ҒТАХР 27.31.17

10.51889/2959-5894.2025.92.4.009

Р.С. Ысмағұл[1*], А.А. Утемисова[1], М.Г. Тастанов[1], Ф.Ф. Майер[1], Б.О. Жумартова[1]

[1]А. Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан
*e-mail: ismagulr@mail.ru

ЭВОЛЮЦИЯЛЫҚ ТЕНДЕУЛЕРДІҢ ДЕРЛІК ПЕРИОДТЫ ШЕШІМІН ҚҰРУ ҮШІН ҚЫСҚАРТУ ӘДІСІН ҚОЛДАНУ

Аңдатпа

Эволюциялық жүйелердің әртүрлі кластары үшін дерлік периодты шешімдердің болуы тербеліс теориясында маңызды мәселе болып табылады. Мысалы, метрикалық кеңістіктегі мәндері бар дерлік периодты шешімдердің болуы туралы мәселе қарапайым дерлік периодты дифференциалдық теңдеулер теориясының шеңберінде қарастырылады. Дерлік периодты, сонымен қатар бір өлшемді және көп өлшемді периодтық тербелістерді зерттеу ерекше үлкен маңызға ие. Механикадағы, физикадағы және техникадағы көптеген мәселелерді қарастырғанда қарапайым және дербес туындылары бар эволюциялық теңдеулердің осындай тербелмелі шешімдерін зерттеуге тура келеді. Қарастырылып отырған жұмыста тәуелсіз айнымалылар арқылы қысқарту әдісін қолдану және негізгі қысқартылған жүйелердің дерлік көппериодты шешімдерінің ауытқуларының тиімді бағасын алу зерттелген. Бірінші ретті эволюциялық теңдеулердің дерлік көппериодты шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы үшін жеткілікті шарттарды құру қарастырылған.

Түйін сөздер: эволюциялық (интегродифференциалдық) теңдеулер, дерлік периодты шешімдер, Грин типті матрица, Липшицтің күшейтілген шарты.

Р.С. Ысмағұл[1], А.А.Утемисова[1], М.Г. Тастанов[1], Ф.Ф. Майер[1], Б.О.Жумартова[1]
[1]Костанайский региональный университет имени А.Байтұрсынұлы, г. Қостанай, Қазақстан

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УКОРОЧЕНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

Существование почти периодических решений для различных классов эволюционных систем является важной проблемой теории колебаний. Например, проблема существования почти периодических решений со значениями в метрическом пространстве рассматривается в рамках теории простых почти периодических дифференциальных уравнений. Особое значение имеет изучение квазипериодических, а также одномерных и многомерных периодических колебаний. При рассмотрении многих задач механики, физики и техники приходится изучать такие периодические решения эволюционных уравнений с простыми и независимыми производными. В рассматриваемой работе исследуется применение метода приведения с помощью независимых переменных и эффективная оценка отклонений многопериодных приближенных решений основных приведенных систем. Обеспечивается создание достаточных условий существования и единственности многопериодных почти решений эволюционных уравнений первого порядка.

Ключевые слова: эволюционные (интегродифференциальные) уравнения, почти периодические решения, матрица типа Грина, усиленное условие Липшица.

R.S.Ysmagul[1], A.A. Utemissova[1], M.G. Tastanov[1], F.F. Mayer[1], B.O. Zhumartova[1]
[1]Kostanay Regional University named after A. Baitursynuli, Kostanay, Kazakhstan

APPLICATION OF THE SHORTENING METHOD TO CONSTRUCTING AN ALMOST PERIODIC SOLUTION OF EVOLUTIONARY EQUATIONS

Abstract

The existence of almost periodic solutions for various classes of evolutionary systems is an important problem in the theory of oscillations. For example, the problem of the existence of almost periodic solutions with values in metric space is considered within the framework of the theory of simple almost periodic differential equations. The study of almost periodic, as well as one-dimensional and multidimensional periodic oscillations is of particular importance. When considering many problems in mechanics, physics, and engineering, it is necessary to study such oscillatory solutions of evolutionary equations with simple and independent derivatives. In the present work, the use of the reduction method by independent variables and obtaining an efficient estimate of the deviations of almost multiperiod solutions of basic reduced systems is studied. The establishment of sufficient conditions for the existence and uniqueness of almost multiperiod solutions of first-order evolutionary equations is considered.

Keywords: evolutionary (integrodifferential) equations, almost periodic solutions, Green type matrix, Lipschitz enhanced condition.

