МРНТИ 27.31.15

10.51889/2959-5894.2025.89.1.006

Р.Д. Сейлова[1], М.Ж. Талипова[1]*, А. Турганбаев[1]

[1]НАО Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, г. Актобе, Казахстан
*e-mail: mira_talipova@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Аннотация

Исследование краевых задач управления для квазилинейных интегро-дифференциальных систем с импульсным воздействием является актуальной областью современной математики, находящей применение в моделировании сложных динамических процессов. Основная цель изучения управляемости квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием состоит в разработке методов, которые позволяют определять условия, при которых система является управляемой, разрабатывать алгоритмы, позволяющие построить управляющие воздействия для реализации желаемой траектории системы, а также исследовать устойчивость решений в условиях как регулярных, так и резких внешних изменений. В настоящей статье рассматривается некоторые условия управляемости краевой задачей для квазилинейной системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Исследованы процессы, в которых импульсное воздействие происходит не в заранее предписанные моменты времени, а в моменты времени, которые определяются состоянием системы. В статье доказаны некоторые условия управляемости квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в виде лемм, дано определение разрешимости задачи управления.

Ключевые слова: функция, квазилинейные системы, интегро-дифференциальные уравнения, импульсное воздействие, краевые задачи.

Р.Д. Сейлова[1], М.Ж. Талипова, А. Турганбаев[1]
[1]Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті КеАҚ, Ақтөбе қ., Қазақстан

ИМПУЛЬСТІ ӘСЕРІ БАР КВАЗИСЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ БАСҚАРУДЫҢ КЕЙБІР ШАРТТАРЫ

Аңдатпа

Импульсті әсері бар квазисызықты интегро-дифференциалдық жүйелер үшін шекаралық басқару есептерін зерттеу күрделі динамикалық процестерді модельдеуде қолданатын қазіргі математиканың өзекті саласы болып табылады. Импульстік әсері бар квазисызықты интегро-дифференциалдық теңдеулердің басқарылымдылығын зерттеудің негізгі мақсаты жүйе басқарылатын жағдайлардың шарттарын анықтау, қалаған траекторяларды жүзеге асыру үшін басқарылатын әрекеттерін құруға мүмкіндік беретін алгоритмдерді әзірлеу және шешімдердің орнықтылығын зерттеу болып табылады. Бұл мақала импульсті әсері бар интегро-дифференциалдық теңдеулер квазисызықты жүйесі үшін шекаралық есептің басқарылуының кейбір шарттарын зерттейді. Импульсті әсер алдын ала белгіленген уақытта емес, жүйенің күйімен анықталған уақытта болатын процестер зерттелді. Мақалада импульстік әсері бар квазисызықты интегро-дифференциалдық теңдеулердің басқарылуының кейбір шарттары леммалар түрінде дәлелденіп, басқару есебінің шешілуінің анықтамасы берілген.

Түйін сөздер: функция, квазисызықты жүйелер, интегральды-дифференциалдық теңдеулер, импульстік әсер, шеттік есептер.

R.D. Seilova[1], M.Zh. Talipova, A. Turganbaev[1]
[1]Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

SOME CONTROL CONDITIONS FOR QUASI-LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE INFLUENCE

Abstract

The study of edge control problems for quasilinear integro-differential systems with pulsed action is an urgent area of modern mathematics, which is used in modeling complex dynamic processes. The main goal of studying the controllability of quasilinear integro-differential equations with pulsed action is to develop methods that allow determining the conditions under which the system is controllable, to develop algorithms that allow you to build control actions to implement the desired trajectory of the system, and to investigate the stability of solutions under conditions of both regular and abrupt external changes. This article discusses some conditions of controllability of the boundary value problem for a qua zilinear system of integro-differential equations with pulsed action. Processes in which pulsed action does not occur at pre-prescribed time points, but in mo time points, which are determined by the state of the system, have been investigated. The article proved some conditions of controllability of quasilinear integro-differential equations with pulsed action in the form of lemmas, a definition of solvability of the control problem is given.

