

МАТЕМАТИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ
МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELING

МРНТИ 29.19.30

10.51889/2959-5894.2025.89.1.001

Б.К. Алимбаева^{1*}, М.Ж. Сақыпбекова², Л.А. Сагимбаева², Г.Г. Газиз², А.Қ. Мошкалов³

¹ Университет международного бизнеса, г. Алматы, Казахстан

² Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

³ Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: bagilaalimbayeva@gmail.com

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕВЗАИМНЫХ УСТРОЙСТВ НА ОСНОВЕ УПРУГИХ
МЕТАМАТЕРИАЛОВ**

Аннотация

В работе рассматривается одномерная нелинейная периодическая структура, обладающая эффектом невзаимности распространения упругих волн. Известно, что микроструктурированные среды способны контролировать распространение волн за счет особенностей своей внутренней структуры. В частности, упругие линейные решетки, состоящие из точечных масс и упругих неинерционных связей, демонстрируют выраженные дисперсионные и фильтрующие свойства, даже при их однородности. Для эффективного использования этих свойств важно детально изучить динамические характеристики структуры. Анализ дисперсионного соотношения предложенной модели выявил значительные преимущества, позволяющие целенаправленно манипулировать распространением упругих волн. В частности, рассмотрены одноатомные и двухатомные системы как с одинаковой, так и с различной жесткостью. Показано, что новая нелинейная упругая периодическая структура обладает преимуществами перед другими видами периодических структур, в том числе повышенной чувствительностью к гибкости при регулировании запрещенной зоны. Динамическое поведение упругой системы исследуется аналитически и сравнивается с численными решениями. На основе полученных результатов предложена конструкция невзаимного устройства, в которой реализуется включение как линейных, так и нелинейных цепей. Эффект невзаимности для передаваемых волн обусловлен эффектом связи, который подтверждается расчетом двух взаимных работ между приложенными силами.

Ключевые слова: метаматериалы, волновая механика, двухатомная решетка, одномерная цепь, микроархитектура.

Б.К. Алимбаева^{1*}, М.Ж. Сақыпбекова², Л.А. Сагимбаева², Г. Газиз², А.Қ. Мошкалов³

¹Халықаралық бизнес университеті, Алматы, Қазақстан

²әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

³Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

**СЕРПІМДІ МЕТАМАТЕРИАЛДАР НЕГІЗІНДЕГІ РЕЦЕПРОКАТТЫ ЕМЕС
ҚҰРЫЛҒЫЛАРДЫ МОДЕЛЬДЕУ**

Аңдатпа

Біз серпімді толқынның таралуының өзара емес әсерін қолдайтын бір өлшемді сызықты емес периодтық құрылымды қарастырамыз. Микроқұрылымды орталардың ішкі микроқұрылымы арқылы толқынның таралуын басқару мүмкіндігі бар екені белгілі. Нүктелік массалар мен серпімді инерциялық емес байламдардан тұратын серпімді сызықты торлар біртекті болса да дисперсиялық және сүзу

қасиеттерін көрсетеді. Бұл мүмкіндікті пайдалану үшін құрылымның динамикалық қасиеттерін түсіну маңызды. Осы жұмыста қарастырылған әртүрлі модельдер үшін дисперсия қатынасының нәтижелері (қаттылығы бірдей және әртүрлі монотомдық, екі атомды жүйелер) жаңа сызықты емес серпімді периодтық құрылымның периодтық құрылымдардың басқа түрлеріне қарағанда айқын артықшылықтары бар екенін көрсетеді жолақ аралығы, бұл жаңа сызықты емес серпімді периодтық құрылымның периодтық құрылымдардың басқа түрлерімен салыстырғанда айқын артықшылықтарға ие екенін, соның ішінде саңылау жолағы кезінде икемділіктің жоғары сезімталдығын көрсетеді. Серпімді жүйенің динамикалық әрекеті аналитикалық түрде зерттеліп, сандық шешімдермен салыстырылады. Модельдік дисперсия қатынасының нәтижелері серпімді толқынның таралуын басқарумен байланысты айқын артықшылықтарды көрсетті. Алынған нәтижелер негізінде сызықтық және сызықты емес тізбектерді қосу арқылы өзара емес құрылғының конструкциясы енгізілген. Қосылу эффектісіне байланысты берілетін толқындар үшін ерекше кері емес әсер, әсер етуші күштер арасындағы екі өзара жұмысты есептеу арқылы бекітілген теориялық тұжырымдама негізінде тексеріледі.

Түйін сөздер: метаматериалдар, толқындық механика, екі атомды торлар, бір өлшемді циркуляция, микроархитектура.

B.K. Alimbaeva^{1*}, M.Zh. Sakypbekova², L.A. Sagimbayeva², G. Gaziz², A.K. Moshkalov³

¹University of International Business, Almaty, Kazakhstan

²Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

³Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

MODELING OF NONRECIPROCATIVE DEVICES BASED ON ELASTIC METAMATERIALS

Abstract

We consider a one-dimensional nonlinear periodic structure that supports the effect of nonreciprocity of elastic wave propagation. It is known that microstructured media have the ability to control wave propagation due to the internal microstructure. Elastic linear lattices consisting of point masses and elastic non-inertial ligaments exhibit dispersive and filtering properties, even if they are homogeneous. To exploit this advantage, it is important to understand the dynamic properties of the structure. The dispersion relation results for different models considered in this paper (monoatomic, diatomic systems with the same and different stiffness) show that the new nonlinear elastic periodic structure has obvious advantages over other types of periodic structures, including greater sensitivity to flexibility in band gap manipulation. The dynamic behavior of the elastic system is investigated analytically and compared with numerical solutions. The results for the dispersion relation model demonstrated obvious advantages related to the manipulation of elastic wave propagation. Based on the obtained results, the design of non-reciprocal device is introduced by including linear and non-linear circuits. The specific non-reciprocal effect for transmitted waves due to coupling effect is verified based on the theoretical concept supported by the calculation of two mutual works between applied forces.