Кіріспе

Негізгі ережелер

Жұмыста тәуелсіз айнымалылар арқылы қысқарту әдісін қолдану негізінде эволюциялық теңдеулердің дерлік көппериодты шешімдерін құру мәселесі қарастырылады. Интегродифференциалдық операторлар мен Грин типті матрицалар үшін жаңа бағалаулар алынып, негізгі және қысқартылған жүйелер шешімдерінің ауытқулары зерттеледі. Бірінші ретті эволюциялық теңдеулер үшін дерлік көппериодты шешімдердің бар болуы мен жалғыздығына жеткілікті шарттар құрылады. Алынған нәтижелер эволюциялық теңдеулердің сапалық теориясын дамытуға үлес қосады.

Бұл жұмыста тәуелсіз айнымалылар арқылы қысқарту әдісін қолдану, негізгі және қысқартылған жүйелердің дерлік көп периодты шешімдерінің ауытқуларының тиімді бағасын алу қарастырылады. Ол үшін интегродифференциалдық оператордың және сызықтық жүйенің матрицантының сипаттамалық функцияларына жаңа бағалауларды дәлелдеу; эволюциялық шешімдерге дерлік көп периодты шешімдердің тұрақтылығын зерттеу теориялық қызығушылық тудырады. Оларды тәуелсіз айнымалылардың есептелетін жиыны бар бірінші ретті дербес дифференциалдық теңдеулердің тербелмелі шектеулі шешімдерін одан әрі зерттеуде қолдануға болады. Бұл нәтижелер математикалық физиканың эволюциялық теңдеулерінің периодты дерлік шешімдерін зерттеуде де пайдалы болады. Дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің қарапайым және дербес туындылары бар осындай шешімдерін зерттеу механикада, физикада және техникада туындайтын көптеген қолданбалы есептермен байланысты. А.М. Самойленко еңбектерінде периодтық коэффициенттері бар сызықтық жүйелердің классикалық теориясы және сызықты емес периодтық жүйелердің жалпы теориясы жасалды. В.И. Арнольд, Е.А. Барбашин, Н.Н. Боголюбов, М.И. Иманалиев, Қ.Г. Валеевтың және т.б. еңбектері дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің периодтық және дерлік периодты шешімдері теориясын және олардың әдістерін (Ляпунов-Пуанкаре әдістері, орташалау әдісі, интегралдық коллекторлар әдісі және т.б.) одан әрі дамытуға және жалпылауға арналған. Д.Ү. Үмбетжанов өз еңбектерінде негізінен әр түрлі шағын параметрлері бар дербес дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің көппериодты және дерлік көппериодты шешімдерін зерттеген. Сонымен қатар сызықты емес сипаттамалық жүйелермен байланысты тәуелсіз айнымалыларға қатысты дифференциалдау операторы бар сызықтық жүйе зерттеледі [1].

Зерттеу әдіснамасы

$$D_\varepsilon^x x = P(t,\varphi)x + \mu Q(t,\varphi,x,\mu) + \mu \int_{-\infty}^{\infty} R\{t_1, t, \varphi, (t_1, \varphi), \mu\} \psi(t - t_1) dt_1 \qquad (1)$$

дербес туындылы интегродифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық [1].

Дифференциалдық оператор

$$D_\varepsilon^x = \frac{\partial}{\partial t} + a(t,\varphi,x,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial \varphi}, \qquad (2)$$

мұндағы

$a\dfrac{\partial}{\partial\varphi}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t,\varphi,x,\varepsilon)\dfrac{\partial}{\varphi_k}$, ал x,Q,M n-өлшемді вектор–бағаналар,

$P(t,\varphi)$ n*n-өлшемді матрица, $\mu>0$ - кіші параметр,

$R=\{x:\|x\|\le\Delta\}\subset R^n$, $R_\varphi=\{\varphi:\|\varphi\|<\infty\}$,

мұндағы

$\|\varphi\|=\sup_k|\varphi_k|,\, t\in R=(-\infty,\infty),\, E_{\varepsilon_1}=\{\varepsilon:=|\varepsilon-\varepsilon_0|\le\varepsilon_1\}$,

$M_{\mu_0}=[0,\mu_0]$, $\Delta,\varepsilon_1,\mu_0$ оң тұрақтылар болсын.

W_m,V_m операторлары $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...\varphi_m...)$ векторына төмендегідей сәйкестік орнатады:

$$W_m\varphi=(\varphi_1...\varphi_m,0,...),\; V_m\varphi=(0,...,0,\varphi_{m+1}\varphi_{m+2}...).$$

Сонда W_m+V_m - тепе-тең оператор болатыны белгілі.

π-функциясы туралы түсінік енгізейік.