Keywords: function, quasilinear systems, integro-differential equations, impulse impact, boundary value problems.

Основные положения

В данной статье проводится литературный обзор работ, посвященных общей теории нелинейных, периодических, почти периодических колебаний.

В данной работе исследуются вопросы связанные с решениями в обобщенном смысле для системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Рассматриваются как линейные, так и нелинейные системы уравнений. Вводятся определения периодических по части переменных решений в обобщенном смысле. Установлены достаточные условия для существования и единственности таких решений, получены необходимые и достаточные условия искоемого решения в широком смысле для нелинейных систем уравнений.

Введение

Дифференциальные уравнения играют важную роль в математике и ее приложениях. Они связывают функцию с ее производными и позволяют моделировать различные явления в физике, химии, биологии, экономике и других областях науки [1].

Управляемость является одним из ключевых вопросов в теории динамических систем. Для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием эта задача особенно важна, поскольку они часто описывают сложные процессы с непрерывными и резкими возмущениями. Изучение управляемости в таких системах требует совмещения аналитических и численных методов, что позволяет понять основные механизмы реализации необходимой траектории или состояния.

Актуальность исследуемой темы обусловлена растущей сложностью задач, связанных с анализом и управлением динамических систем. Импульсные воздействия играют ключевую роль в моделировании процессов, которые сопровождаются резкими изменениями, такими как скачкообразные возмущения, внезапные переходы или воздействия, возникающие в ограниченные моменты времени. Например, в биологии это могут быть резкие изменения в численности популяций под воздействием экологических факторов, в экономике – внезапные финансовые кризисы, а в технике – переходные процессы в системах автоматизации.

Исследование условий управляемости таких систем необходимо для решения задач, связанных с обеспечением стабильности, оптимальности и надежности их функционирования. Оно требует разработки как теоретических подходов, так и численных методов, которые позволяют учитывать сложные особенности данных систем: нелинейность, интегральные члены и импульсные воздействия.

В свете современных задач управления, анализ условий управляемости квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием не только расширяет математический инструментарий, но и способствует развитию прикладных методов моделирования.

Цель этой работы исследовать условия управляемости квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Методология исследования.

Исследование краевых задач управления для квазилинейных интегро-дифференциальных систем с импульсным воздействием является актуальной областью современной математики, находящей применение в моделировании сложных динамических процессов.

Управляемость интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, задачи управления для линейных и слаболинейных задач рассмотрены в работах многих авторов [2-10].

Важно отметить, что помимо теоретических результатов, таких как определение условий разрешимости, разработка конструктивных методов решения задачи управляемости и решение задачи оптимальности, здесь также нашли применение практические подходы в областях электротехники, робототехники, автоматического управления и экономики.

Очевидно, что задачу устойчивости управляемого движения, особенно асимптотической устойчивости, тоже можно рассматривать, как управление краевой задачей. Также близкими являются задача стабилизации и периодическая задача [8].

Краевые задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений, задачи управления дифференциальными уравнениями в частных производных, а также задачи управления уравнениями в Банаховых пространствах и интегро-дифференциальными уравнениями рассматривались во многих научных работах [11–15].

С появлением новых типов дифференциальных уравнений и развитием численных методов решения задач управления особое внимание стали привлекать системы, описываемые уравнениями с запаздыванием, дискретными моделями, стохастическими дифференциальными уравнениями и уравнениями с включениями [16].

Для решения задач управления применяется второй метод Ляпунова. Этот метод, который еще называют методом функций Ляпунова, успешно применяется при исследовании устойчивости управляемых систем. Наиболее распространенным в решении задач управления для нелинейных систем являются метод неподвижных точек, теоремы Банаха, Шаудера, Тихонова о неподвижных точках, во многих работах используются конструктивные методы, основанные на последовательных приближениях методе Ньютона. Специальный критерий управляемости был получен для уравнения Ван дер Поля [17].

Определение критериев управляемости для линейных систем основано на использовании интегральной формулы Коши с последующим построением линейной алгебраической системы. Как следствие этого метода возникают ранговые признаки управляемости [2-9].

