МРНТИ 14.35.09
УДК 378. 01

Д.Н. Нургабыл[1], К.С. Нурпеисов[1]

[1]*Жетысуский государственный университет им. И.Жансугурова, г.Талдыкорган, Казахстан*

ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ МЕТОДОМ СЛЕДОВ

Аннотация

В данной статье обосновано, что при решении задач на построение сечений многогранников студенты и учащиеся не только выполняют построения, применяют аксиомы, свойства планиметрии и стереометрии, но и обучаются алгоритмическому мышлению, умению логически рассуждать, делать правильные аргументации и умозаключения. Установлено, что решение задач на построение сечений многогранников занимает особое место в процессе формирования пространственного представления и в развитии математического мышления, как студентов, так и школьников. Исходя из определения следа секущей плоскости, сформулированы правила построения сечений многогранника методом следов. Разработаны задачи на построения сечений многогранников в случае, когда: сечение призмы задается следом l, который расположен на плоскости основания призмы и не имеет общих точек с основанием данной призмы и точкой K, принадлежащей некоторому боковому ребру; секущая плоскость определена следом и некоторой точкой M, принадлежащей боковому ребру пирамиды; сечение пирамиды определяется точками M, N, K, двое из них расположены на различных ребрах, а третья является внутренней точкой грани данной пирамиды.

Ключевые слова: секущая плоскость, сечение многогранника, метод следов, алгоритмическое мышление, пространственное представление.

Аңдатпа

Д.Н. Нұрғабыл[1], Қ.С. Нұрпеисов[1]
[1]*І.Жансүгіров атындағы Жетісу мемлекеттік университеті, Талдықорған қ., Қазақстан*

КӨПЖАҚТАРДЫҢ ҚИМАСЫН ІЗДЕР ӘДІСІМЕН САЛУ

Бұл мақалада студенттер мен оқушылар копжақтар қимасын салу барысында планиметрия мен стреометрияның аксиомалары мен қасиеттерін ғана пайдаланып қоймайтыны, сонымен қатар алгоритмдік ойлауға, логикалық ой тұжырымдауға, дұрыс ой қорытуға және дәлелдеме келтіруге үйренетіні негізделген. Студенттер мен оқушылардың математикалық ойлау қабілетін дамытуда және кеңістікті бейнелей алуын қалыптастыруда көпжақтардың қимасын салу есептері ерекше орын алатыны тұжырымдалған. Қима жазықтықтың анықтамасы негізінде қопжақтардың қимасын іздер әдісі бойынша салу ережесі тұжырымдалды. Көпжақтардың қимасын салуға есептер: призманың қимасы призманың табан жазықтығында жататын l ізімен және призманың бүйір қырында орналасқан K нүктесімен анықталатын; пирамиданың қимасы берілген l ізімен және пирамиданың бүйір қырында орналасқан нүктемен анықталатын; пирамиданың қимасы екі нүктесі пирамиданың әртүрлі бүйір қырларында орналасқан, ал үшіншісі пирамиданың бүйір жағының ішінде орналасқан M, N, K нүктелерімен анықталатын жағдайлар үшін құрастырылды.

Түйін сөздер*:* қиюшы жазықтық, көпжақтар қимасы, іздер әдісі, алгоритмдік ойлау, кеңістікті бейнелеу.

Abstract

CONSTRUCTION OF SECTIONS OF POLYHEDRON METHOD OF TRACES

Nurgabyl D.N.[1], Nurpeissov K.S.[1]
[1]*Zhetysu State University named after I. Zhansugurova, Taldykorgan, Kazakhstan*

In this article it is proved that in solving problems on the construction of sections of polyhedra, students not only perform constructions, they also apply axioms, properties of planimetry and stereometry, but also learn algorithmic thinking, the ability to reason logically, make correct arguments and conclusions. It is established that the solution of problems on the construction of sections of polyhedra occupies a special place in the process of forming a spatial representation and in the development of mathematical thinking, both students and schoolchildren. Based on the definition of the trace of the secant plane, the rules for constructing sections of the polyhedron by the traces method are formulated. Problems on construction of sections of polyhedra are developed in the case when:: the section of the prism is given by the trace l, which is located on the plane of the base of the prism and does not have common points with the base of this prism and by point K, belonging to some side rib; the secant plane is defined by the trace l and some point M, belonging to the side rib of the pyramid; the section of the pyramid is determined by points M, N, K, two of them are located on different ribs, and the third is the internal point of the face of this pyramid.