$R\times R_\varphi$ облысында жататын n-өлшемді $x(t,\varphi)=\{x_1(t,\varphi),...x_n(t,\varphi)\}$ вектор – функциясы π-функциясы деп аталады, егер ол:

1) t,φ айнымалылары бойынша үзіліссіз,

2) норма бойынша шектелген, яғни $\|x(t,\varphi)\|\le p$, мұндағы $p>0$ - тұрақты шама,

3) φ бойынша Липшицтің күшейтілген шартын:

$$\|x(t,W_m\phi+V_m\bar{\phi})-x(t,W_m\phi+V_m\phi)\|\le d_m\|V_m(\bar{\phi}-\phi)\|,$$

мұндағы $d>0$, $m\to\infty$ қанағаттандырса,

4) φ векторының координаттары бойынша шектелген және бірқалыпты үзіліссіз 1-ретті дербес туындылары бар болса.

Бұндай функциялардың класын $\pi\;(p,d_m)$ арқылы белгілеп, $x(t,\varphi)\in\pi\;(p,d_m)$ түрінде жазамыз.

π - функциясының кейбір қасиеттерін атап өтелік:

$q_0,q_1,q_2,...$ - монотонды түрде нольге ұмтылатын оң сандық тізбек.

а) φ векторының координаталарына қатысты бірінші ретті шектелген және үздіксіз жеке туындылары бар.

1. π - функция $x(t,\varphi)$ салыстырмалы түрде қарапайым Липшиц шартын q_0- тұрақтысымен қанағаттандырады, яғни $\|x(t,\bar{\phi})-x(t,\phi)\|\le q_0\|\bar{\phi}-\phi\|$,

2. π - функция t,φ айнымалылар жиынында үздіксіз,

3. π - функцияның $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\dfrac{\partial x(t,\phi)}{\partial\phi_k}\right\|$ қатары бірқалыпты жинақталады және $\sum_{k=m+1}^{\infty}\left\|\dfrac{\partial x(t,\phi)}{\partial\phi_k}\right\|\le q_m$

Бұл қасиеттердің дәлелдеулері Д.Ү.Үмбетжановтың [1] еңбектерінде қарастырылған.

Осындай π - функциялар класын $\pi(p,q_m)$ арқылы белгілейміз.

Сонымен, (N_∞) және (S_∞) шарттары орындалсын деп есептейміз [2].

Осы шарттар орындалғанда мына теңсіздіктер орын алады:

$$\|a(t,\varphi,0,\varepsilon)\|\le a_0,\; \|P(t,\varphi)\|<P_0,\; \|Q(t,\varphi,0,\mu)\|\le Q_0,\; \|R(t_1t,\varphi,0,\mu)\|\le R_0,$$

$$\|a(t,w_m\varphi+v_m,\bar{\varphi},\bar{x},\varepsilon)-a(t,w_m\varphi+v_m,\varphi,x,\varepsilon)\|\le a_m\|v_m(\bar{\varphi}-\varphi)\|+\alpha\|\bar{x}-x\|,$$

$$\left\| P(t, w_m\varphi + v_m\overline{\varphi}) - P(t, W_m\varphi + v_m\varphi) \right\| \le \theta_m \left\| v_m(\overline{\varphi} - \varphi) \right\|,$$

$$\left\| Q(t, w_m\varphi + v_m, \overline{\varphi}, \overline{x}, \mu) - Q(t, w_m\varphi + v_m\varphi, x, \mu) \right\| \le \delta \left\| v_m(\overline{\varphi} - \varphi) \right\| + \delta \left\| \overline{x} - x \right\|,$$

$$\left\| R(t_1, t, w_m\varphi + v_m, \overline{\varphi}, \overline{x}, \mu) - R(t_1, t, w_m\varphi + v_m\varphi, x, \mu) \right\| \le x_m \left\| v_m(\overline{\varphi} - \varphi) \right\| + x \left\| \overline{x} - x \right\|,$$

мұндағы оң тұрақтылар $\alpha_m, \theta_m, \delta_m, x_m$ - Липшицтің күшейтілген шартының коэффициенттері және $m \to \infty$ болғанда нольге монотонды жинақталады.

φ аргументіне байланысты:

$x \in R,\ \varepsilon \in E_{\varepsilon_1},\ \mu \in M_{\mu_0}$, бойынша $\overline{a_0} = \alpha\Delta + a_0$, $\overline{Q_0} = \delta\Delta + Q_0$, $\overline{R_0} = x\Delta + R_0$.

Олай болса, $a(t,\varphi,x,\varepsilon) \in \pi(\overline{a_0}, \alpha_m)$, $P(t,\varphi) \in \pi(P_0, \theta_m)$, $Q(t,\varphi,x,\mu) \in \pi(\overline{Q_0}, \delta_m)$, $R(t_1,t,\varphi,x,\mu) \in \pi(\overline{R_0}, x_m)$.

