

Е. Төлеуғазы^{1*}, Қ.Е. Кервенев², С.А. Искаков²

¹М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің Қазақстан филиалы,
Астана қ., Қазақстан

²Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қарағанды қ., Қазақстан
*e-mail: toleugazy.yerzhan@gmail.com

ЖАЛПЫЛАНҒАН АРАЛАС ТЕГІСТІГІ БАР НИКОЛЬСКИЙ-БЕСОВ КЕҢІСТІГІНІҢ ШЕКАРАЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРЫ

Аңдатпа

Дифференциалданатын функциялар кеңістіктерінің енулер теоремасы әртүрлі метрикалардағы функциялардың тегістік қасиеттерінің маңызды байланыстары мен қатынастарын зерттейді. Математикалық физиканың шектік есептер теориясында, жуықтау теориясында және аралас метрикасы бар Никольский-Бесовтың кеңістіктері үшін және Лоренцтің анизотропты кеңістіктері үшін ену теоремалары берілген. Ұсынылған жұмыста жоғарыда көрсетілген теоремалардағы параметрлердің жетілдірілмейтіндігі көрсетілді. Осыны көрсетуге біз сол жақтағы енулердегі кеңістіктер үшін шекті функцияларды құрамыз және олар оң жақтағы енулерде «сәл ғана жіңішкертілген» кеңістіктерде жатпайтындығы көрсетілген.

Түйін сөздер: Никольский-Бесов типтес кеңістіктер, басым аралас тегістік, аралас метрика, Лоренцтің анизотропты кеңістіктері, ену теоремалары.

Е. Төлеуғазы¹, Қ.Е. Кервенев², С.А. Искаков²

¹Казахстанский филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова,
г. Астана, Казахстан

²Карагандинский университет имени академика Е. А. Букетова, г. Караганды, Казахстан

ГРАНИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ПРОСТРАНСТВ НИКОЛЬСКОГО-БЕСОВА С ОБОЩЕННОЙ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

Аннотация

Теория вложения пространств дифференцируемых функций многих переменных изучает важные связи и соотношения между их гладкостными и метрическими свойствами и имеет широкое применение в различных разделах чистой математики и ее приложениях. Ранее нами получены предельные теоремы вложения рахных метрик для пространств Никольского-Бесова с доминирующей смешанной гладкостью и со смешанной метрикой и для анизотропных пространств Лоренца. В данной работе мы показали, что условия на параметры пространств в отмеченных выше теоремах являются неулучшаемыми. Для этого мы построили крайние функций, входящие в пространства в левых частях вложений и не входящие в «немного зауженные» пространства, чем пространства, стоящие в правых частях вложений.

Ключевые слова: пространства Никольского-Бесова, доминирующая смешанная производная, смешанная метрика, анизотропные пространства Лоренца, теоремы вложения.

Y. Toleugazy¹, K.Y. Kervenev², S.A. Iskakov²

¹Kazakhstan Branch of Lomonosov Moscow State University, Astana, Kazakhstan;

²Karagandinsky University named after academician E. A. Buketov, Karaganda, Kazakhstan

BOUNDARY FUNCTIONS OF NIKOLSKY-BESOV SPACES WITH SMOOTH MIXED SMOOTHNESS

Abstract

The embedding theory of spaces of differential functions of many variables studies important connections and relationships between smooth and metric properties of functions and has wide application in various branches of pure mathematics and its applications. Earlier, we obtained the embedding theorems of different

metrics for Nikolsky-Besov spaces with dominant mixed smoothness and mixed smoothness and mixed metric, and anisotropic Lorentz spaces. In this work, we showed that the conditions for the parameters of spaces from the theorems are unimprovable. To do this, we built the extreme functions included in the spaces from the left sides of the embeddings and not included in the "slightly narrowed" spaces from the spaces in the right parts of the embeddings.

Keywords: anisotropic Nikolsky-Besov spaces, generalized mixed smoothness, mixed metric, anisotropic Lorentz spaces, embedding theorems.

Кіріспе

Дифференциалдық теңдеулер үшін кеңістіктердің ену теориясының алғашқы нәтижелері С.Л. Соболев [1] еңбектерінде қарастырылған. Әртүрлі метрикадағы функциялардың маңызды тегістік қасиеттерінің қатынастарын осы теория зерттейді. Бұл теорияның ары қарай дамуына, функциялардың жаңа класстарын анықтауға және зерттеуге С.М. Никольский [2], О.В. Бесов [3], П.И. Лизоркин [4], Х. Трибель [5], Й. Берг және Й. Лёфстрем [6] және көптеген басқа ғалымдар үлес қосты. Бұл зерттеулердің дамуына екі нәрсе ықпал етті: олардың теоретикалық мәселелері және олардың математикалық физика шектік есептер теориясында, жуықтау теориясындағы қолданумен байланысты.