Keywords: metamaterials, wave mechanics, two-atom lattice, one-dimensional circuit, microarchitecture.

Введение

Метаматериалы – это рационально спроектированные композиты с инженерной архитектурой, которые демонстрируют необычайные макроскопические свойства, являющиеся результатом коллективного ответа периодически конструируемых метаатомов, а не отдельных [1–5]. В настоящее время метаматериалы привлекают все большее внимание из-за постоянно растущих требований к материалам в различных приложениях. Префикс мета, от древнегреческого, означает «за пределами», и он относится к новому классу передовых материалов с превосходными явлениями, которые не встречаются в обычных материалах [6,7, 8, 9, 10]. Эффективные свойства этих композитных материалов в значительной степени зависят от спроектированной микроархитектуры. После первых применений в оптике метаматериалы быстро вошли в различные физические области, включая фотонику, акустику, материаловедение, механику. В настоящее время метаматериалы привлекают все большее внимание из-за своих отрицательных или экстремальных упругих, термических, структурных, механических и динамических свойств и расширили спектр приложений, которые пользуются большим спросом, например, сбор энергии, датчики, биомедицина, автомобилестроение,

аэрокосмическая промышленность, распознавание речи, обработка сигналов, устройства маскировки, создание фильтров и т. д. Значительную роль в развитии метаматериалов играет быстрое развитие технологий производства, особенно аддитивного производства, включая оптическую 3D-печать, передовую литографию, многофотонную 4D-печать и нанопечать. Конструкции, разработанные с использованием передовых технологий цифрового производства, продемонстрировали свою высокую производительность в современных устройствах [11, 12]. Следовательно, с быстрым развитием технологических методов метаматериалы становятся все более активными и эффективными и зарекомендовали себя как «умные материалы».

Механические метаматериалы основаны на периодически спроектированных элементарных ячейках, разработанных с использованием структурных элементов, таких как балки, стержни и массы с настроенными свойствами [13]. В последние годы было проведено много исследований различных механических метаматериалов с необычайной прочностью относительно их плотности [6], отрицательным коэффициентом Пуассона [14, 15, 16], показателями преломления [17, 18, 19] и свойствами жесткости [20], хиральностью [21, 22, 23], программируемыми [24] и другими метаматериалами. Достижения в области метаматериалов могут быть применены для создания искусственных сред с любыми динамически разрешенными свойствами, и, что примечательно, эти свойства могут быть изменены произвольно как в пространстве, так и во времени, что делает метаматериалы активными, настраиваемыми, реагирующими на окружающую среду. Это открывает необычайные возможности в различных областях, расширяя спектр их применения: они могут служить механическими фильтрами, волноводами, диодами и резонаторами, которые могут обеспечить решения реальных проблем.

Периодические структуры являются дисперсионными, и для понимания их динамического поведения важно получить дисперсионную диаграмму, связывающую частоту колебаний с волновым числом. В этой связи подробный анализ дисперсионного соотношения может служить базовым инструментом для моделирования новых структур.

Хорошо известно, что бесконечные периодические системы демонстрируют фильтрующее поведение. Анализ Флоке-Блоха показывает, что в таких системах существует определенный диапазон частот, в котором при отсутствии диссипации волны распространяются без затухания, в то время как в других диапазонах частот волны затухают экспоненциально, а показатель затухания может достигать значений, недостижимых из-за диссипативных эффектов. Для бесконечно периодических систем эти диапазоны частот обозначаются как «полоса пропускания» и «полоса задерживания». Спектральный анализ для волн Блоха в периодических системах удобно применять к конечным системам и, следовательно, к реальным структурам с аналогичными свойствами передачи, даже для небольшого числа повторяющихся единиц. В этом случае более корректно обозначать частотные интервалы как области распространения и нераспространения. В реальных структурах дефекты и несовершенства структурных свойств могут вносить «загромождение», которое в определенном диапазоне несколько изменяет дисперсионные свойства системы, особенно в акустических ветвях. Дисперсионный анализ упругих решеток показывает, что дискретный характер упругой системы приводит к появлению дисперсии, где число полос зависит от числа лагранжевых координат в элементарной ячейке. В таких системах особые свойства, такие как биение волн и возникновение запрещенных зон, достигаются путем периодического изменения жесткости и плотности компонентов решетки.

Другой источник дисперсии связан с геометрией и граничными условиями, как в структурной механике, где, начиная с трехмерной теории сплошной среды и следуя асимптотической процедуре, получаются структурные модели, такие как балки, пластины или оболочки, которые являются дисперсионными. Хорошо известными примерами являются изгибные волны в пластинах и балках или волны Лэмба. Приложения, объединяющие

структурные модели и периодические системы, и квазипериодические системы были рассмотрены выше.

Изучение нелинейных метаматериалов является активной областью исследований, которая объединяет концепции из таких дисциплин, как материаловедение, нелинейная динамика и физика конденсированного состояния. Нелинейность в волновой механике является источником богатого и широкого спектра явлений управления волнами, которые недоступны для линейных материалов, включая амплитудно-зависимую запрещенную зону, генерацию гармоник высокого порядка, уединенную волну. Например, динамическое поведение нелинейной системы зависит от амплитуды движения. Эта зависимость влияет на дисперсионное соотношение, что приводит к изменениям в зонах распространения и затухания структуры. Амплитудно-зависимое свойство нелинейной структуры дает возможность проектировать активно-настраиваемые фильтры вибрации, которые способны модулировать поведение распространяющейся волны при определенных условиях.