Сонымен қатар, $a(t,\varphi,x,\varepsilon)$ векторлық функциясының $\varepsilon \in E_{\varepsilon_1}$ салыстырмалы үзіліссіздігінен шығатыны, әрбір $\beta > 0$ үшін $0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1$ табылып, $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \varepsilon_2$ болғанда $\| a(t,\varphi,x,\varepsilon) - a(t,\varphi,x,\varepsilon_0) \| \le \beta$ теңсіздігі орындалады.

(2) қатынастарынан $m = 0$ болғанда φ, x координаталар бойынша әдеттегі Липшиц шарттарын аламыз

$H_n(\Delta, \delta_m)$ класы $\| f(t,\varphi) \| \le \Delta$, $\| f(t, w_m\varphi + v_m, \overline{\varphi}) - f(t, w_m\varphi + v_m\varphi) \| \le \delta_m \| v_m(\overline{\varphi} - \varphi) \|$ шарттарын қанағаттандыратын $f(t,\varphi)$ n-өлшемді π - функциялар класы болсын.

Сонымен қатар, $a(t,\varphi,x,\varepsilon)$ вектор-функциясының $\varepsilon \in E_{\varepsilon_1}$-ге қатысты үзіліссіздігінен әрбір $\beta > 0$ үшін $0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1$ табылады және $|\varepsilon - \varepsilon_0| < \varepsilon_2$ болғанда мына теңсіздік $\| a(t,\varphi,x,\varepsilon) - a(t,\varphi,x,\varepsilon_0) \| \le \beta$ шығады.

Бұдан біз, $m = 0$ болғанда (2) қатынастан φ, x координаттары бойынша Липшицтің кәдімгі шарты алынатынын көреміз.

Енді $H_n(\Delta, \delta_m)$ - ды $\| f(t,\varphi) \| \le \Delta$, $\| f(t, w_m\varphi + v_m, \overline{\varphi}) - f(t, w_m\varphi + v_m\varphi) \| \le \delta_m \| v_m(\overline{\varphi} - \varphi) \|$ шартын қанағаттандыратын $f(t,\varphi)$. n-өлшемді π - функциялар класы болсын делік және оны t, φ бойынша $m \to \infty$ болғанда η - дерлік периодты вектормен бірге дерлік көппериодты функциялар класы деп есептейік.

Кейбір $f(t,\varphi) \in H_n(\Delta, \delta_m)$ функциялар үшін мына теңдеуді

$$\frac{d\varphi}{dt} = a\left[t, \varphi, f(t,\varphi), \varepsilon\right] \tag{3}$$

қарастырайық.

Әрі қарай жазуды қысқарту үшін мынадай белгілеу енгіземіз $r(t,\varphi,\varepsilon) = a(t,\varphi, f(t,\varphi), \varepsilon)$.

Сонда $r(t,\varphi,\varepsilon)$ вектор-функциясы үшін $r_m = \alpha_m + \alpha\delta_m$ белгілеуі Липшиц шартының күшейтілген шартының коэффициенті болады.

(N_∞) шарттары (3) теңдеудің Коши есебінің шешімінің бар болуы мен жалғыздығын салыстырмалы түрде қамтамасыз етеді. $(t_0, \varphi_0) \in R \times R_\varphi$ нүктесі арқылы өтетін (3) теңдеудің шешімін $\varphi = \lambda_f(t, t_0, \varphi_0, \varepsilon)$ арқылы белгілейік. (3) теңдеуді φ_0-ге қатысты шешіп және t_0 -ді $S \in R$-ге ауыстыра отырып,

$$\lambda_f(t, t_0, \varphi_0, \varepsilon) = \varphi + \int_t^S r\left[s_1, \lambda_f(s_1, t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon\right] ds_1 \tag{4}$$

түріндегі интегралды кескінді қабылдайтын сипаттамалық $\lambda(s, t, \varphi, \varepsilon)$ векторлық функцияны аламыз.

Лемма I. $s \in R, t \in R, \varphi \in R_\varphi, \varepsilon \in E_{\varepsilon_1}$ болғанда сипаттамалық $\lambda(s, t, \varphi, \varepsilon)$ векторлық- функция үшін төмендегі бағалаулар дұрыс болады [3]:

I a) $\left\|\lambda_f(s, t, w_m\varphi + v_m\overline{\varphi}, \varepsilon) - \lambda_f(s, t, w_m\varphi + v_m\varphi, \varepsilon)\right\| \le \left[1 + \frac{2r_m}{r_0}\left(e^{2r_0|t-s|} - 1\right)\right]\left\|v_m(\overline{\varphi} - \varphi)\right\|$;

I b) $\left\|\lambda_f(s + r, t + r, \varphi + \upsilon, \varepsilon) - \lambda_f(s, t, \varphi, \varepsilon) - \upsilon\right\| \le \frac{\left\|\Delta_{\tau,\upsilon} r\right\|}{r_0}\left(e^{r_0|t-s|}\right) - 1)$;

I c) $\left\|\lambda_f(s, t, \varphi, \varepsilon) - \lambda_q(s, t, \varphi, \varepsilon)\right\| \le \frac{\alpha\left\|f - g\right\|_H}{r_0}\left(e^{r_0|t-s|}\right) - 1)$;

I d) $\left\|\lambda_f(s, t, \varphi, \varepsilon) - \lambda_f(s, t, \varphi, \varepsilon_0)\right\| \le \frac{\beta}{r_0}\left(e^{r_0|t-s|}\right) - 1), \left|\varepsilon - \varepsilon_0\right| < \varepsilon_2$.

