Conclusion

As teachers of new generation who qualified to teach their subjects in English it might be a great opportunity to conduct a research inside of Kazakhstan by testing Khan Academy for Kazakhstani schools. Even the problem of schools in Kazakhstan with digital media can be distinguished as 1 computer per 18 students [9], majority of the students have access to Internet by iOS and Android. The question is we should not wait until all the equipments will be ready at schools, children should use in a proper way their devices like smartphones and tablets, so we should provide classes on the internet literacy. Providing classes with Khan Academy can be realistic by using method of CLIL (Content Language Integrated Learning) where children will use command language for instructions and will follow mostly native speakers of English in the subjects like Mathematics. We need to take into consideration this kind of experiments in special classes and schools where experiments of this kind are allowed.

References:

1 Khan S.A. personalized learning resource for all ages [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.khanacademy.org

2 Дарын Онлайн платформасы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://daryn.online

3 Murphy, R., Gallagher, L., Krumm, A ., Mislevy, J., & Hafter, A. (2014). Research on the Use of Khan Academy in Schools. Menlo Park, CA: SRI Education.

4 Мадиходжаева А., Батенова Д. Реформы и эксперименты Ерлана Сагадиева на посту министра образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://informburo.kz/stati/reformy-i-eksperimenty-erlana-sagadieva-na-postu-ministra-obrazovaniya.html

5 Gardner H. E. Multiple Intelligences: New Horizons in Theory and Practice. – NY.: Basic Books; Reprint edition, 2006. – 320 pages

6 Cirillo F. The Pomodoro Technique. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.baomee.info/pdf /technique/1.pdf

7 Bernard R. M. Digital Distractions in the Classroom Phase II: Student Classroom Use of Digital Devices for Non-Class Related Purposes. Journal of Media Education Vol. 7 Iss. 1 (2016) p. 5 – 32

8 MAP ACCELERATOR. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.nwea.org/map-accelerator/

9 Ministry of Education and Science. Strategic Plan of Republic of Kazakhstan for 2014-2018 years. Republic of Kazakhstan [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.edu.gov.kz/ru/deyatelnost/detail.php?ELEMENT_ID=58&sphrase_id=213777

МРНТИ 27.01.45
УДК 372.851

DOI: https://doi.org/10.51889/2020-1.1728-7901.23

Д.М. Нурбаева[1], Ж.М. Нурмухамедова[1], С. Ералиев[1], Б.М. Косанов[1]

[1]Казахский национальный педагогический университет, г. Алматы, Казахстан

О РАЗВИТИИ МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ

Аннотация

В статье рассмотрены решения тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности. На конкретных примерах показано ее применение для всех тригонометрических функций, а именно синус, косинус, тангенс и котангенс. Также приводится объяснение того, как правильно определить период для решений неравенств. Прежде чем разбирать решение тригонометрических неравенств, авторы статьи представляют вниманию решение тригонометрического уравнения по формуле, но корни его изображены на единичной окружности, где подробно изложено объяснение самой записи решения этого уравнения. На рисунках в статье демонстрируются изображения, которые должны быть представлены учителем на доске при решении тригонометрических неравенств. Статья написана доступным языком, при прочтении которой метод единичной окружности будет понятен не только действующим учителям, но и студентам младших курсов педагогических вузов.

Ключевые слова: тригонометрические уравнения, неравенства, единичная окружность.

Аңдатпа

Д.М. Нурбаева[1], Ж.М. Нурмухамедова[1], С. Ералиев[1], Б.М. Косанов[1]
[1]Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университет, Алматы қ., Қазақстан

МЕКТЕП АЛГЕБРА КУРСЫНДА ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ШЕШУ БАРЫСЫНДА ОҚУШЫЛАРДЫҢ ОЙЛАУ ҚАБІЛЕТІН ДАМЫТУ ТУРАЛЫ

Мақалада тригонометриялық теңсіздіктерді бірлік шеңбер көмегімен шешу мәселесі қарастырылған. Оның барлық оригонометриялық функциялар үшін, яғни синус, косинус, тангенс, котангенс функциялары үшін қолданыстары нақты мысалдар арқылы көрсетілген. Сонымен қатар теңсіздіктерді шешу үшін периодты дұрыс табу жолдары түсіндірілген. Мақала авторы тригонометриялық теңсіздіктерді шешуді түсіндірмес бұрын тригонометриялық теңдеулерді шешу әдістеріне тоқталады және мұндай теңдеулердің шешімдерін бірлік шеңбер бойында кескіндеуді егжей-тегжейлі қарастырған. Мұғалімнің оқушыларға тақтада көрсетуі тиіс кескіндер мақалада суреттер арқылы көрсетілген. Мақала бірлік шеңбер әдісін тек мұғалімдер ғана емес, педагогикалық жоғары оқу орындарының төменгі курс студенттері де ұғатындай түсінікті тілде жазылған.