Keywords*:* secant plane, section of polyhedron, method of traces, algorithmic thinking, spatial representation.

Введение

При обучении будущих учителей математики задачи на построение занимает особое место в развитии мышления студентов. При решении задач на построение, как у студентов, так и у школьников формируется алгоритмический, логистический стиль мышления. Эффективность задач на построения в развитии логического мышления в большей мере зависит от степени познавательной и исследовательской активности студентов и школьников при их решении. Иначе говоря, одним из целей решения задач на построение является активизация мыслительной деятельности школьников и студентов на занятиях. При решении задач на построения студенты и учащиеся не только выполняют построения, применяют аксиомы, свойства планиметрии и стереометрии, но и обучаются алгоритмическому мышлению, умению логически рассуждать, делать правильные аргументации и умозаключения [1]. В связи с этим, необходимо выделить такие задачи и упражнения на построения, которые эффективно активизировали бы мыслительную деятельность студентов и школьников. Это: задачи, рассчитанные на воспроизведение изученного учебного материала, при решении которых у студентов формируется знание; задачи, при решении которых формируется понимание, при этом возникают некоторые новые мысли; задачи носящий исследовательский характер. Из указанных задач, только последние два активизирует мыслительную деятельность студентов [2].

Решение задач на построение включает в себя следующие этапы: анализ, построение, доказательство и исследование. В связи с этим решение задач на построение сечений многогранников занимает особое место в процессе формирования пространственного представления и в развитии математического мышления как студентов, так и школьников.

Определение. Пусть плоскость π пересекается с плоскостью основания многогранника по некоторой прямой l, то прямая l называется следом секущей плоскости π в плоскости основания данного многогранника [3].

Из этого определения заключаем, что след задается двумя точками, расположенные одновременно в секущей плоскости и в плоскости некоторой грани рассматриваемого многогранника, или задается как произвольная прямая, расположенная в секущей плоскости и в плоскости основания многогранника, не имеющих общих точек с основанием данного многогранника.

Заметим, что в каждой точке данного следа пересекаются прямые, расположенные в секущей плоскости и прямые расположенные в плоскости основания.

Таким образом, мы можем сформулировать следующие правила построения сечений многогранника методом следа:

- Если заданы две точки секущей плоскости на одной той же грани многогранника и другая точка некоторого ребра другой грани многогранника, то следом сечения секущей плоскости является прямая, проходящая через две точки, расположенные на одной грани многогранника. И после этого следует определить точки пересечения построенного следа с той гранью, в котором расположена данная третья точка многогранника.
- Если определен след на основании многогранника как прямая пересечения плоскости сечения с основанием многогранника и дана некоторая точка, принадлежащая некоторой грани, то следует определить точки пересечения этого следа с данной гранью рассматриваемого многогранника.

Таким образом, суть метода следа заключается в определении прямой(следа), которая является пересечением секущей плоскости с плоскостью некоторой грани многогранника. Используя построенный след, можно будет построить стороны искомого сечения, расположенные на гранях многогранника.

Решение задач на построение сечений многогранников

Известно, что плоскость определяется тремя заданными точками, или прямой и точкой, заданной вне этой прямой. В связи с этим, вначале можно было бы предложить задачу на построение сечения данного многогранника плоскостью, которая определяется тремя заданными точками, лежащие на различных ребрах многогранника. Такие задачи были рассмотрены в работах [4, 5]. В этой работе сначала мы сконструируем задачи на построение сечения данного многогранника плоскостью, которая определяется заданным следом, который расположен на плоскости основания многогранника и не имеет общих точек с основанием данного многогранника, и точкой расположенная на поверхности данного многогранника.

Таким образом, сконструируем задачи на построения сечения многогранников.

Задача 1. Построить сечение пятиугольной прямой призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ секущей плоскостью π. Плоскость π задана следом l, который расположен на плоскости основания $ABCDE$ и не имеет общих точек с основанием данной призмы и точкой K, принадлежащей боковому ребру CC_1, но имеет общую точку пересечения с продолжением каждого ребра основания этой призмы.