Также нелинейность позволяет системам поддерживать невзаимное распространение волн, это может быть связано с амплитудно-зависимой скоростью. Существуют различные подходы к анализу дисперсионного соотношения для нелинейных периодических структур при определенных предположениях. Наиболее часто используемые подходы - это метод Линдстедта-Пуанкаре, теория возмущений, конечные элементы и т. д. Результаты всех случаев доказали зависимость частоты от величины нелинейности, а также от амплитуды начального возбуждения. Несмотря на все преимущества, нелинейности часто удавалось избегать из-за необходимого сложного анализа, поскольку аналитических решений для большинства нелинейных систем не существует, а нелинейные эффекты в системе еще больше усложняют задачу. Тем не менее, новые усовершенствования аналитических методов и вычислительной мощности прокладывают пути для введения эффектов нелинейности в структуры для генерации уникальных нелинейных волновых откликов. На основе этих ответов могут быть разработаны передовые инженерные устройства и функции, такие как настраиваемые фильтры и изоляция, роботизированное движение, устройства защиты от ударов, акустические линзы, переключатели, диоды, экранирование сейсмических волн.

Способность нарушать взаимность в материалах открывает возможности экстремальной волновой динамики и механизмов управления и обеспечивает революционные решения существующих проблем и полезные инструменты для будущих приложений. Изучение невзаимного распространения волн представляет большой интерес как для фундаментальных исследований, так и для инженерных приложений. Настоящая работа сосредоточена на исследовании новых концепций оптимального проектирования периодической микроструктуры, способной контролировать распространение упругих волн для защиты объекта от нежелательных вибраций, и их всестороннего анализа. Мы предлагаем моделировать невзаимное устройство, состоящее из комбинации упругой нелинейной решетки с квадратичной нелинейностью и линейной цепи. Важным свойством модели является способность нарушать взаимность для фильтрации волн передачи. В эластодинамической взаимности определяется симметрия между действием и реакцией в твердых телах и может быть выражена как свертка между двумя упругими состояниями.

Взаимность может быть разбита по-разному, структурированными пространственно-зависимыми и зависящими от времени конститутивными свойствами и внешним смещением, в нашей модели она достигается конститутивной нелинейностью системы. Численные решения получены аналитически и численно с использованием моделирования методом конечных элементов (FEM) в Python для проверки результатов, которые хорошо согласуются с теоретическим дисперсионным соотношением.

Методология исследования

2. Дисперсионное соотношение одномерных упругих метаматериалов

2.1. Модель одноатомной решетки – одинаковая масса, одинаковая жесткость

Мы будем исследовать продольное колебательное движение бесконечной системы масса – пружина, как показано на рис. 1. Мы рассматриваем модель одномерной цепи, состоящей из периодически расположенных точек, расположенных на $x_j = (jl, 0)$ и l – начальном расстоянии, имеющих одинаковую массу m , связанную жесткостью пружины K , как показано на рис. 1. Каждой частице внутри структуры присваивается индекс $j \in Z_0$

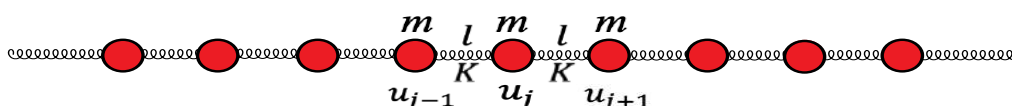


Рисунок 1. Геометрия бесконечной цепи масс.

Равновесное расстояние разделения между массами равно l .

Нерастянутое положение и смещение массы $m_j = m$ обозначены как u_j

Поскольку предполагается, что каждая масса совершает поступательное движение только в направлении x , определяющие уравнения для j^{th} массы задаются как

$$m \frac{d^2 u_j}{dt^2} + K(2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}) = 0, \quad (1)$$

где u_j — смещение j^{th} массы от ее положения равновесия, и теорема Блоха может быть здесь приведена из-за периодического расположения. На основе теоремы Блоха плоское решение может быть выражено как

$$u_j = A e^{i(kjl - \omega t)}, \quad (2)$$

где A, k, ω представляют амплитуду смещения, волновое число и угловую частоту соответственно. Подставляя это решение в дифференциальное уравнение (1) движения,

$$-m\omega^2 = -K(2 - e^{-jkl} - e^{jkl}) = -2K(1 - \cos(kl)) \quad (3)$$

Решая относительно $\omega(k)$, получаем дисперсионное соотношение решетчатой системы

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin\left(\frac{|kl|}{2}\right) \quad (4)$$

Модель цепи пружина-масса с идентичными массовыми элементами и пружинными элементами является однородной, и ее спектр частот колебаний состоит только из акустической ветви, как показано на рисунке 2. Таким образом, существует n различных значений $\omega(k)$, соответствующих n различным значениям k , что приводит к n модам. Моды описывают волны с частотой $\omega(k)$ и скоростями, которые являются фазовыми

$$v_p = \omega/k \text{ и групповыми } v_g = \partial\omega/\partial k.$$

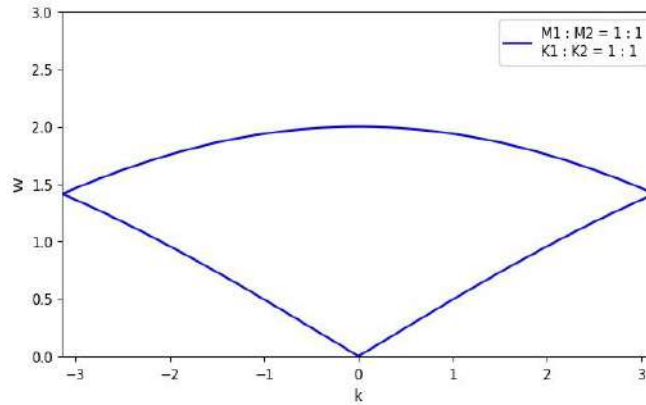


Рисунок 2. Дисперсионная кривая одномерного линейного упругого метаматериала для $m_i = m, k_i = K$

Максимальное значение частоты можно определить, как:

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

когда $k = \pm \frac{\pi}{l}$.