Теория дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями берет свое начало из работы Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [18], в которой показано, что для исследования таких систем эффективно применять асимптотические методы нелинейной механики. Вопросам управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями, посвящены следующие исследования [18-20].

В работах [21-22] исследована однозначная разрешимость начальной задачи для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных высшего порядка с вырожденным ядром.

Задача управления для квазилинейной системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием и метод сведения к уравнениям с фиксированными моментами импульсного воздействия разработаны в работах [23-25].

Результаты исследования

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, имеющую вид

$$dx/dt = A(t)x + \int_{\alpha}^{t} K(t,s)x(s)ds + C(t)u(t) + f(t) + \mu g(t,x,u,\mu), t \neq \theta_i + \mu\tau_i(x,\mu),$$
$$\Delta x(\zeta_i) = B_i x(\zeta_i) + \sum_{\alpha<\zeta_j<\zeta_i} D_{ij}x(\zeta_j) + Q_i v_i + I_i + \mu W_i(x(\zeta_i), v_i, \mu), i = 1,2, \ldots .. p, \quad (1)$$

и, краевое условие

$$x(\alpha) = a, \ x(\beta) = b \quad (2)$$

где μ >0 – малый параметр, $x \in R^n, \Delta x(\theta_i) \equiv x(\theta_i +) - x(\theta_i), t \in [\alpha, \beta], A(t), K(t,s), i = \overline{1,p}$,- $(n \times n)$ матрицы, столбцы матрицы $A(t)$ – элементы пространства L_2^n [α,β], $\{f, I\} \in \Pi^n[\alpha,\beta], D_{ij}, B_i, i,j = \overline{1,p}$ – постоянные $(n \times n)$ матрицы, матрица $K(t,s)$ интегрируемая с квадратом на множестве $[\alpha,\beta]\times$ $[\alpha,\beta]$, матрицы $C(t)$ и $Q_i, i = \overline{1,p}$, размера $n \times m, m$ – фиксированное натуральное число, столбцы матрицы $C(t)$ являются функциями из $L_2^n[\alpha,\beta]$, $Q_i, i = \overline{1,p}$, где $L_2^n[\alpha,\beta]$ – пространство функций, интегрируемых с квадратом на отрезке $[\alpha,\beta]$;

$D^r[1,p]$ – множество конечных последовательностей $\{\xi_i\}, i = \overline{1,p}$; (,) – скалярное произведение.

Дополнительно предполагаем, что функции g, $W_i, i = \overline{1,p}$ непрерывны по всем аргументам и непрерывно дифференцируемые по всем координатам векторов x, u, v. Движение, определенное уравнением (1), при фиксированных μ, $\{u,v\} \in \Pi^m[\alpha,\beta]$ происходит следующим образом. Изображающая точка $P_t(t, x(t))$ решения $x(t) = x(t,\alpha,a)$ уравнения

$$dx/_{dt} = A(t)x(t) + \int_{\alpha}^{\beta} K(t,s)x(s)ds + C(t)u(t) + f(t) + \mu g(t,x,u,\mu), \quad (3)$$

начинает свое движение в точке (α, a) и продолжает вдоль интегральной кривой этого решения до момента $t = \zeta_1$, когда P_t встречает первую поверхность разрыва $t = \theta_1 + \mu\tau_1(x,\mu)$. Таким образом, значение $t = \zeta_1$ определяется как удовлетворяющее равенству $\zeta_1 = \theta_1 + \mu\tau_1(x(\zeta_1),\mu)$.

В этот момент P_t испытывает скачок на величину

$$\Delta x|_{t=\zeta_1} = B_1 x(\zeta_1) + \sum D_{11} x\,(\zeta_1) + Q_1 v_1 + I_1 + \mu W_1(x(\zeta_1), v_1, \mu)$$

и продолжает двигаться вдоль интегральной кривой решения $x(t, \zeta_1, x(\zeta_1 +))$ уравнения (3) пока P_t не встретит следующую поверхность разрыва и т.д.