1960 жылдары С.М. Никольский [7], А.Д. Джабраилов [8] және Т.И. Аманов [9] жұмыстарында басым аралас туындысы бар кеңістіктер қарастырыла бастады. Ену және интерполяция теориясымен және жуықтау теориясымен байланысты басым аралас туындысы бар кеңістіктерді зерттеулер А.П. Унинский, Е.Д. Нурсұлтанов, К.А. Бекмаганбетов, Е. Төлеуғазы және басқаларының жұмыстарымен байланысты (мысалы, [10]-[14] қараңыз).

Никольский–Бесовтың басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар кеңістіктер қасиеттерін [11]-[13] мақалаларда қарастырдық. Бұл мақалаларда біз осы кеңістіктердің интерполяциялық қасиеттерін зерттедік, осы кеңістіктер мен анизотропты Лоренц кеңістіктері үшін шектік ену теоремаларын алдық және функциялардың іздері мен жалғасы үшін теоремаларды дәлелдедік.

К.А. Бекмаганбетов, Қ.Е. Кервенев, Е. Төлеуғазының [12] мақаласында басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский–Бесов кеңістіктері және анизотропты Лоренц кеңістіктері үшін енулері зерттелді. Бұл мақалада [12] жұмыстағы ену теоремаларының шарттары жақсартылмайтындығын көрсетеміз. Ол үшін біз шеттік функцияларды құрамыз. Құрылған функциялар енудің сол жағына тиісті болады, ал «сәл тарылған» оң жақтағы кеңістікке тиісті болмай қалады.

Алдын-ала қажет нәтижелер

Айталық $1 \leq p = (p_1, \dots, p_n) \leq \infty$ болсын. Аралас метрикадағы $L_p(\mathbb{T}^d)$ Лебег кеңістігі деп

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \left(\int_{\mathbb{T}^{d_n}} \left(\dots \left(\int_{\mathbb{T}^{d_1}} |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}}$$

нормасы ақырлы болатын \mathbb{T}^d -да өлшенетін барлық $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ функциялар жиынын айтамыз, $p_i = \infty$ болғанда $\left(\int_{\mathbb{T}^{d_i}} (|f(x_i)|)^{p_i} dx_i \right)^{\frac{1}{p_i}}$ өрнегі $\text{ess sup}_{x_i \in \mathbb{T}^{d_i}} |f(x_i)|$ ретінде түсініледі.

$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{i\langle k, x \rangle_d}$ тригонометриялық қатары үшін

$$\Delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} a_k e^{i\langle k, x \rangle_d}$$

арқылы белгілейміз, мұндағы $\langle k, x \rangle_d = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} k_i^j x_i^j$ – скаляр көбейтінді, ал $\rho(s) = \left\{ k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^d: [2^{s_i-1}] \leq \max_{j=1, \dots, d_i} |k_j^i| < 2^{s_i}, i = 1, \dots, n \right\}$ және $[a]$ – a санының бүтін бөлігі.

[14] мақаласының аналогиясы бойынша $B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)$ Никольский–Бесов анизотропты кеңістігі деп айтамыз, егер $f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{i\langle k, x \rangle_d}$ қатарлар жиыны үшін

$$\|f\|_{B_p^{\alpha q}(\mathbb{T}^d)} = \left\| \left\{ 2^{(\alpha, s)} \|\Delta_s(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \right\} \right\|_{l_q}$$

нормасы ақырлы болса. Мұнда, $\|\cdot\|_{l_q}$ – аралас метрикасы бар дискретті Лебег кеңістігінің нормасы.

[12] жұмысында келесі ену теоремалары алынды. Оларды қарастыра алдында анизотропты Лоренц кеңістігінің анықтамасын келтірейік. Нормасы ақырлы болатын

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{pr}(\mathbb{T}^d)} &= \\ &= \left(\int_0^{(2\pi)^{d_n}} \left(t_n^{1/p_n} \dots \left(\int_0^{(2\pi)^{d_1}} \left(t_1^{p_1} f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n} < \infty \end{aligned}$$

функциялар тізбектері анизотропты Лоренц кеңістігін құрайды.