2.2. Модель двухатомной решетки — одинаковая масса, разная жесткость

В этой части мы рассмотрим немного более сложную задачу, которая представляет собой одномерную решетку, имеющую одинаковую массу m и две разные константы жесткости (K_1, K_2), расположенные периодически, как показано на рис. 2.

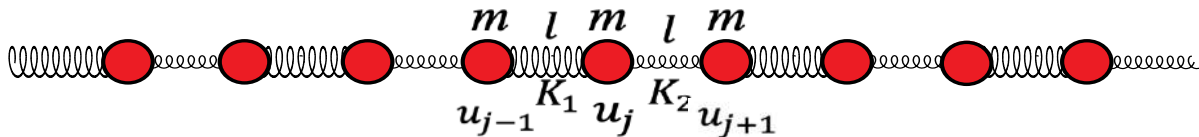


Рисунок 3. Бесконечная цепочка масс с различными константами жесткости пружины (K_1, K_2), между массами

Управляющие уравнения для j и $(j + 1)^{th}$ масс, включающие только продольные смещения $u_j(t)$ имеют вид

$$\frac{md^2u_{2n}}{dt^2} = K_1(u_{2n-1} - u_{2n}) + K_2(u_{2n+1} - u_{2n}) \quad (6)$$

$$\frac{md^2u_{2n+1}}{dt^2} = K_2(u_{2n} - u_{2n+1}) + K_1(u_{2n+2} - u_{2n+1}) \quad (7)$$

где u_j, u_{j+1} — смещения масс $j = (2n)^{th}$ и $j = 2(n + 1)^{th}$ из их положений равновесия. Снова применяя те же граничные условия, мы предполагаем, что волновые решения для дискретных случаев в соседних положениях, определенных относительно реальной центральной частицы, принимают следующие формы:

$$u_{2n}(t) = A_1 e^{i(\omega t - (2n)kl)}, \quad (8)$$

$$u_{2n+1}(t) = A_2 e^{i(\omega t - (2n+1)kl)}, \quad (9)$$

где A_1 и A_2 — коэффициенты, задающие относительную амплитуду и фазу движений.

Подставляя уравнения (8) и (9) в уравнения (6) и (7), получаем дисперсионное соотношение в виде

$$\omega^2 = m^{-1} \left(K_1 + K_2 \pm \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2K_1K_2 \cos(kl)} \right) \quad (10)$$

Здесь знак « \pm » в уравнении (10) дает два значения ω для каждого k . Поскольку имеется N нетривиальных значений k , мы имеем $2N$ нормальных мод, поскольку имеется $2N$ степеней свободы. Соответствующее дисперсионное соотношение $\omega(k)$ системы приведено на рисунке 2. Рисунок 3 имеет две различные ветви $\omega(t)$: нижняя кривая называется акустической ветвью из-за ее поведения при малых k , что характерно для звуковых волн и похоже на кривую, найденную ранее для одномерных монокристаллов. Верхняя кривая называется оптической ветвью, поскольку эти моды имеют тенденцию взаимодействовать с электромагнитным излучением. Частоты, соответствующие обеим ветвям, означают, что колебания могут передаваться через структуру без затухания. Диапазон между оптической и акустической ветвями обозначает диапазон частот, в котором нет мод распространения колебаний, и называется «запрещенной зоной». Значения частоты верхней и нижней границ запрещенной зоны можно определить как

$$\omega = \sqrt{\frac{2K_1}{m}} \quad \text{and} \quad A_1 = -A_2 \quad \text{для оптической отрасли,} \quad (11)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} \quad \text{and} \quad A_1 = A_2 \quad \text{для акустической отрасли,} \quad (12)$$

когда $k = \frac{\pi}{l}$

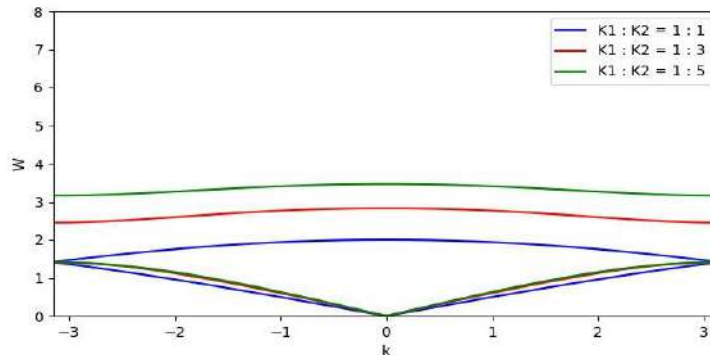


Рисунок 4. Дисперсионная кривая одномерного упругого метаматериала для $m_i = m$ и двух различных жесткостей K_1, K_2 пружин

Рисунок 4 описывает дисперсионное соотношение цепи масс для двух различных значений жесткости пружин, спектр частот колебаний неоднородных метаматериалов состоит из акустической ветви и оптической ветви, а между акустической и оптической ветвями возникает запрещенная зона, которая может препятствовать распространению волн. Теперь мы видим появление зон запрещенной зоны между оптической и акустической ветвями в соответствующем спектре частот колебаний. Акустическая ветвь описывает все массы внутри примитивной ячейки, движущиеся в фазе, в которой доминируют межъячеечные взаимодействия. Оптическая ветвь описывает все массы внутри примитивной ячейки, вибрирующие на месте друг против друга. Значения начальной и конечной частот запрещенной зоны определяются уравнениями (11), (12). Как показывают результаты, увеличение различий между значениями жесткости системы приводит к увеличению ширины запрещенной зоны.

Результаты исследования

2.3. Модель двухатомной решетки – разная масса, одинаковая жесткость

Здесь мы рассматриваем одномерную систему масса-пружина, состоящую из двух разных масс m_1, m_2 соединенных пружиной жесткости K , расположенных периодически, как показано на рисунке 5.