Зерттеу нәтижелері

Дәлелдеу. I a) $\overline{\lambda} = \lambda(s, t, W_m\phi + V_m\overline{\phi}, \varepsilon), \lambda = \lambda(s, t, W_m\phi + V_m\phi, \varepsilon)$ болсын.

Егер $\overline{\lambda} = W_m\overline{\lambda} + V_m\overline{\lambda}, \overline{\lambda} = W_m\lambda + V_m\lambda$ деп алсақ, сонда $\left\|\overline{\lambda} - \lambda\right\| \le \left\|W_m(\overline{\lambda} - \lambda)\right\| + \left\|V_m(\overline{\lambda} - \lambda)\right\|$ және $\overline{U_m}\left\|W_m(\overline{\lambda} - \lambda)\right\|$, $U_m = \left\|V_m(\overline{\lambda} - \lambda)\right\|$ болады.

(4) өрнекті пайдаланып, мына бағалауға келеміз:

$$\left\|W_m(\overline{\lambda} - \lambda)\right\| \le \left|\int_r^S \left\|r(s_1, \overline{\lambda}, \varepsilon) - r(s_1, \lambda, \varepsilon)\right\| ds_1\right| \le \left|\int_r^S \left\{r_m\left\|V_m(\overline{\lambda} - \lambda)\right\| + r_0\left\|W_m(\overline{\lambda} - \lambda)\right\|\right\} ds_1\right|;$$

$$\left\|V_m(\overline{\lambda} - \lambda)\right\| \le \left\|V_m(\overline{\varphi} - \varphi)\right\| + \left|\int_r^S \left\|r(s_1, \overline{\lambda}, \varepsilon) - r(s_1, \lambda, \varepsilon)\right\| ds_1\right| \le$$

$$\le \left\|V_m(\overline{\varphi} - \varphi)\right\| + \left|\int_r^S \left\{r_m\left\|V_m(\overline{\lambda} - \lambda)\right\| + r_0\left\|W_m(\overline{\lambda} - \lambda)\right\|\right\} ds_1\right|$$

$$\overline{U_m} \le \left|\int_t^S \left(r_m U_m + r_0\overline{U_m}\right) ds_1\right|, \quad \overline{U_m} \le \left|\int_t^S \left(r_m U_m + r_0\overline{U_m}\right) ds_1\right| + \left\|V_m(\overline{\varphi} - \varphi)\right\|.$$

$\overline{U_m}$ -ды r_0 -ға, ал U_m -ды r_m- ға көбейтсек және олады қосатын болсақ, мына теңсіздік шығады $r_0\overline{U_m} + r_m U_m \le r_m\left\|V_m(\overline{\varphi} - \varphi)\right\| + (r_0 + r_m)\left|\int_t^S \left(r_m U_m + r_0\overline{U_m}\right) ds_1\right|$.

Беллман-Гронуолл леммасы эволюциялық теңдеулер теориясында кеңінен қолданылады [4,5].

$$r_0\overline{U_m} + r_m U_m \le r_m\left\|V_m(\overline{\varphi} - \varphi)\right\| e^{(r_0 + r_m)|t-s|}. \tag{5}$$

$\overline{U_m}$ және U_m-дің бағалаулары үшін мына теңсіздікті қарастырамыз

$$U_m - \overline{U_m} \le \left\| V_m(\overline{\varphi} - \varphi) \right\| + \left| \int_t^S \left(r_m U_m + r_0 \overline{U_m} \right) - \left(r_m U_m + r_0 \overline{U_m} \right) ds_1 \right| .$$

Сонда $U_m = \overline{U_m} + \left\| V_m(\overline{\varphi} - \varphi) \right\|$.

Сонымен, (5) теңсіздіктен шығатыны $r_0 \overline{U_m} + r_m \left(U_m + \left\| V_m(\overline{\varphi} - \varphi) \right\| \right) \le r_m \left\| V_m(\overline{\varphi} - \varphi) \right\| e^{(r_0 + r_m)|t-s|}$

Бұдан $\overline{U_m} = \dfrac{r_m \left\| V_m(\overline{\varphi} - \varphi) \right\|}{r_0 + r_m} \left(e^{(r_0 + r_m)|t-s|} \right)$. $U_m = \left\| V_m(\overline{\varphi} - \varphi) \right\| + \dfrac{r_m \left\| V_m(\overline{\varphi} - \varphi) \right\|}{r_0 + r_m} \left(e^{(r_0 + r_m)|t-s|} \right)$.