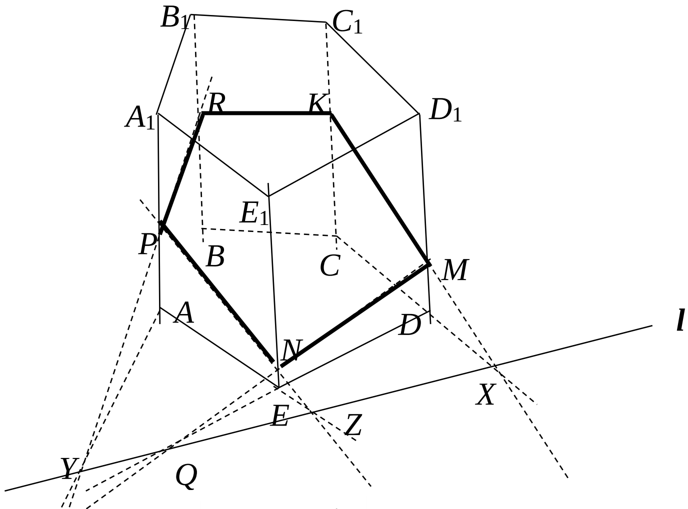

Рисунок 1.

Анализ. Допустим, что многоугольник $KMNPR$ – искомое сечение (рис. 1). Для построения искомого сечения $KMNPR$ достаточно построить его вершины M, N, P, R, которые являются точками пересечения секущей плоскости π с соответствующими ребрами DD_1, EE_1, AA_1, BB_1, призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

Для построения точки $M = \pi \cap DD_1$ достаточно построить прямую, которая, получается, от пересечения данной секущей плоскости π с плоскостью грани DCC_1D_1. Для этого, в свою очередь, достаточно построить в плоскости этой грани еще одну точку, принадлежащую секущей плоскости π. Как найти изображение такой точки?

Так как прямая l лежит в плоскости основания призмы, то она может пересекать плоскость грани CDD_1C_1 лишь в точке, которая принадлежит прямой CD, т.е. в точке $X = CD \cap l$. Точки K и X принадлежат к одной той же плоскости. Отсюда определяем точку $M = KX \cap DD_1$. Для построения других вершин, достаточно построить точки Y, Q, Z принадлежащие прямой l и соответствующим граням ABB_1A_1, DEE_1D_1, AEE_1A_1. Таким образом, задача о построении сечения данного многогранника разрешима.

Построение:

1) Как уже было замечено, данный след l и прямая CD лежат на плоскости основания призмы. Тогда мы можем определить точку пересечения следа l и прямой CD. Обозначим эту точку через $X = l \cap CD$, где $X \in \pi$;

2) Так как точки X и K принадлежат одной той же плоскости грани DCC_1D_1, то мы можем провести прямую XK, принадлежащая секущей плоскости π. Прямая XK пересекает ребро DD_1 в некоторой точке $M = \pi \cap DD_1$;

3) След l и прямая ED лежат на плоскости основания призмы. Тогда мы можем определить точку пересечения следа l и прямой ED. Обозначим эту точку через $Q = l \cap ED$, которая принадлежит секущей плоскости π;

4) Так как точки Q и M принадлежат одной той же плоскости грани DEE_1D_1, то мы можем провести прямую QM, принадлежащая секущей плоскости π. Прямая QM пересекает ребро EE_1 в некоторой точке $N = \pi \cap EE_1$, где $N \in \pi$;

5) Данный след l и прямая AE лежат на плоскости основания призмы. Тогда мы можем определить точку пересечения следа l и прямой AE. Обозначим эту точку через $Z = l \cap AE$, которая принадлежит секущей плоскости π;

6) Точки Z и N принадлежат одной той же плоскости грани AEE_1A_1, и принадлежат секущей плоскости π, то мы можем провести прямую ZN, принадлежащая секущей плоскости π. Прямая ZN пересекает ребро AA_1 в точке $P = \pi \cap AA_1$;

7) След l и прямая AB лежат на плоскости основания призмы. Тогда мы можем определить точку пересечения следа l и прямой AB. Обозначим эту точку через $Y = l \cap AB$, которая принадлежит секущей плоскости π;

8) Точки P и Y принадлежат одной той же плоскости грани ABB_1A_1, и принадлежат секущей плоскости π, то мы можем провести прямую PY, принадлежащая секущей плоскости π. Прямая PY пересекает ребро BB_1 в точке $R = \pi \cap BB_1$, которая принадлежат секущей плоскости π;

9) Соединяя точки K и M, M и N, N и P, P и R, R и K, получим геометрическую фигуру $KMNPR$.