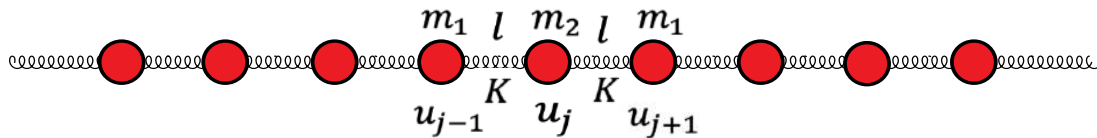


Рисунок 5. Бесконечная цепочка грузов разной массы с одинаковыми пружинами жесткости K

Уравнения движения имеют вид

$$m_1 \frac{d^2 u_{2n}}{dt^2} = K(2u_{2n} - u_{2n-1} - u_{2n+1}), \quad (13)$$

$$m_2 \frac{d^2 u_{2n+1}}{dt^2} + K(2u_{2n+1} - u_{2n} - u_{2j+2}) = 0, \quad (14)$$

где u_{2n} – смещение массы m_1 от ее положения равновесия, u_{2n+1} соответствует массе m_2 от ее положения равновесия. Отметим, что элементарная ячейка рассматриваемой микроструктуры содержит различные массы m_1, m_2 и жесткость пружины K системы. Для нахождения нормальных мод предположим, что все атомы движутся с одинаковой частотой,

$$u_{2n}(t) = A_1 e^{i((2n)kl - \omega t)}, \quad (15)$$

$$u_{2n+1}(t) = A_2 e^{i((2n+1)kl - \omega t)}. \quad (16)$$

Подставляя это решение в уравнения движения, получаем $\omega^{2(k)}$ в квадратичном виде

$$\omega^2 = \frac{k}{m_1 m_2} (m_1 + m_2 \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos(kl)}). \quad (17)$$

Полученный результат для дисперсионного соотношения показан на рисунке 5. Значения частоты верхней и нижней границ запрещенной зоны можно определить как

$$\omega^2 = \frac{2K}{m_2} \quad \text{для оптической ветви,} \quad (17)$$

$$\omega^2 = \frac{2K}{m_1} \quad \text{для акустической ветви.} \quad (18)$$

$$k = \frac{\pi}{i}$$

На рисунке 6 мы демонстрируем дисперсионное соотношение цепи масс с двумя различными массами m_1, m_2 .

Как показано на рисунке 6, спектр частот колебаний неоднородных метаматериалов состоит из акустической ветви и оптической ветви, а между акустической и оптической ветвями возникает запрещенная зона, которая может препятствовать распространению волн. Частотные пределы запрещенной зоны, открываемой двухатомной цепью пружина-масса, можно определить с помощью (17), (18). Результирующие дисперсионные кривые показывают, что запрещенная зона, по-видимому, связана со свойствами пружина-масса, что дает возможность уменьшить частоту возникновения запрещенной зоны путем уменьшения жесткости или увеличения массы.

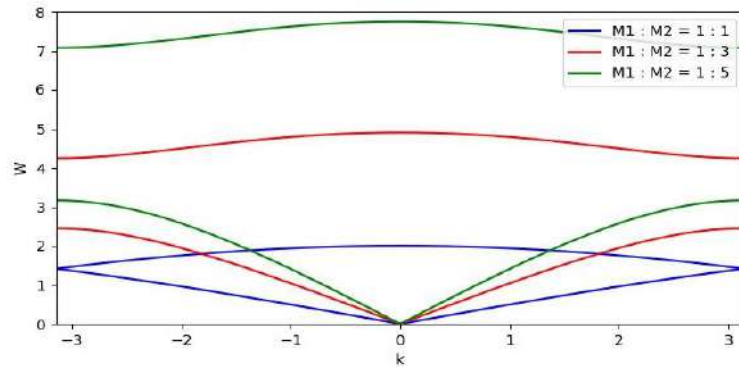


Рисунок 6. Дисперсионная кривая одномерного упругого метаматериала для двух различных масс m_1, m_2

2.4. Периодическая цепочка нелинейных осцилляторов

В этой части мы исследуем волновое поведение в новой нелинейной периодической цепочке, как показано на рисунке 7. Элементарная ячейка состоит только из одной массы с присоединенной линейной и нелинейной (квадратичной) пружины. Предполагается, что все массы равны ($m_j = m$)

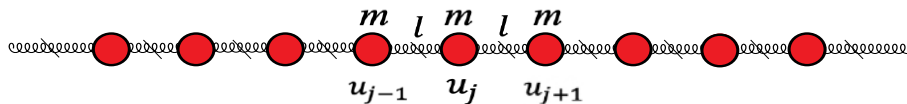


Рисунок 7. Бесконечная нелинейная моноатомная цепь. Нерастянутое положение и смещение массы ($m_j = m$) обозначается как u_j . Пружины с нерастянутой длиной l являются квадратично нелинейными

Одна степень свободы представляет продольное движение каждой массы. Нелинейное силовое взаимодействие можно описать как

$$F_e = K\Delta u + K\varepsilon\Delta u^3, \quad (20)$$

где ε -параметр нелинейности. Таким образом, сила пружины с квадратичной нелинейностью относительно состояния равновесия приводит к управляющим уравнениям движения, а общая масса ($i \in Z_0$), включающая только продольные смещения u_j , описывается как:

$$m \frac{d^2 u_j}{dt^2} = K \left((u_{j+1} - u_j) - (u_j - u_{j-1}) \right) + \varepsilon \left((u_{j+1} - u_j)^2 - (u_j - u_{j-1})^2 \right) \quad (21)$$