Түйін сөздер: тригонометриялық теңдеулер, теңсіздіктер, бірлік шеңбер.

Abstract

ABOUT DEVELOPMENT OF STUDENTS ' THINKING WHEN SOLVING TRIGONOMETRIC EQUATIONS AND INEQUALITIES IN THE SCHOOL ALGEBRA COURSE

D.M. Nurbayeva[1], Zh.M. Nurmukhamedova[1], S. Yeraliyev[1], B.M. Kossanov[1]
[1]Abai Kazakh national pedagogical university, Almaty, Kazakhstan

The article deals with solutions of trigonometric inequalities using the unit circle. Specific examples show its application for all trigonometric functions, namely sinus, cosine, tangent and cotangent. An explanation of how to correctly define the period for solving inequalities is also provided. Before analyzing the solution to trigonometric inequalities, the authors present the solution of trigonometric equations according to the formula, but his roots are depicted on the unit circle, where detailed explanation of the record of solutions of this equation. The pictures in the article demonstrate the images that should be presented by the teacher on the blackboard when solving trigonometric inequalities. The article is written in an accessible language, when reading which the unit circle method will be understandable not only to current teachers, but also to students of Junior courses of pedagogical universities.

Keywords: trigonometric equations, inequalities, unit circle.

Известно, что тригонометрия (тригонометрические функции) широко используется в астрономии, в акустике, в электронике, в медицине, в морской и воздушной навигации, в машиностроении и многих других областях. Если раньше ее изучали как отдельный предмет в школе, то сейчас – это раздел в курсах алгебры и алгебры и начал анализа. Большое количество студентов будет изучать тригонометрические функции и в высших учебных заведениях. Поэтому, считаем необходимым сформировать достаточные знания в этой области, для чего требуется привить навыки решения тригонометрических уравнений и неравенств.

Если при решении тригонометрических уравнений у школьников не возникает особых затруднений, учитывая использование ими готовых формул, то тригонометрические неравенства обычно вызывают определенные проблемы.

В современных учебниках решать тригонометрические неравенства предлагается по готовым формулам, при чем при подстановке конкретных значений в них возникают ошибки, и использование графиков функций.

Считаем, что при решении тригонометрических уравнений и неравенств необходимо учить школьников использовать единичную окружность. Чтобы формировать навыки работы с единичной окружностью постепенно, понятие о ней требуется вводить параллельно с началом изучения тригонометрической функции. Например, основные значения тригонометрических функций следует показывать на графике единичной окружности.

В статье на всех рисунках будут показаны решения уравнений и неравенств так, как они должны выглядеть на доске при объяснении материала школьникам.

Пример 1. $\sin x = \frac{1}{2}$ (рисунок 1).

На единичной окружности это значение находится в следующих точках.

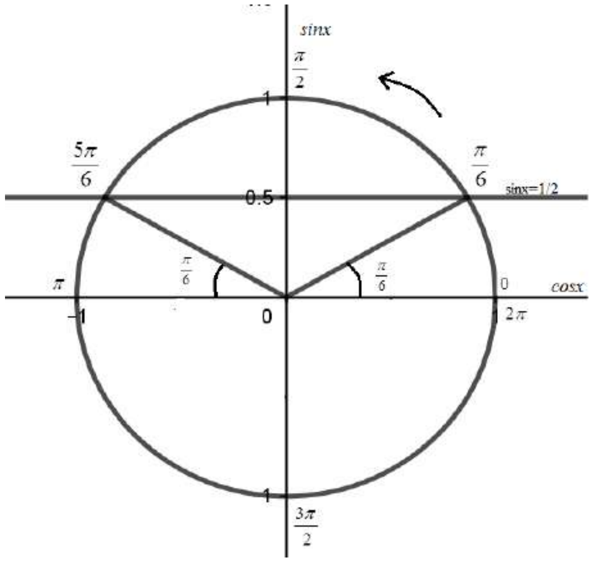

Рисунок 1.