Заметим, что каждое решение уравнения (1) является функцией из $PAC[\alpha,\beta]$, если оно определено на $[\alpha,\beta]$, где $PAC[\alpha,\beta]$ – множество функций $x(t)$ кусочно абсолютно непрерывных, непрерывных слева во всех точках $[\alpha,\beta]$ и испытывающих разрывы первого рода в точках $\{\theta_i\}, i = \overline{1,p}$;

Определение. Будем говорить, что разрешима задача управления краевой задачей γ_μ, если для каждого ограниченного множества $G \subset R^n$ существует $\mu_0, \mu_0 \in R^1, \mu_0 > 0$, такое, что для каждых $\{a, b\,\} \subset G$ и $\mu < \mu_0$ существует управление $\{u,v\} \in \Pi^m[\alpha,\beta]$, при котором уравнение (1) допускает решение, удовлетворяющее краевому условию (2).

Пусть $s \in R, s > 0$ и пусть G_s есть множество элементов (x, u, v) таких, что $\|x\| + \|u\| + \|v\| \leq s$, где $\|\cdot\|$ есть евклидовая норма в R^k, $k \in$N.

Для фиксированного положительного числа $\mu_1 \in R$, определим множество

$$G_s = \{(x, u, v, t, i, \mu) | (x, u, v) \in \Pi_s, \alpha \leq t \leq \beta, i = 1,2,3\ldots, p, \mu \leq \mu_1\}.$$

Фиксируем $H \in R, H > 0$ и пусть

m$_1$ = $\max\{\sup_t \|A(t)\|, \sup_t \|C(t)\|, \sup_{t,s} \|K(t,s)\|, \max_i \|B_i\| \max_{i,j} \|D_{ij}\|\}$,

m$_2$ = $\max\{\sup_t \|f(t)\|, \max_i \|I_i\|\}$,

m$_3$ = $\max\{\max_{G_H} \|g\|, \max_{G_H} \|W\|, \max_{G_H} \|\tau\| \}$.

Лемма 1. Если

$$\mu_1 m_3 < min(\theta_1 - \alpha, \beta - \theta_p) \tag{4}$$

и для всех x, μ, i и G$_H$ справедливо, что

$$\theta_{i+1} + \mu\tau_{i+1}(x, \mu) < \theta_i + \mu\tau_i(x, \mu), \tag{5}$$

тогда каждое решение уравнения (1), определенное на $[\alpha, \beta]$ и, принимающее значения в G_H пересекает каждую из поверхностей $t = \theta_i + \mu\tau_i(x, \mu), i = 1, \ldots, p$, по меньшей мере один раз.

Доказательство. Фиксируем $i = 1, \ldots, p$ и обозначим R_i множество значений функции $\theta_i + \mu\tau_i(x, \mu)$, где $|x| \leq H$ и $\mu \leq \mu_1$ фиксировано. Т.к. множество $\|x\| \leq H$ компактно, то R_i является отрезком $[\alpha_i, \beta_i] \subset R$. В силу условий (4), (5), найдем, что

$$\alpha < \alpha_1 \leq \beta_1 < \alpha_2 \leq \beta_2 <\ldots< \alpha_p \leq \beta_p < \beta. \tag{6}$$

Пусть $x(t): [\alpha, \beta] \to G_H$, решение уравнения (3). Покажем, что $x(t)$ пересечет обязательно первую поверхность $t = \theta_1 + \mu\tau_1(x, \mu)$. Построим функцию $\phi_1(t) = t - \theta_1 - \mu\tau_1(x(t), \mu)$. Предположим противное, что $x(t)$ не пересекает поверхность $t = \theta_1 + \mu\tau_1(x, \mu)$. Тогда функция $\phi_1(t)$ непрерывна на промежутке $[\alpha, \alpha_2]$ и

$$\phi(\alpha) = \alpha - \theta_1 - \mu\tau_1(x(\alpha), \mu) \leq \alpha - \alpha_1 < 0,$$
$$\phi(\alpha_2) = \alpha_2 - \theta_1 - \mu\tau_1(x(\alpha_2), \mu) \geq \alpha_2 - \beta_1 > 0.$$

Значит, по теореме Коши существует точка ξ_1 такая, что $\phi(\xi_1) = 0$, т.е.

$$\xi_1 = \theta_1 + \mu\tau_1(x(\xi_1), \mu), \tag{7}$$

$\xi_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$. Точка $t = \xi_1$ является по определению точкой разрыва решения $x(t)$ и моментом пересечения решением $x(t)$ поверхности $t = \theta_1 + \mu\tau_1(x, \mu)$.