Переходные уравнения движения были решены численно с помощью двух кодов на Python и ML для одной конечной цепи, состоящей из N масс и однородных начальных условий $u_j = 0$ и $\dot{u}_j = 0$, с $i = 1 \dots N$. Для генерации волны система нагружается путем наложения растягивающего смещения амплитуды \bar{A} на левую границу, а именно

$$u_1(t) = -\bar{A} \frac{-1 + \tan h \frac{t-t_0}{v}}{2} \quad (22)$$

где t_0 – сдвиг по времени, а v – переходный период. Для численного анализа был разработан код Python, который использует схему интегрирования Рунге-Кутты. Далее, рассматриваемый численный результат, представленный на рисунке 8, иллюстрирует динамическое поведение системы. Численные результаты получены для цепи, состоящей из $N=30$ узлов с одинаковыми массами $m_j = m = 1$ Там решетка имеет длину $l = 10$ мм. Для

параметров приложенного растягивающего смещения u_1 мы используем $t_0 = 400$ с, $v = 40$ с. Учитывая, что система имеет сильную нелинейность, мы устанавливаем значение ε равным 0,2 для расчетов.

На рисунках 8, 9 показано свойство амплитудной зависимости рассматриваемых нелинейных систем. Чтобы подчеркнуть свойства новой модели, мы проанализировали как линейные, так и нелинейные системы для различных амплитуд входных сигналов. Поскольку цепь затвердевает, частоты среза увеличиваются с ростом амплитуды. Таким образом, увеличение амплитуды от $\bar{A} = 0,10$ мм до $\bar{A} = 0,5$ мм демонстрирует свойство амплитудной зависимости системы. Из первых сравнительных результатов видно, что различия между линейной и нелинейной моделями незначительны, тогда как вторые результаты, полученные для $A = 0,5$ мм, демонстрируют заметные различия в амплитудах и временных сдвигах. Физически это объясняет, что распространение волн зависит от механических свойств системы, а не только от величины приложенной силы.

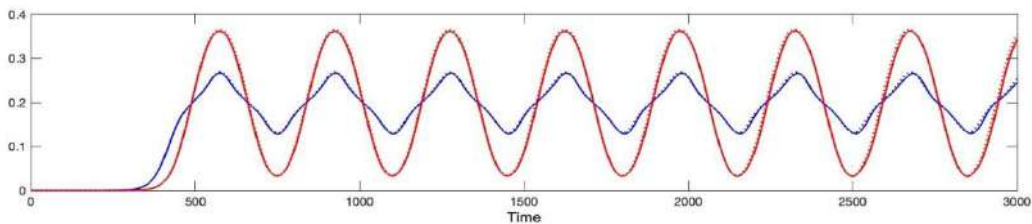


Рисунок 8. Входной сигнал с входной амплитудой $\bar{A} = 0,10$ мм мм представлен для линейного (синяя пунктирная линия) и нелинейного (синяя линия) режимов

Соответствующие выходные сигналы были протестированы при 25-й массе как линейной цепи (красная пунктирная линия), так и нелинейной цепи (красная линия).

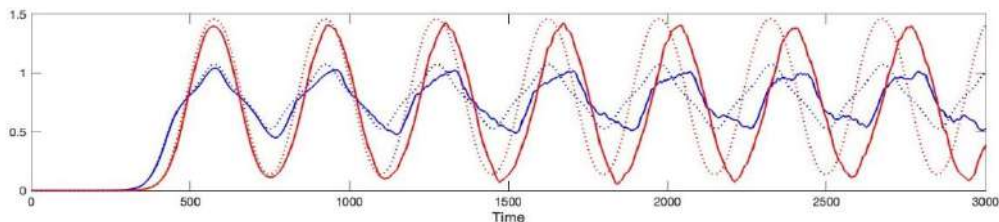


Рисунок 9. Входной сигнал с входной амплитудой $\bar{A} = 0,50$ мм мм представлен для линейного (синяя пунктирная линия) и нелинейного (синяя линия) режимов

Соответствующие выходные сигналы были протестированы при 25-й массе как линейной цепи (красная пунктирная линия), так и нелинейной цепи (красная линия).

Известно, что амплитудно-зависимые частотные сдвиги вблизи областей отсечки позволяют проектировать настраиваемые устройства на основе элементарных ячеек. Одним из таких устройств является амплитудно-зависимый частотный изолятор, использующий нелинейную цепь. Теперь мы рассмотрим модель устройства, состоящую из комбинации двух последовательно соединенных цепей, распространяющихся волн с частотным содержанием в узкой полосе, как показано на рисунке 10. В этой системе ширина распространяемой полосы зависит от амплитуды и, следовательно, настраиваема. Мы попытались спроектировать устройство, состоящее из комбинации нелинейной периодической структуры и линейной периодической структуры, как показано на рисунке 25. Мы использовали нелинейную структуру для обеспечения амплитудно-зависимого отклика падающей волны, чтобы нарушить принцип взаимности. В этой системе ширина распространяемой полосы зависит от амплитуды и, следовательно, настраиваема. Теоретический анализ показывает, что при соответствующей настройке параметров структуры примечательная амплитудная зависимость спектра пропускания в нелинейной системе может привести к асимметричному

распространению энергии, проходящей через систему, которое будет отличаться при изменении амплитуды или направления.