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

При $k = 0$ $x = \frac{\pi}{6}$; при $k = 1$ $x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$;

при $k = 2$ $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi$, то есть «пройдя» полный круг, мы попадаем в точку $x = \frac{\pi}{6}$; при $k = 3$ $x = -\frac{\pi}{6} + 3\pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi$, то есть опять через полный круг мы получаем точку $x = \frac{5\pi}{6}$.

Так при любом значении k решением будут являться две точки единичной окружности.

Вышесказанным формируются навыки понимания математической записи корней тригонометрического уравнения и умения самостоятельно (если учащийся забыл готовые формулы) определить общий вид его корней. Таким образом, начиная с основных понятий тригонометрии (а вводить единичную окружность необходимо с самого начала изучения тригонометрических функций), у школьников будет постепенно формироваться математическое мышление для проведения анализа и синтеза, необходимых для дальнейшего обучения в высшем учебном заведения.

Важную роль играет умение школьников определять период найденного решения уравнения или неравенства. Рассмотрим решение тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности.

Пример 2. $\sin 2\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (рисунок 2).

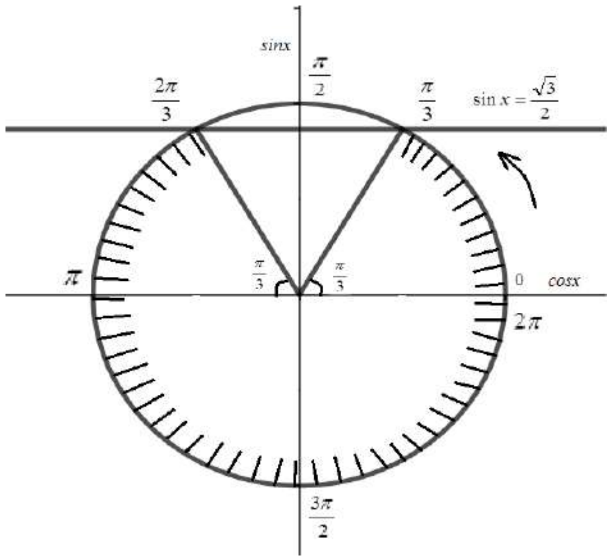

Рисунок 2.

Чтобы решить данное неравенство, во-первых введем обозначение $x = 2\alpha$, тогда неравенство перепишем следующим образом: $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Напомним учащимся, что решая неравенства на графике единичной окружности, значения синусов находятся на оси ординат, а косинусов – на оси абсцисс.

Проведем прямую $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Так как неравенство содержит знак «меньше», делаем вывод, что его решения находятся ниже этой прямой.

Чтобы указать значения точек, в которых эта прямая пересекла окружность, мы должны помнить, что должны «двигаться» против часовой стрелки.

Поэтому первым значением укажем левую точку пересечения окружности с прямой. Значение острого угла, синус которого $\frac{\sqrt{3}}{2}$, равен $\frac{\pi}{3}$.

Мы не «доходим» до значения π на угол $\frac{\pi}{3}$, то есть значение точки $\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$. Значение второй точки будет равно $\frac{7\pi}{3}$, так как чтобы «добраться» до нее нужно «перейти» 2π на $\frac{\pi}{3}$ ($2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}$).

Чтобы попасть в каждую из точек получившейся дуги, необходимо сделать полный оборот, откуда следует, что периодом будет являться 2π. Получили, что $x\in\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z\right)$. При записи интервала, напомним школьникам, что значение слева всегда меньше значения справа. Теперь используя сделанную нами замену найдем решение первоначального неравенства.

$$x=2\alpha\ \Rightarrow\frac{2\pi}{3}+2\pi n<2\alpha<\frac{7\pi}{3}+2\pi n\ \Rightarrow\frac{\pi}{3}+\pi n<\alpha<\frac{7\pi}{6}+\pi n$$. Ответ: $\alpha\in\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z\right)$

<u>Пример 3.</u> $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$ (рисунок 3).