Оң бөліктерді күшейте отырып мына теңсіздіктерді аламыз

$$\overline{U_m} \le \frac{r_m}{r_0} \left(e^{2r_0|t-s|} \right) \left\| V_m(\overline{\varphi} - \varphi) \right\|, \; U_m \le \left(1 + \frac{r_m}{r_0} \right) \left(e^{2r_0|t-s|} \right) \left\| V_m(\overline{\varphi} - \varphi) \right\| .$$

Сонымен біз $\left\| W_m(\overline{\lambda} - \lambda) \right\|$ және $\left\| V_m(\overline{\lambda} - \lambda) \right\|$ бағалауларын дәлелдедік.

Біз қарастыратын сызықталған жүйе

$$D_\varepsilon^f x = P(t, \varphi) x \tag{6}$$

$H_n(\Delta, \delta_m)$ класында сынықты емес болсын [6-8].

Олай болса, (6) жүйе үшін Грин типтегі матрица $X_f^*(t_0, t, \varphi, \varepsilon)$ құрылуы мүмкін, және ол $t \ne t_0$ болғанда $\left\| X_f^*(t_0, t, \varphi, \varepsilon) \right\| \le B e^{-\gamma|t - t_0|}$ шартын қанағаттандырады.

Сонымен қатар, $X_f^*(t-0, t, \varphi, \varepsilon) - X_f^*(t+0, t, \varphi, \varepsilon) = E$ мұндағы $B \ge 1, \gamma > 0$- кейбір тұрақтылар және E- $n \times n$ өлшемді матрица.

$r_0 \le \dfrac{\gamma}{2B}$ немесе $r\alpha_0 \le 1$ болғанда, Грин типтегі матрицаның дербес туындылары мына шартты қанағаттандырады:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial X_f^*}{\partial \varphi_k} \right\| \equiv \left\| \frac{\partial X_f^*}{\partial \varphi} \right\| \le B^* e^{-\frac{\gamma}{2}|t - t_0|}, \; \forall t \ne t_0 .$$

Енді

$$Dx = P(t, \phi) x + \mu Q \left\{ t, \phi, x, \int_{-\infty}^{\infty} M\left[t', t, \varphi, x(t', \varphi) \right] \psi(t - t') dt', \mu \right\} \tag{7}$$

түрінде берілген интегродифференциалды теңдеулер жүйесін қарастырайық,
мұндағы

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left\{ t, \varphi, x, \int_{-\infty}^{\infty} N\left[t', t, \varphi, x(t', \varphi) \right] \omega(t - t') dt', \mu \right\} \frac{\partial}{\partial \varphi_k}$$

– дифференциалдық оператор, ал x, Q, M, n - вектор-бағаналар.

Белгілеулер енгіземіз:

$$U(x)=\int_{-\infty}^{\infty}N[t',t,\varphi,x(t',\varphi)]\omega(t-t')dt'\in R_{\Delta 1}=\{u:\|u\|\le\Delta 1\}\subset R^{q},$$
$$V(x)=\int_{-\infty}^{\infty}M[t',t,\varphi,x(t',\varphi)]\psi(t-t')dt'\in R_{\Delta 2}=\{v_0:\|v\|\le\Delta 2\}\subset R^{n}$$

Сонда (7) жүйе мына түрге келеді:

$$Dx=\frac{\partial x}{\partial t}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\{t,\varphi,x,u,\mu\}\frac{\partial}{\partial\varphi_k}=P(t,\varphi)x+\mu Q\{t,\varphi,x,v,\mu)\}.$$

(7) жүйенің дерлік көппериодты жалғыз шешімінің бар болуын дәлелдеу үшін (π_1^{∞}), (π_2^{∞}), (π_3^{∞}) шарттарының орындалуын қарастырамыз [9-11].

Сонымен (1) жүйеден алынған φ бойынша қысқартылған мына жүйені қарастырсақ:

$$D_m y=P(t,W_m\varphi)y+\mu Q(t,W_m\varphi,y,\mu)+\mu\int_{-\infty}^{\infty}M[t',t,W_m\varphi,y]\psi(t-t')dt' \tag{8}$$

Теорема. Кез келген m үшін сынықты болмайтын $D_m^f y=P(t,W_m\varphi)y$ қысқартылған жүйе берілсін және a,P,Q,M шамалары үшін (π_1^{∞}), (π_2^{∞}), (π_3^{∞}) шарттары орындалсын. Сонда $\alpha_0 l\le 1$, $0<\mu<\overline{\mu}$ болған жағдайда (1), (8) жүйелердің әрқайсысының жалғыз дерлік көппериодты шешімі бар болады, әрі көппериодты $x^*(t,\varphi)$ шешімі φ бойынша қысқарту әдісі арқылы табылуы мүмкін, яғни

$$\lim_{m\to\infty}y^*(t,W_m\varphi)=x^*(t,\varphi)$$

өрнегі норма бойынша жинақталады, мұндағы $y^*(t,W_m\varphi)$ - (8) жүйенің дерлік көппериодты шешімі.