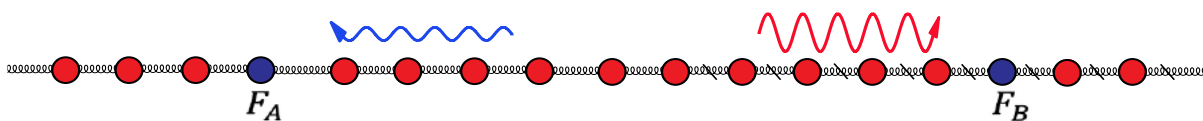


Рисунок 10. Распространение волн, вызванное силами, действующими в точках А, В и С. Волнистые стрелки указывают на распространение волн; цвета связаны с местами приложения сил

Рисунок 10 схематически показывает предлагаемую структуру эластичного метаматериала, который поддерживает невзаимную передачу, которая может быть реализована в предлагаемой структуре, которая состоит из нелинейной системы масса-пружина и линейной системы масса-пружина с хорошо настроенными параметрами, которые обсуждались ранее. Прямое направление устройства определяется как направление распространения падающей волны с левой стороны линейной системы масса-пружина, а противоположное направление определяется как обратное направление. Для изучения невзаимного эффекта модели мы численно вычисляем взаимную работу в соответствии с теоремой закона Максвелла-Бетти. Теорема о взаимном отклонении гласит, что работа силы в точке А из-за смещения в той же точке А, вызванного силой, приложенной в точке В, равна работе силы в точке В из-за смещения в той же точке В, вызванного силой, приложенной в точке А. Мы рассматриваем приложенные силы с одинаковыми и разными амплитудами и распределением времени в точках А, В, как показано на рисунке 10, а именно

$$F(t, v, \bar{F}) = \bar{F} \frac{1 + \tanh\left(\frac{t}{v}\right)}{2}$$

Согласно теореме о взаимности, взаимность можно отождествить с равенством взаимной работы, т. е.

$$F_A u_A^B = F_B u_B^A \quad (23)$$

Численные результаты взаимной работы $W_A^B \neq W_B^A$ когда приложенные силы одинаковы $F_A = F_B$, и различны, $F_A \neq F_B$, представлены на рисунках 11, 12 соответственно. Мы имеем невзаимность для всех случаев независимо от абсолютных и относительных направлений и значений сил. Различие взаимных работ связано с нелинейным конститутивным поведением системы при растяжении.

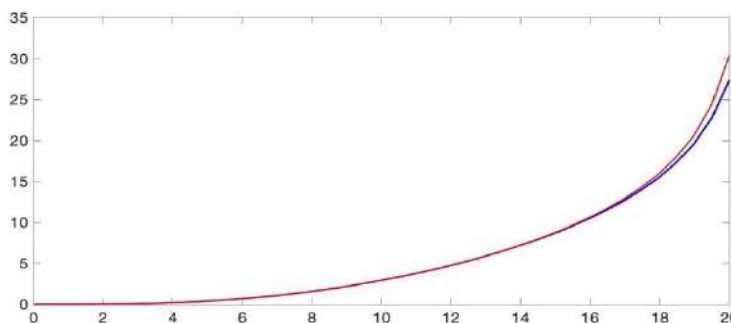


Рисунок 11. Взаимные работы W_A^B , W_B^A как функции времени между двумя силами для нелинейной цепи, когда $F_A = F_B$. Результаты описывают случаи, когда приложенные силы имеют одинаковые направления вправо

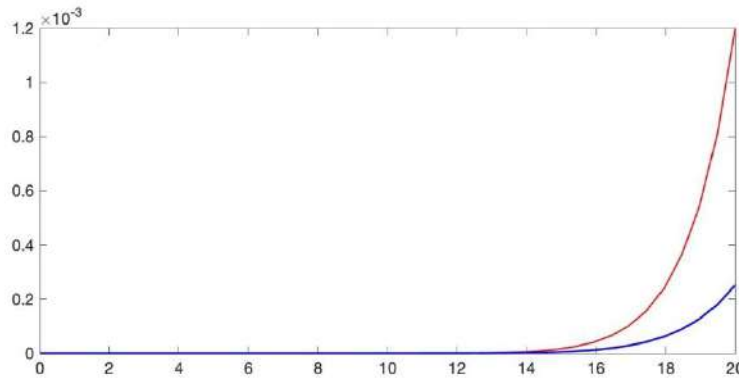


Рисунок 12. Взаимная работа взаимных работ W_A^B , W_B^A как функция времени между двумя силами для нелинейной цепи, когда $F_A \neq F_B$.

Результаты описывают случаи, когда приложенные силы имеют одинаковые направления вправо

Заключение

В этой работе мы сосредоточимся на свойствах передачи волн периодической системы масса-пружина. Мы рассматриваем одномерную одноатомную решетку с одинаковыми пружинами и другую, двухатомную модель цепи с разными массами и их характеристики дисперсионного соотношения. Поскольку линейность создает ограничения, мы изучаем одномерную решетку масса-пружина с квадратичной нелинейностью. Результаты показывают, что ширину запрещенной зоны можно регулировать с помощью соотношения масс, соотношения жесткостей, нелинейности и амплитуды смещения. Соотношение масс может увеличивать как верхнюю, так и нижнюю границу запрещенной зоны. Однако оно мало влияет на ширину запрещенной зоны. Линейное соотношение жесткостей мало влияет на верхнюю границу запрещенной зоны, но нижняя граница значительно уменьшается с увеличением соотношения жесткостей. Это означает, что ширина запрещенной зоны увеличивается. Линейное соотношение жесткостей мало влияет на верхнюю границу запрещенной зоны, но нижняя граница значительно уменьшается с увеличением соотношения жесткостей. Это означает, что ширина запрещенной зоны увеличивается. Изменяя нелинейность или амплитуду смещения, щель взрыва может быть смещена, а ширина запрещенной зоны заметно увеличивается. С увеличением нелинейных параметров максимальное значение затухания смещается выше линейной собственной частоты локальных резонаторов. Затем проводится численное моделирование для получения свойств передачи конечных решеток масса-пружина. В нашем исследовании подробно обсуждается влияние настройки различных параметров на упругие волны в нелинейных ЭМ, что обеспечивает потенциальное применение для снижения вибрации. Результаты новой микроструктурированной среды, представленные в этой статье, могут быть применены в различных областях, которые варьируются от управления механическими колебаниями в крупномасштабных структурах, таких как тонкие мосты, до фильтрации волн и передачи сигналов в микро- и наноэлектромеханических системах. Для таких приложений важно обобщить представленные здесь результаты, чтобы включить различные нагрузки и альтернативные гироупругие связи, что приведет к обнаружению новых динамических явлений в рассматриваемых решеточных системах. Это, следовательно, позволит разработать новые концепции структурированных материалов.