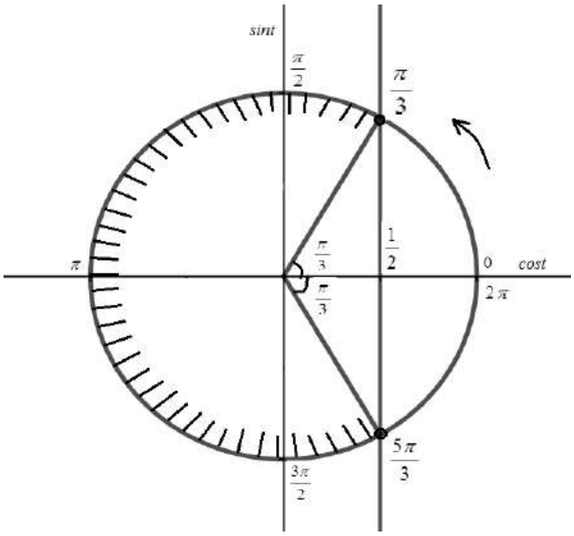

Рисунок 3.

Прежде чем, решить данное неравенство, преобразуем его: $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le\frac{1}{2}$.

Сделаем замену: $t=2x+\frac{\pi}{3}$.

Тогда нам необходимо решить неравенство: $\cos t\le\frac{1}{2}$. Прямая $\cos t=\frac{1}{2}$ пересекает единичную окружность в двух точках.

Так как знаком неравенства является знак «меньше», значит нужная нам дуга будет находиться левее этой прямой. Двигаясь против часовой стрелки, укажем значения точек пересечения, учитывая также, что периодом будет являться 2π : $\frac{\pi}{3}+2\pi n\le t\le\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

Учитывая сделанную нами замену, получим:

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{3}+2\pi n\ \Rightarrow 2\pi n\le 2x\le\frac{4\pi}{3}+2\pi n\ \Rightarrow\ \pi n\le x\le\frac{2\pi}{3}+\pi n, n\in Z .$$

Ответ: $x\in\left[\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z\right]$.

<u>Пример 4.</u> $tgx\ge 1$ [1] (рисунок 4).

Чтобы решить неравенство, содержащее тригонометрическую функцию *tg*, необходимо параллельно оси ординат справа, касаясь контура единичной окружности, провести прямую, которая и будет соответствовать данной тригонометрической функции. Отметим на прямой точку, значение которой соответствует 1, и соединим ее с центром окружности.

Эта прямая пересечет окружность в двух точках. Из заданного неравенства нам нужны значения большие 1, то есть все значения выше 1.

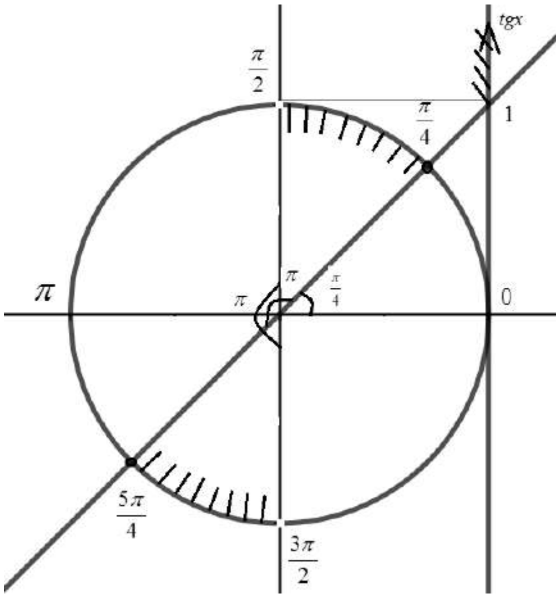

Рисунок 4.

На окружности штриховкой показаны дуги, соответствующие данным значениям. Следуя опять же против часовой стрелки, значение первой точки будет равно $\frac{\pi}{4}$. Решая неравенства, содержащие тригонометрическую функцию «тангенс», значения рассматриваются от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ ввиду области определения этой функции.

На рисунке ясно видно, что каждая точка дуги от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$ перейдет в соответствующие точки дуги от $\frac{5\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{2}$ через полукруг или π.

Следовательно решением данного неравенства будут интервалы $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z\right)$.

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z\right)$.

Пример 5. $ctg(x-\frac{\pi}{3}) < \sqrt{3}$ [1] (рисунок 5).

Аналогично решаются и тригонометрические неравенства, содержащие функцию *ctg*.