Пусть теперь $t = \xi_1^k$, последняя точка встречи решения $x(t)$ и поверхности $t = \theta_1 + \mu\tau_1(x, \mu)$.

Построим функцию $\phi_2(t) = t - \theta_2 - \mu\tau_2(x(t), \mu)$. Рассматривая $\phi_2(t)$ на промежутке $[\xi_2^0, \alpha_3]$, где точка $\xi_0 \in (\beta_1, \alpha_2)$, также, как и функцию $\phi_1(t)$ на $[\alpha, \alpha_2]$, докажем существование точки $t = \xi_2$ встречи $x(t)$ с поверхностью $t = \theta_2 + \mu\tau_2(x, \mu)$. Продолжая этот процесс, получим полное доказательство леммы.

Для того, чтобы получить условие, предположим теперь, дополнительно, что существует постоянная $L \in R, L > 0$, такая, что равномерно в области G_H

$$\|g(t,x_1,u_1,v^1,\mu) - g(t,x_2,u_2,v^2,\mu)\| \leq L\{\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\| + \|v^1 - v^2\|\},$$
$$\|W_i(x_1,v^1,\mu) - W_i(x_2,v^2,\mu)\| \leq L\{\|x_1 - x_2\| + \|v^1 - v^2\|\}, \quad (8)$$
$$|\tau_i(x_1,\mu) - \tau_i(x_2,\mu) \leq L\|x_1 - x_2\||.$$

Обозначим $\gamma(\mu) = m_1 H(2 + (\beta - \alpha)) + m_2 + \mu m_3$.

Лемма 2. Пусть система (1) определена в области G_H и $\mu < \mu_2$, где

$$\mu_2 \leq \mu_1 \text{ и } \mu_2 L\gamma(\mu_2) < 1 \quad (9)$$

Тогда, если

$$\tau_i(x,\mu) \geq \tau_i((E + B_i + D_{ii})x + \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} D_{ij}x^{(j)} + Q_i v_i + I_i + \mu W_i(x,v,\mu),\mu), \quad (10)$$

для всех $\|x\|$<H, $\|x^{(j)}\|$<H, $j = 1,2,\ldots,i-1$, и $\|v\|$<H, тогда каждое решение $x(t)$ уравнения (1) встречает любую из поверхностей разрыва $t = \theta_i + \mu\tau_i(x,\mu)$, $i = \overline{1,p}$, не больше, чем один раз.

Доказательство. Фиксируем $i = \overline{1,p}$ и предположим противное, что решение $x(t)$ уравнения (1) пересекает поверхность $t = \theta_i + \mu\tau_i(x,\mu)$, дважды в моменты времени $t = \xi_i^1, t = \xi_i^2, \xi_i^1 < \xi_i^2$. На промежутке $(\xi_i^1, \xi_i^2]$ верно, что

$$x(t) = x(\xi_i^1) + B_i x(\xi_i^1) + \textstyle\sum_{\alpha<\xi_j<\xi_i} D_{ij}\, x(\xi_j) + Q_i v_i + I_i + \mu W_i(x(\xi_i^1), v_i, \mu) +$$
$$+ \int_{\xi_i^1}^{t} [A(s)x(s) + \int_\alpha^s K(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma + C(s)u(s) + f(s) + \mu g(s,x(s),u(s),\mu)]ds. \quad (11)$$