Список использованных источников

- [1] L. Vegni, F. Bilotti, A. Alù, and N. Engheta, "Application of Metamaterials to Microwave Patch and Leaky-Wave Antennas," in *Handbook of Artificial Materials: Applications of Metamaterials*, F. Capolino, ed., Taylor and Francis – CRC Press, Vol. 2, pp. 18.1-18.14, October 2009. <https://doi.org/10.1201/9781420054248>

- [2] Banerjee B. *An introduction to metamaterials and waves in composites*. – Taylor & Francis, 2011. <https://doi.org/10.1201/b11814>
- [3] Tong X. C. *Functional metamaterials and metadevices*. – Bolingbrook, IL : Springer, 2018. – Т. 262. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-66044-8>
- [4] Annamdas V. G. M., Soh C. K. *A perspective of non-fiber-optical metamaterial and piezoelectric material sensing in automated structural health monitoring //Sensors*. – 2019. – Т. 19. – №. 7. – С. 1490. <https://doi.org/10.3390/s19071490>
- [5] Brillouin L. *Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices / L. Brillouin*. — New York; London: McGraw-Hill, 1946. — 247p.
- [6] Hussein M. I., Leamy M. J., Ruzzene M. *Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook //Applied Mechanics Reviews*. – 2014. – Т. 66. – №. 4. – С. 040802. <https://doi.org/10.1115/1.4026911>
- [7] Engheta N., Ziolkowski R. W. (ed.). *Metamaterials: physics and engineering explorations*. – John Wiley & Sons, 2006. 414p. (Springer Series in Materials Science). — ISBN 978-0-471-76102-0. <https://doi.org/10.1002/0471784192>
- [8] Cui T. J., Smith D. R., Liu R. *Metamaterials*. – New York: springer, 2010. – С. 1. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0573-4>
- [9] D.J.Mead, “Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964–1995”, *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol.190, No.3, pp.495–524. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0076>
- [10] Zheludev N. I., Kivshar Y. S. *From metamaterials to metadevices //Nature materials*. – 2012. – V. 11, No.11, pp. 917-924. <https://doi.org/10.1038/nmat3431>
- [11] Spadaccini C. M. *Additive manufacturing and processing of architected materials //MRS Bulletin*. – 2019. – Vol. 44, No. 10, pp. 782-788. <https://doi.org/10.1557/mrs.2019.234>
- [12] Del Vesco D., Giorgio I. *Dynamic Problems for Metamaterials: A Review of Existing Models and Ideas for Further Research // International Journal of Engineering Science*, 2014, Vol.80. – P.153–172.
- [13] Lakes R. *Foam structures with a negative Poisson's ratio //Science*. – 1987, Vol. 235, No. 4792, pp. 1038-1040. <https://doi.org/10.1126/science.235.4792.1038>
- [14] Y. Chen, T. Li, F. Scarpa u L. Wang. *Lattice metamaterials with mechanically tunable Poisson's ratio for vibration control. Physical Review Applied*, 7(2):024012, 2017. <https://journals.aps.org/prapplied/abstract/10.1103/PhysRevApplied.7.024012>
- [15] A. Spadoni u M. Ruzzene. *Elasto-static micropolar behavior of chiral auxetic grill. Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60:156–171, 2012. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022509611001682?via%3Dihub>
- [16] Y. Wu, Y. Lai u Z.-Q. Zhang. *Elastic metamaterials with simultaneously negative effective shear modulus and mass density. Physical Review Letters*, 107(10):105506, 2011. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.105506>
- [17] D.J. Colquitt, I.S. Jones, N.V. Movchan, A.B. Movchan, M. Brun u R.C. McPhedran. *Making waves around a structured cloak: Lattices, negative refraction and fringes. The Royal Society Publishing*, 469:20130218, 2014. <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.2013.0218>
- [18] G. Carta, M. Brun, A.B. Movchan u T. Boiko. *Transmission and localisation in ordered and randomly-perturbed structured flexural systems. International Journal of Engineering Science*, 98:126–152, 2016. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0020722515001366>
- [19] R.S. Lakes, T. Lee, A. Bersie u Y.-C. Wang. *Extreme damping in composite materials with negative-stiff inclusions. Nature*, 410 (6828):565–567, 2001. <https://www.nature.com/articles/35069035>
- [20] A. Spadoni, M. Ruzzene, S. Gonella u F. Scarpa. *Phononic properties of hexagonal- chiral registries. Wave Motion*, 46(7):435–450, 2009. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0165212509000122?via%3Dihub>
- [21] G. Carta, M.J. Nieves, I.S. Jones u A.B. Movchan NV. *Movchan. Elastic chiral waveguides with gyro-hinges. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 71:157–185, 2018. DOI: <https://academic.oup.com/qjmam/article/71/2/157/4921177?login=false>
- [22] M. Garau, G. Carta, M. Nieves, I. S. Jones, N. V. Movchan u A. B. Movchan. *Interface Waveforms in Chiral Lattice with Gyroscopic Spinners. Proceeding of the Royal Society A-Mathematical Physical and Engineering Science*, 474:20180132, 2018. DOI: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.2018.0132>
- [23] B. Florijn, C. Coulais u M. van Hecke. *Programmable mechanical metamaterials. Physical Review Letters*, 113:175503, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.175503>
- [24] N.I. Zheludev u Y.S. Kivshar. *From Metamaterials to Metadevices. Nature materials*, 11:917–924, 2012. DOI: <https://www.nature.com/articles/nmat3431>