Доказательство. В силу того, что след l и прямые BA, CD, DE, AE принадлежать плоскости основания данной призмы, можно однозначно определить точки $Y = l \cap BA,\ \ X = l \cap CD,\ \ Q = l \cap DE,\ \ Z = l \cap AE$.

Тогда, последовательно получаем:

1. $K \in \pi, X \in \pi \ \ \Rightarrow KX \in \pi$. Следовательно $KX \cap DD_1 = M \in \pi$. Отсюда имеем, что $KM \in \pi$.

2. $M \in \pi, Q \in \pi \ \Rightarrow QM \in \pi$. Отсюда находим, что $MQ \cap EE_1 = N \in \pi$. Тогда $MN \in \pi$.

3. $N \in \pi$, $Z \in \pi \ \Rightarrow NZ \in \pi$, а так же NZ принадлежит плоскости грани AEE_1A_1. Следовательно $NZ \cap AA_1 = P \in \pi$. Отсюда имеем, что $PN \in \pi$.

4. $P \in \pi$, $Y \in \pi \ \Rightarrow PY \in \pi$. Кроме того, прямая PY принадлежит и плоскости грани ABB_1A_1. Отсюда вытекает, что $PY \cap BB_1 = R \in \pi$. Тогда $RP \in \pi$.

5. Следовательно, $KMNPR$ — искомое сечение.

Исследование. След l искомой секущей плоскости расположен на плоскости основания данной призмы, однако не имеет общих точек с основанием этой призмы. Кроме того, данная точка K принадлежит секущей плоскости π и боковому ребру CC_1 призмы. Тогда секущая плоскость, определяемая точкой K и следом l пересекает боковые ребра (или их продолжения) в точках K, M, N, P, R рассматриваемой призмы. Таким образом, точки пресечения секущей плоскости с данной призмы существуют. С другой стороны $K \notin l$. Тогда точка K и след l однозначно определяет секущую плоскость π. Следовательно, рассматриваемая задача имеет единственное решение.

Задача 2. Дана пирамида $SABCDE$. Основанием пирамиды является пятиугольник $ABCDE$, продолжение каждого ребра основания пирамиды имеет общую точку пересечения следом l, который расположен на плоскости основания $ABCDE$, но не имеет общих точек с основанием данной пирамиды и точкой M, являющиеся внутренней точкой ребра AS. Требуется построить сечение этой пирамиды секущей плоскостью π.

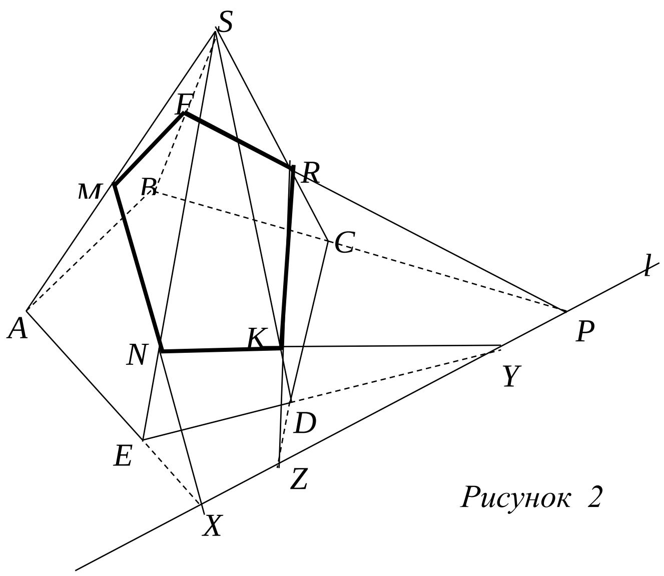

Рисунок 2

Плоскость π определена следом l и точкой M (рис.2).