Теорема А. Айталық $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $1 \leq q = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ және $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0), p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$. Онда $\alpha_0 - \frac{d}{p_0} = \alpha_1 - \frac{d}{p_1}$ үшін келесі ену орындалады

$$B_{p_1}^{\alpha_1 q}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow B_{p_0}^{\alpha_0 q}(\mathbb{T}^d).$$

Теорема В. Айталық $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < q = (q_1, \dots, q_n) < \infty$ және $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ болсын. Онда келесі ену

$$B_p^{\alpha \tau}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow L_{q\tau}(\mathbb{T}^d)$$

$\alpha = (1/p - 1/q)d$ үшін орындалады.

Теорема С. Айталық $1 < q = (q_1, \dots, q_n) < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ және $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ болсын. Онда $\alpha = (1/p - 1/q)d$ үшін келесі ену орындалады

$$L_{q\tau}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow B_p^{\alpha \tau}(\mathbb{T}^d).$$

Негізгі нәтижелер

Келесі теорема А теоремасында ену жарамды болатын жағдайдың жақсармағанын көрсетеді.

Теорема 1. Айталық $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$, $1 \leq p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0), p_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) < \infty$ және $\alpha_0 - \frac{d}{p_0} = \alpha_1 - \frac{d}{p_1}$. Онда кез келген $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$ және $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) > 0$ үшін, $f_\beta^{(1)} \notin B_{p_0}^{(\alpha_0 + \varepsilon)\tau}(\mathbb{T}^d) \cup B_{(p_0 + \delta)}^{\alpha_0 \tau}(\mathbb{T}^d)$ болатындай $f_\beta^{(1)} \in B_{p_1}^{\alpha_1 \tau}(\mathbb{T}^d)$ функция бар болады.

Дәлелдеуі. Бір өлшемді Дирихле ядросының нормасы үшін болжамды ескере отырып, алатын қатынасымыз

$$\left\| \sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1} e^{i(k,\cdot)} \right\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \sim 2^{(1/p',s)}, 1 < p < +\infty.$$

Айталық $\sigma_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)_d}$ болсын. Осы қатынастан бізде бары

$$\|\sigma_s(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \|\sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)_d}\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \sim 2^{(d/p',s)}. \quad (1)$$

Келесі $f_\beta^{(1)}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-(\beta,s)} \sigma_s(x)$ функцияны қарастайық, мұндағы

$$\alpha_1 + \frac{d}{p_1'} < \beta < \min\left(\alpha_0 + \varepsilon + \frac{d}{p_0'}, \alpha_0 + \frac{d}{(p_0+\delta)'}\right).$$

(1) бағалауы бойынша бізде бары

$$\begin{aligned} \|f_\beta^{(1)}\|_{B_{p_1'}^{\alpha_1\tau}(\mathbb{T}^d)} &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_1,s)} \|\Delta_s(f_\beta^{(1)})\|_{L_{p_1}(\mathbb{T}^d)} \right)^\tau \right)^{1/\tau} = \\ &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_1,s)} 2^{-(\beta,s)} \|\sigma_s(\cdot)\|_{L_{p_1}(\mathbb{T}^d)} \right)^\tau \right)^{1/\tau} = \\ &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_1 - \beta + \frac{d}{p_1'},s)} \right)^\tau \right)^{1/\tau} < +\infty \end{aligned}$$

$\alpha_1 - \beta + \frac{d}{p_1'} < 0$ ретінде. Бұл дегеніміз $f_\beta^{(1)} \in B_{p_0}^{\alpha_0\tau}(\mathbb{T}^d)$.

Сол сияқты, біз мынаны аламыз

$$\begin{aligned} \|f_\beta^{(1)}\|_{B_{p_0}^{(\alpha_0+\varepsilon)\tau}(\mathbb{T}^d)} &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_0+\varepsilon,s)} \|\Delta_s(f_\beta^{(1)})\|_{L_{p_0}(\mathbb{T}^d)} \right)^\tau \right)^{1/\tau} \geq \\ &= C_1 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_0+\varepsilon,s)} 2^{\left(\frac{d}{p_0'} - \beta, s\right)} \right)^\tau \right)^{1/\tau} = \\ &= C_1 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_0+\varepsilon + \frac{d}{p_0'} - \beta, s)} \right)^\tau \right)^{1/\tau} = +\infty, \end{aligned}$$

$\alpha_0 + \varepsilon + \frac{d}{p_0'} - \beta > 0$ ретінде. Сондықтан $f_\beta^{(1)} \notin B_{p_0}^{(\alpha_0+\varepsilon)\tau}(\mathbb{T}^d)$.