Теперь, применив (8), (9), (10) и (11), найдем, что

$$\xi_i^2 - \xi_i^1 = \theta_i + \mu\tau_i(x(\xi_i^2),\mu) - \theta_i - \mu\tau_i(x(\xi_i^1),\mu) \leq \mu L\gamma(\mu)(\xi_i^2 - \xi_i^1)$$

или

$$(\xi_i^2 - \xi_i^1)(1 - \mu L\gamma(\mu)) \leq 0,$$

так как согласно условию (9) $1 - \mu L\gamma(\mu) > 0$, то $\xi_i^2 - \xi_i^1 \leq 0$, а это противоречит предположению $\xi_i^2 > \xi_i^1$. Лемма доказана.

Дискуссия

Исследование краевых задач управления для квазилинейных интегро-дифференциальных систем с импульсным воздействием активно развивается, отражая сложность и многообразие динамических процессов в различных областях науки и техники.

Современные системы, будь то биологические, экономические или технические, часто характеризуются сложной структурой, включающей как непрерывные, так и дискретные процессы, что требует применения математических моделей, способных точно отражать их поведение, импульсные воздействия в таких системах играют важную роль, так как позволяют моделировать явления, связанные с внезапными изменениями или событиями.

Кроме того, квазилинейные интегро-дифференциальные уравнения с импульсным воздействием предоставляют универсальный подход к описанию систем с наследственными эффектами и сложной временной динамикой. Это делает их незаменимыми в исследованиях, связанных с прогнозированием поведения систем, анализом устойчивости и разработкой эффективных стратегий управления.

Таким образом, данное направление исследований находится на стыке фундаментальной математики и прикладных задач, что делает его востребованным и перспективным как для теоретиков, так и для практиков, работающих в различных областях.

Заключение

В статье рассмотрена задача управления краевой задачей для квазилинейной системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Особенностью случая, который рассматривается в работе является то, что слабые нелинейные возмущения включены не только в правую часть уравнений, но и в уравнения для определения моментов импульсного воздействия. Доказаны в виде леммы, при каких условиях каждое решение искомого интегро-дифференциального уравнения, пересекает поверхность по меньшей мере один раз.

Благодарность

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ИРН AP23487275)

Список использованных источников

[1] Rodríguez F., López J.C.C., Castro M.A. Models of Delay Differential Equations. MDPI; Basel, Switzerland: 2021.

[2] S.A. Aisagaliev, A.P. Belogurov. Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control // Siberian Mathematical Journal, Vol. 53, No. 1, 2012, pp. 13-28.

[3] S.A. Aisagaliev. Controllability theory of the dynamic systems. – Almaty, Kazakh university, 2014. – 158 p.

[4] S.A. Aisagaliev. Lectures on optimal control. – Almaty: Kazakh university, 2007. – 278 p.

[5] Aisagaliev, S., Zhunussova Z., Akca H. Construction of a solution for optimal control problem with phase and integral constraints // International Journal of Mathematics and Physics, 2019, 10(1), P. 11–22

[6] Akhmet M.U. Principles of discontinuous dynamical systems. Springer, New-York, 2010.

[7] S.A. Aisagaliev, I.V. Sevrugin. Controllability and high-speed performance of processes described by ordinary differential equations // Bulletin KazNU, – 2014, No. 2(81), pp. 20-37.

[8] Айсагалиев С.А., Бияров Т.Н., Калимолдаев М.Н. Управляемость сложных электрических силовых систем // Управление динамических систем/ Сб. научн. тр. КазГУ. - Алма-Ата, 1987.- С. 9 - 13, 92.

[9] Akhmet M., Cag S. Chattering as a Singular Problem. Nonlinear Dynamics, 2017; 90(4): P. 2797–2812.

[10] Akhmet M., Dauylbayev M., Mirzakulova A. A singularly perturbed differential equation with piecewise constant argument of generalized type, Turkish Journal of Mathematics 2018; 42(4): 1680-1685.

[11] Dzhumabaev D.S. Solvability of a Linear Boundary Value Problem for a Fredholm Integro-Differential Equation with Impulsive Inputs, Differential Equations. Vol. 51, No. 9 (2015), P. 1180–1196.