Анализ. Выясним сначала, разрешима ли это задача. Пусть $SABCDE$ с точкой $M \in (A, S)$ является изображением данной пирамиды. Точкой $M \in (A, S)$ и прямой l однозначно определяется секущая плоскость π.

Для построения искомого сечения $MNKRF$ достаточно построить его вершины N, K, R, F, которые являются точками пересечения секущей плоскости π с соответствующими ребрами SE, SD, SC, SB пирамиды $SABCDE$.

Для построения точки $N = \pi \cap SE$ достаточно построить прямую, которая, получается, от пересечения данной секущей плоскости π с плоскостью грани SAE. Так как прямая l лежит в плоскости основания пирамиды, то секущая плоскость π может пересекать плоскость грани SAE лишь в точке, которая принадлежит прямой AE, т.е. в точке $X = AE \cap l$. Точки M и X принадлежат к одной той же плоскости. Отсюда определяем точку $N = MX \cap SE$. Для построения других вершин, достаточно построить точки Z, Y, P принадлежащие прямой l и соответствующим граням SED, SDC, SCB. Таким образом, задача о построении сечения данной пирамиды разрешима.

Построение: Ниже второй и третий этапы построения сечения - построение и доказательство - проведем совместно.

1) Как уже было замечено, данный след l и прямая AE лежат на плоскости основания пирамиды. Тогда мы можем определить точку пересечения следа l и прямой AE. Обозначим эту точку через $X = l \cap AE$, которая принадлежит секущей плоскости π.

Так как точки X и M принадлежат одной той же плоскости грани SAE и секущей плоскости π, то мы можем провести прямую XM, принадлежащая секущей плоскости π. Прямая XM пересекает ребро SE в некоторой точке $N = \pi \cap SE$;

2) След l и прямая ED лежат на плоскости основания пирамиды. Тогда мы можем определить точку пересечения следа l и прямой ED. Обозначим эту точку через $Y = l \cap ED$, которая принадлежит секущей плоскости π.

Так как точки Y и N принадлежат одной той же плоскости грани SED, то мы можем провести прямую NY, принадлежащая секущей плоскости π. Прямая NY пересекает ребро SD в некоторой точке $K = \pi \cap SD$, которая принадлежит секущей плоскости π;

3) Данный след l и прямая DC лежат на плоскости основания прирамиды. Тогда мы можем определить точку пересечения следа l и прямой DC. Обозначим эту точку через $Z = l \cap DC$, которая принадлежит секущей плоскости π.

Точки Z и K принадлежат одной той же плоскости грани SDC, и принадлежат секущей плоскости π, то мы можем провести прямую ZK, принадлежащая секущей плоскости π. Прямая ZK пересекает ребро SC в точке $R = \pi \cap SC$, которая принадлежит секущей плоскости π.

4) След l и прямая BC лежат на плоскости основания пирамиды. Тогда мы можем определить точку пересечения следа l и прямой BC. Обозначим эту точку через $P = l \cap BC$, которая принадлежит секущей плоскости π.

Точки P и R принадлежат одной той же плоскости грани SCB, и принадлежат секущей плоскости π, то мы можем провести прямую PR, принадлежащая секущей плоскости π. Прямая PR пересекает ребро SB в точке $F = \pi \cap SB$, которая принадлежат секущей плоскости π;

5) Соединяя точки M и N, N и K, K и R, R и F, F и M, получим искомое сечение $MNKRF$.

Исследование. След l искомой секущей плоскости расположен на плоскости основания данной пирамиды, однако не имеет общих точек с основанием этой пирамиды. Кроме того, данная точка M принадлежит секущей плоскости π и боковому ребру SA пирамиды. Тогда секущая плоскость, определяемая точкой M и следом l пересекает боковые ребра (или их продолжения) в точках M, N, K, R, F рассматриваемой пирамиды. Следовательно, точки пресечения секущей плоскости с рассматриваемой пирамидой существуют. С другой стороны $M \notin l$. Тогда точка M и след l однозначно определяет секущую плоскость π. Следовательно, рассматриваемая задача имеет единственное решение.