Дискуссия

Алынған нәтижелер дерлік периодты және көппериодты шешімдер теориясы бойынша бұрын белгілі классикалық нәтижелермен үйлеседі. Атап айтқанда, бұл жұмыста алынған бағалаулар мен жеткілікті шарттар Д.Ү. Үмбетжанов еңбектерінде дамытылған әдістерді интегродифференциалдық эволюциялық теңдеулердің кеңірек класына жалпылауға мүмкіндік береді.

Қысқарту әдісін қолдану негізгі жүйенің шешімдерін қысқартылған жүйенің дерлік көппериодты шешімдері арқылы бірқалыпты жуықтауға болатынын көрсетеді. Бұл тәсіл зерттелетін теңдеулердің сапалық қасиеттерін талдауда тиімді құрал болып табылады.

Алдағы зерттеулер сызықты емес эволюциялық теңдеулерге, айнымалы коэффициенттері бар жүйелерге, сондай-ақ қолданбалы есептерде кездесетін модельдерге қысқарту әдісін қолдануға бағытталуы мүмкін.

Қорытынды

Жұмыста келесі нәтижелер алынды: интегралды дифференциалдық оператордың және сызықталған жүйенің матрицантының сипаттамалық функциясы үшін жаңа бағалар дәлелденді; интегралды теңдеулердің тәуелсіз айнымалыларының есептелетін жиынтығынан көп периодты шешімдердің болуы мен бірегейлігінің жеткілікті шарттары алынды. Мұнда орталық шарттардың бірі – К.П. Персидский алғаш рет қолданған Липшицтің күшейтілген шарты; негізгі жүйенің шешімі тәуелсіз айнымалылар бойынша қысқартылған жүйенің көп периодты шешімімен бірқалыпты жуықталуы мүмкін екендігі көрсетілген. Сонымен қатар, қысқарту әдісінің қолданылуы эволюциялық теңдеулердің дерлік көппериодты шешімдерін құрудың тиімді тәсілі екенін көрсетті. Алынған нәтижелер математикалық физикада, динамикалық жүйелер теориясында және қолданбалы модельдерде пайдаланылуы мүмкін. Бұл бағыттағы зерттеулерді одан әрі жалғастыру маңызды болып табылады.

Пайдаланылған дереккөздер тізімі

[1] Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных // Алма-Ата, Наука – 1979.- 273с.

[2] Ысмагул Р.С., Гинолла Т. Решение одной счётной системы почти многопериодических уравнений методом укорочения // Журнал «Математическое и программное обеспечения систем», Магнитогорск, 2018, Т.6, №2, с.19-23.

[3] Исмагулова Р.С. О применении метода укорочения к построению почти многопериодического решения одной системы интегродифференциальных уравнений частных производных //Алма-Ата. - 1987.- 25 с. Деп. в ВИНИТИ 3.07.87. №5474-В.87 Деп.

[4] Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных уравнений // Алма-Ата, Наука. – 1990. - 188 с.

[5] Ысмағұл Р.С., Карим А.О., Хамитбеков Ж.Р. Гильберт кеңістігіндегі бірінші ретті дифференциалды теңдеудің шешімі // Вестник КазНИТУ имени Сатпаева. Серия физико-математическая. -2019. -№ 6 (136). - б.788-792.

[6] Ysmagul R.S., Kolesnikova A.S. On one account system of integro-differential equations in private derivatives of first order // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия физико-математическая. –2018. –№ 3 (63). c. 178-181.

[7] Ysmagul R.S., Kolesnikova A.S. Some estimates of characteristic functions and matrix of a linear uniform equation in private derivatives // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия физико-математическая, 2019. № 2 (63).-c.46-50.

[8] Ысмағұл Р.С., Муканов Т.Л. Решение одной счетной системы эволюционных уравнений методом укорочения //Многопрофильный научный журнал "3i -intelekt, ideya, innovatsiya" КГУ им. А. Байтурсынова, 2014. Вып.1, с.93-99.

[9] Ysmagul, R. and Zhumartova Б. 2021. Characteristic function of the system D–Equatio. Bulletin of Abai KazNPU. Series of Physical and Mathematical sciences. 75, 3 (Sep. 2021), 29–34. DOI:https://doi.org/10.51889/2021-3.1728-7901.03.