[12] Bekbauova A. CMMSE: Solutions in a Broad Sense to the Boundary Value Problem for First Order Partial Differential System, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2024, https://doi.org/10.1002/mma.10669

[13] Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. Periodic problem for an impulsive system of the loaded hyperbolic equations, Nonlin. Anal., Vol. 72 (2018), 1–8.

[14] Mynbayeva S.T., Assanova A.T., Uteshova R.E. A Solution to a Linear Boundary Value Problem for an Impulsive Integro-Differential Equation, Differential Equations and Dynamical Systems, (2023). DOI:10.21203/rs.3.rs-2465621/v1

[15] Bakirova E.A., Iskakova N.B., Kadirbayeva Z.M. Numerical implementation for solving the boundary value problem for impulsive integro-differential equations with parameter, KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series, Vol. 119, No. 3 (2023), 19–29. DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS2023v119i3a2

[16] Barbu V., Iannelli M., Martcheva M. On the controllability of the Lotka-McKendrick model of population dynamics.// J. Math. Anal. Appl.- Vol.253(2001), № 1.-P. 142 - 165.

[17] Ройтенберг Е.Я. Достаточные условия управляемости для нелинейных систем // Вестник МГУ. Сер.1. математика и механика - 1969, №24.- С. 28-33.

[18] Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. -К.: Изд-во АН УССР, 1937.- 365 с.

[19] Мышкис А.Д., Самойленко А.М. Системы с толчками в заданные моменты времени // Математический сб.- 1967.- Т. 74, вып. 2.- С. 202-208.

[20] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием //- К.: Вища шк., 1987. -287 с.

[21] Yuldashev T.K., Odinaev R.N., Zarifzoda S.K. On exact solutions of a class of singular partial integro-differential equations, Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. №3. P. 676-684., https://doi.org/10.1134/S1995080221030240

[22] Yuldashev T.K., Fayziyev A.K. Determination of the coefficient function in a Whitham type nonlinear differential equation with impulse effects, Nanosystems: Physics. Chemistry. Mathematics, №14, 3 (2023), 312–320, https://doi.org/10.17586/2220-8054-2023-14-3-312-320

[23] Akhmet M., Tleubergenova M., Seilova R., Nugayeva Z. Symmetrical Impulsive Inertial Neural Networks with Unpredictable and Poisson-Stable Oscillations, Symmetry, 2023, 15(10), 1812, https://doi.org/10.3390/sym15101812

[24] Akhmet M., Aviltay N., Dauylbayev M. & Seilova R. A case of impulsive singularity. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, (2023). 117(1). https://doi.org/10.26577/JMMCS.2023.v117.i1.0

[25] N. Aviltay, M. Akhmet and A. Zhamanshin, Asymptotic solutions of differential equations with singular impulses. Carpathian Journal of Mathematics, vol. 40, no. 3, pp. 581–598, 2024, https://doi.org/10.37193/cjm.2024.03.02

References

[1] Rodríguez F., López J.C.C., Castro M.A. Models of Delay Differential Equations. MDPI; Basel, Switzerland: 2021.

[2] S.A. Aisagaliev, A.P. Belogurov. Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control) // Siberian Mathematical Journal, Vol. 53, No. 1, 2012, pp. 13-28.

[3] S.A. Aisagaliev. Controllability theory of the dynamic systems. – Almaty, Kazakh university, 2014. – 158 p.

[4] S.A. Aisagaliev. Lectures on optimal control. – Almaty: Kazakh university, 2007. – 278 p.

[5] Aisagaliev S., Zhunussova Z., Akca H. Construction of a solution for optimal control problem with phase and integral constraints // International Journal of Mathematics and Physics, 2019, 10(1), P. 11–22

[6] Akhmet M.U. Principles of discontinuous dynamical systems, Springer, New-York, 2010.

[7] S.A. Aisagaliev, I.V. Sevrugin. Controllability and high-speed performance of processes described by ordinary differential equations // Bulletin KazNU, – 2014, No. 2(81), pp. 20-37.