Линия котангенсов находится параллельно оси абсцисс и касается линии единичной окружности сверху.

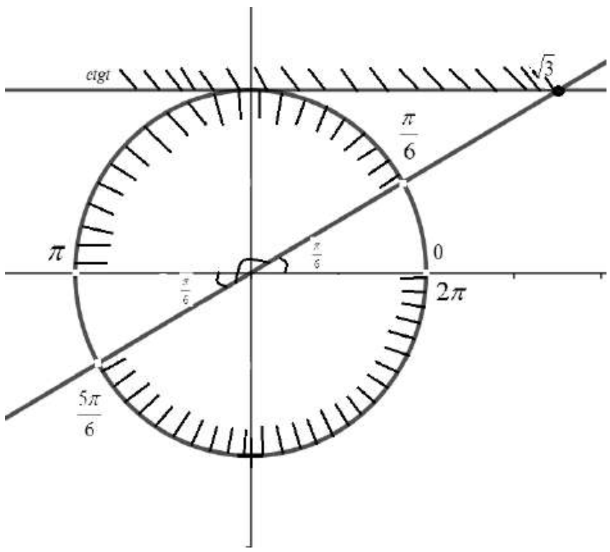

Рисунок 5.

Значения котангенсов рассматриваются от 0 до π.

Периодом также является π.

Сделав замену $x-\frac{\pi}{3}=t$, решим неравенство относительно *t*.

$$\frac{\pi}{6}+\pi n < t < \pi+\pi n,\ n \in Z.$$

Сделав обратную замену, получим:

$$\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \frac{4\pi}{3}+\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{4\pi}{3}+\pi n,\ n \in Z\right)$

Особенно удобно решать на единичной окружности системы тригонометрических неравенств или неравенства, решение которых приводит к решению системы тригонометрических неравенств.

Пример 6. $\left|\cos x\right| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$. (рисунок 6).

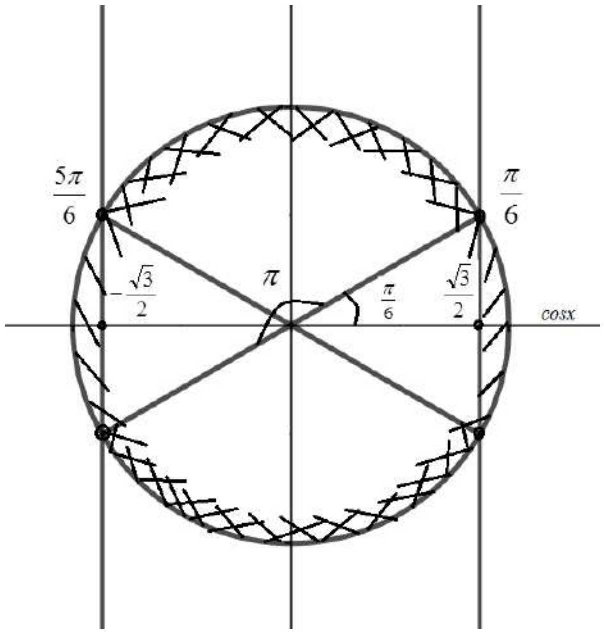

Рисунок 6.

Из данного неравенства вытекает система двух неравенств: $\begin{cases} \cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, которую мы решим на одной единичной окружности.

На рисунке дуга со значениями точек, удовлетворяющих первому неравенству системы, заштрихована черным цветом, а дуга со значениями точек второго неравенства – синим цветом.

Дуги, где пересекаются обе штриховки являются решением системы.

На рисунке показано, что каждая точка одной дуги попадает в соответствующую ей точку другой дуги через значение π .

Поэтому в ответе достаточно указать одну дугу, но с периодом π .

Ответ: $x \in \left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in Z\right]$.

Итак, если при работе с тригонометрическими функциями показывать значения на единичной окружности, при решении тригонометрических неравенств школьники будут быстро ориентироваться на ней и с легкостью их решать.

Умение решать тригонометрические уравнения, неравенства и их системы, используя именно единичную окружность, дает возможность учащимся решать более сложные задачи высшей математики.

Список использованной литературы:

1 Абылкасымова А.Е., Кучер Т.П., Корчевский В.Е., Жумагулова З.А. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 кл. естеств.-матем. направл. общеобразоват. шк. Часть2. – Алматы: Мектеп, 2019. – 176 с.