[10] Жумартова Б.О., Утемисова А.А., Ысмагул Р.С. Метод наименьших квадратов как инструмент для краткосрочного прогнозирования эпидемиологической динамики// Вестник КазНПУ им. Абая, серия «физ.-мат. наук», Алматы, 2024. №1(85), с.22-29 DOI: 10.51889/2959-5894.2024.85.1.002

[11] A. Abylkassymova, B. Kaskatayeva, R. Kaparova, R. Ysmagul, F. Nametkulova Preparation of bachelors for professionally oriented teaching of mathematics to schoolchildren at a pedagogical university Received 23.11.2023, Revised 09.02.2024, Accepted 28.03.2024. - p.2423-2434 https://doi.org/10.54919/physics/55.2024.242wd3

References

[1] Umbetzhanov D.U. (1990) Pochti mnogoperiodicheskie reshenija differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh [Almost periodic solutions of partial differential equations]. Alma-Ata: Nauka, 273 p. (In Russian)

[2] Ysmagul R.S., Ginolla T. (2018) Reshenie odnoj schetnoj sistemy pochti mnogoperiodicheskih uravnenij metodom ukorochenija [Solving a single countable system of almost multiperiodic equations by the shortening method]. Matematicheskoe i programmnoe obespechenie sistem v promyshlennoj i social'noj sferah, Vol. 6, No. 2, 19–23. https://doi.org/10.18503/2306-2053-2018-6-2-19-23 (In Russian)

[3] Ismagulova R.S. (1987) O primenenii metoda ukorochenija k postroeniju pochti mnogoperiodicheskogo reshenija odnoj sistemy integrodifferencial'nyh uravnenij chastnyh proizvodnyh [On the application of the shortening method to the construction of an almost multiperiodic solution of a system of integro-differential partial differential equations]. Alma-Ata: VINITI, 3.07.87, No. 5474-V87. (In Russian).

[4] Umbetzhanov D.U. (1990) Pochti periodicheskie reshenija jevoljucionnyh uravnenij [Almost periodic solutions of evolutionary equations]. Alma-Ata: Nauka, 188 p. (In Russian)

[5] Ysmağūl R.S., Karim A.O., Hamitbekov Zh.R. (2019) Gilbert kenistigindegi birinshi retti diferensialdy tendeudin sheshimi [Solution of a first-order differential equation in Hilbert space]. Vestnik KazNITU imeni Satpaeva. Serija fiziko-matematicheskaja, No. 6 (136), 788–792. (In Kazakh)

[6] Ysmagul R.S., Kolesnikova A.S. (2018) On one countable system of integro-differential equations in partial derivatives of the first order. Vestnik KazNPU. Seriya "Fiziko-matematicheskie nauki", No. 3 (63), 178–181.

[7] Ysmagul R.S., Kolesnikova A.S. (2019) Some estimates of characteristic functions and matrix of a linear uniform equation in partial derivatives. Vestnik KazNPU. Seriya "Fiziko-matematicheskie nauki", No. 2 (63), 46–50. https://doi.org/10.51889/2021-3.1728-7901.03

[8] Ysmagul R.S., Mukanov T.L. (2014) Reshenie odnoj schetnoj sistemy jevoljucionnyh uravnenij metodom ukorochenija [Solving a single countable system of evolutionary equations by the shortening method]. Mnogoprofil'nyj nauchnyj zhurnal "3i – intelekt, ideja, innovacija", V. 1, 93-99. (In Russian)

[9] Ysmagul, R. and Zhumartova Б. 2021. Characteristic function of the system d–equatio. Bulletin of Abai KazNPU. Series of Physical and Mathematical sciences. 75, 3 (Sep. 2021), 29–34. DOI:https://doi.org/10.51889/2021-3.1728-7901.03.

[10] Zhumartova V.O., Utemissova A.A., Ysmagul R.S. (2024) Metod naimenshikh kvadratov kak instrument dlia kratkosrochnogo prognozirovanija epidemiologicheskoj dinamiki [The least squares method for short-term forecasting of epidemiological dynamics]. Vestnik KazNPU. Seriya "Fiziko-matematicheskie nauki", No. 1 (85), 22–29. https://doi.org/10.51889/2959-5894.2024.85.1.002. (In Russian)

[11]. Abylkassymova A., Kaskatayeva B., Kaparova R., Ysmagul R., Nametkulova F. (2023) Preparation of bachelors for professionally oriented teaching of mathematics to schoolchildren at a pedagogical university. Scientific Herald of Uzhhorod University. Series Physics, No. 55, 2423–2434. https://doi.org/10.54919/physics/55.2024.242wd3