
- [4] Boyce W.E., DiPrima R.C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. 10th Edition. USA 2012 Wiley. – 833 p. <https://www.imsc.res.in/~pralay/diprima.pdf>
- [5] Petrovkij I.G. Lekcii po teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Lectures on the theory of ordinary differential equations] – M.: Nauka, 1964. 272 s. <https://csc-knu.github.io/de/book/petrovsky-2009.pdf> (In Russian)
- [6] Kөlekeev K. D., Nazarova K. Zh. Differencialdyq teңdeuler: Oқulyzy [Differential Equations: Textbook] - Almaty: ZhShS RPBK “Dәuir”, 2012. - 216 b. <https://rmebrk.kz/bilim/kolekeev-differencialdyk.pdf> (in Kazakh)
- [7] Bajarystanov A.O., Koshanov B.D. Differencialdyq teңdeuler zhәne қатарlar teorijasy men esepteri: oқulyq [Differential equations and series theory and problems: textbook] – Almaty, Al'manah, 2022. – 210 b. <https://almanah-library.kz/> (in Kazakh)
- [8] Wei D., Nurakhmetov D., Aniyarov A., Zhang D., Spitas C. (2022) Lumped-parameter model for dynamic monolayer graphene sheets. Vol. 534, No. 117062, 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117062>
- [9] Filippov A.F. Sbornik zadach po differencial'nym uravnenijam. Izd. 9-e. [Collection of problems on differential equations] - M.: Lenand, 2022. – 240 s. <http://urss.ru> (In Russian)
- [10] Hunt, B.R.; Lardy, L.J.; Lipsman, R.L.; Osborn, J.E.; Rosenberg, J.M. Differential Equations with Maple, 3rd ed.; John Wiley & Sons, 235 Inc., 2009; p.264 <https://jp.maplesoft.com/books/details.aspx?id=288>
- [11] Lozada E.; Guerrero-Ortiz C.; Coronel A.; Medina R. (2021) Classroom Methodologies for Teaching and Learning Ordinary Differential Equations: A Systemic Literature Review and Bibliometric Analysis. Mathematics. Vol. 9, No. 7, 745, 1-40 <https://doi.org/10.3390/math9070745>
- [12] Habre S. (2019) Inquiry-oriented differential equations: A guided journey of learning // Teach. Math. Its Appl. Vol. 39, No.3, 201–212 <http://dx.doi.org/10.1093/teamat/hrz015>
- [13] Maat S.M., Zakaria E. (2011) Exploring students' understanding of ordinary differential equations using computer algebraic system (cas). TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Technology. Vol. 10, No. 3, 1-6. <https://eric.ed.gov/?id=EJ944949>