Теперь сконструируем задачу на построение сечения пирамиды в случае, когда секущая плоскость задается двумя точками расположенные на ребрах пирамиды и точкой расположенная внутри грани данной пирамиды.

Задача 3. Дана пирамида $ABCDS$.

Основанием этой пирамиды является четырехугольник $ABCD$. Требуется построить сечение пирамиды $ABCDS$ плоскостью, проходящей через данные точки M, N, K (рис.3). Точки N и M расположены на ребрах BS и CS грани BSC. Точка K расположена внутри грани ASD.

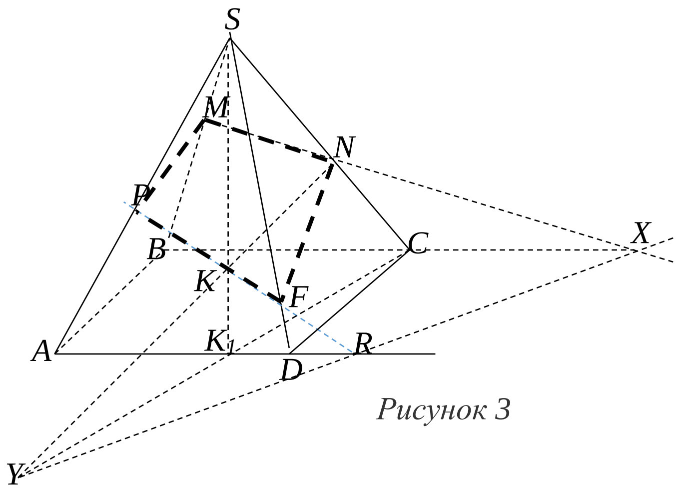

Рисунок 3

Построение.

1) Проведем прямую MN до пересечения с прямой BC. Прямая MN пересекает прямую BC в точке X. Точка X является общей точкой секущей плоскости и плоскости основания.

2) Проведем прямую SK до пересечения с ребром AD. Точку пересечения обозначим через K_1. Точки N и K расположены на данной секущей плоскости MNK. Найдем точку Y, в которой пересекаются прямые NK и CK_1. Так как точка Y лежит на прямой NK, а прямая NK лежит в секущей плоскости MNK, то и точка Y лежит в плоскости MNK. Аналогично, так как точка Y лежит на прямой CK_1, расположенная на плоскости основания ADC, то и точка Y лежит в плоскости основания ADC. Таким образом, Y - общая точка плоскости основания и секущей плоскости.

3) Строим прямую XY, по которой пересекаются секущая плоскость MNK и плоскость основания ADC. Следовательно, XY - след секущей плоскости.

4) Определим точку $R = XY \cap AD$. Точки R и K -точки секущей плоскости, расположенные на плоскости одной той же грани ADS. Тогда прямая KR лежит в секущей плоскости MNK и пересекает ребро DS в точке F, а ребро AS в точке P. Точки F и P расположены в секущей плоскости.

5) Соединяя точки M и N, N и F, F и P, P и M, получим искомое сечение $MNFP$.

Выводы

Сконструированы задачи на построение сечения данного многогранника плоскостью, которая определяется следом и некоторой точкой *K*, расположенная на поверхности данного многогранника. Для предложенных задач построение сечения выполнены соблюдением основных этапов решения задач: анализа, построения, доказательства, исследования. Опыт показывает, что предлагаемый алгоритмический метод решения задач на построение позволяет добиться формирования пространственного представления и алгоритмического мышления будущих учителей математики.

Список использованной литературы:

1 *Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика: Учебное пособие для студентов педагогических институтов. /Сост. В.И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. – 416 с.*

2 *Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. / Сост.: Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. –387 с.*

3 *Далингер В.А. Методика обучения учащихся стереометрии посредством решения задач: Учебное пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2001. -365 с.*

4 *Бутырина В.И. Обучение построению сечений как средство развития пространственного представления на уроках стереометрии // Наука и школа,-2012,-№3.-С.86-89*

5 *Нургабыл Д.Н., Нурпеисов К.С. Алгоритмический метод построения сечения многогранников // Вестник ЖГУ,-2019, -№2.-38-43*