[8] Aisagaliev S.A., Biyarov T.N., Kalimoldaev M.N. Controllability of complex electrical power systems // Management of dynamic systems / Sat. scientific tr. KazGU. - Alma-Ata, 1987.- P. 9 - 13, 92.

[9] Akhmet M., Cag, S. Chattering as a Singular Problem, Nonlinear Dynamics 2017; 90(4): 2797–2812.

[10] Akhmet M., Dauylbayev M., Mirzakulova A. A singularly perturbed differential equation with piecewise constant argument of generalized type, Turkish Journal of Mathematics 2018; 42(4): 1680-1685.

[11] Dzhumabaev D.S. Solvability of a Linear Boundary Value Problem for a Fredholm Integro-Differential Equation with Impulsive Inputs, Differential Equations. Vol. 51, No. 9 (2015), 1180–1196.

[12] Bekbauova A., CMMSE: Solutions in a Broad Sense to the Boundary Value Problem for First Order Partial Differential System, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2024, https://doi.org/10.1002/mma.10669

[13] Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. Periodic problem for an impulsive system of the loaded hyperbolic equations, Nonlin. Anal., Vol. 72 (2018), 1–8.

[14] Mynbayeva S.T., Assanova A.T., Uteshova R.E. A Solution to a Linear Boundary Value Problem for an Impulsive Integro-Differential Equation, Differential Equations and Dynamical Systems, (2023). DOI:10.21203/rs.3.rs-2465621/v1

[15] Bakirova E.A., Iskakova N.B., Kadirbayeva Z.M. Numerical implementation for solving the boundary value problem for impulsive integro-differential equations with parameter, KazNU Bulletin. Mathematics,

Mechanics, Computer Science Series, Vol. 119, No. 3 (2023), 19–29. DOI: https://doi.org/10.26577/JMMCS2023v119i3a2

[16] Barbu V., Iannelli M., Martcheva M. On the controllability of the Lotka-McKendrick model of population dynamics.// J. Math. Anal. Appl.- Vol.253(2001), № 1.-P. 142 - 165.

[17] Roitenberg E.Ya. Sufficient controllability conditions for nonlinear systems // Bulletin of Moscow State University. Ser.1. mathematics and mechanics - 1969, No. 24.- P. 28-33.

[18] Krylov N.M., Bogolyubov N.N. Introduction to nonlinear mechanics. -K.: Publishing House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1937.- 365 p.

[19] Myshkis A.D., Samoilenko A.M. Systems with shocks at given times // Mathematical collection - 1967. - T. 74, issue. 2.- pp. 202-208.

[20] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Differential equations with impulse action //- K.: Vishcha school, 1987. -287 p.

[21] Yuldashev T.K., Odinaev R. N., Zarifzoda S. K. On exact solutions of a class of singular partial integro-differential equations, Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. № 3. P. 676-684., https://doi.org/10.1134/S1995080221030240

[22] Yuldashev T.K., Fayziyev A.K. Determination of the coefficient function in a Whitham type nonlinear differential equation with impulse effects, Nanosystems: Physics. Chemistry. Mathematics, №14, 3 (2023), 312–320, https://doi.org/10.17586/2220-8054-2023-14-3-312-320

[23] Akhmet, M., Tleubergenova, M., Seilova, R., Nugayeva, Z. Symmetrical Impulsive Inertial Neural Networks with Unpredictable and Poisson-Stable Oscillations, Symmetry, 2023, 15(10), 1812, https://doi.org/10.3390/sym15101812

[24] Akhmet, M., Aviltay, N., Dauylbayev, M., & Seilova, R. A case of impulsive singularity. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 2023. 117(1). https://doi.org/10.26577/JMMCS.2023.v117.i1.0

[25] N. Aviltay, M. Akhmet and A. Zhamanshin. Asymptotic solutions of differential equations with singular impulses. Carpathian Journal of Mathematics, vol. 40, no. 3, pp. 581–598, 2024, https://doi.org/10.37193/cjm.2024.03.02