Әрі қарай, $f_\beta^{(1)} \notin B_{p_0+\delta}^{\alpha_0\tau}(\mathbb{T}^d)$ екенін көрсетеміз

$$\begin{aligned} \|f_{\beta}^{(1)}\|_{B_{p_0+\delta}^{\alpha_0\tau}(\mathbb{T}^d)} &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_0,s)} \|\Delta_s(f_{\beta}^{(1)})\|_{L_{p_0+\delta}(\mathbb{T}^d)} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} \geq \\ &= C_2 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha_1,s)} 2^{\left(\frac{d}{(p_0+\delta)'} - \beta, s\right)} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\ &= C_2 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\alpha_1 + \frac{d}{(p_0+\delta)'} - \beta, s\right)} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = +\infty, \end{aligned}$$

$\alpha_1 + \frac{d}{(p_0+\delta)'} - \beta > 0$ ретінде. Сондықтан $f_{\beta}^{(1)} \notin B_{p_0+\delta}^{\alpha_0\tau}(\mathbb{T}^d)$.

Осылайша, біз мынадай нәтиже алдық $f_{\beta}^{(1)} \notin B_{p_0}^{(\alpha_0+\varepsilon)\tau}(\mathbb{T}^d) \cup B_{p_0+\delta}^{\alpha_0\tau}(\mathbb{T}^d)$.

Теорема толық дәлелденді.

Келесі теорема В теоремасында ену жарамды болатын жағдайдың жақсармағанын көрсетеді.

Теорема 2. Айталық $1 < p = (p_1, \dots, p_n) < q = (q_1, \dots, q_n) < \infty$, $1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ және $\alpha = (1/p - 1/q)d$ болсын. Онда кез келген $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$ үшін $f_{\beta}^{(2)} \notin L_{q+\varepsilon, \tau}(\mathbb{T}^d)$ болатындай $f_{\beta}^{(2)} \in B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^d)$ функция бар болады.

Дәлелдеуі. Алдымен $f_{\beta}^{(2)} \in B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^d)$ екенін көрсетейік. $f_{\beta}^{(2)} = \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-(\beta,s)} \sigma_s(x)$ функцияны қарастайық, мұндағы $\alpha + \frac{d}{p_1} < \beta \leq \frac{d}{(q+\varepsilon)'}$.

1-теоремаға аналогия бойынша, бізде $\alpha + \frac{d}{p_0} - \beta < 0$ үшін

$$\|f_{\beta}^{(2)}\|_{B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^d)} \sim \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\alpha - \beta + \frac{d}{p_0}, s\right)} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} < \infty$$

орындалады. Бұл дегеніміз $f_{\beta}^{(2)} \in B_p^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^d)$.

$f_{\beta}^{(2)} \notin L_{q+\varepsilon, \tau}(\mathbb{T}^d)$ екенін көрсету үшін біз С теоремасын қолданамыз. Бізде бары $\frac{d}{(q+\varepsilon)'}$ - $\beta > 0$ үшін

$$\begin{aligned} \|f_{\beta}^{(2)}\|_{L_{q+\varepsilon, \tau}(\mathbb{T}^d)} &\geq \|f_{\beta}^{(2)}\|_{B_{\frac{d}{p} - \frac{d}{q+\varepsilon}}(\mathbb{T}^d)} = \\ &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{d}{p} - \frac{d}{q+\varepsilon}, s\right)} \|\Delta_s(f_{\beta}^{(2)})\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\ &= C_3 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{d}{p} - \frac{d}{q+\varepsilon}, s\right)} 2^{\left(\frac{d}{p'} - \beta, s\right)} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\ &= C_3 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{d}{p} + \frac{d}{p'} - \frac{d}{q+\varepsilon} - \beta, s\right)} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = \end{aligned}$$

$$= C_3 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(d - \frac{d}{q+\varepsilon} - \beta, s \right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = C_3 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{d}{(q+\varepsilon)^{\tau} - \beta, s \right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = +\infty,$$

орындалады. Бұл дегеніміз $f_\beta^{(2)} \notin L_{q+\varepsilon, \tau}(\mathbb{T}^d)$.

Теорема толық дәлелденді.

Келесі теорема С теоремасында ену жарамды болатын жағдайдың жақсармағанын көрсетеді.

Теорема 3. Айталық $1 < q = (q_1, \dots, q_n) < p = (p_1, \dots, p_n) < \infty, 1 \leq \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$ және $\alpha = (1/p - 1/q)d$ болсын. Онда кез келген $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$ және $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) > 0$ үшін, $f_\beta^{(3)} \notin B_p^{\alpha+\varepsilon, \tau}(\mathbb{T}^d) \cup B_{(p+\delta)}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^d)$ болатындай $f_\beta^{(3)} \in L_{q, \tau}(\mathbb{T}^d)$ функция бар болады.

Дәлелдеуі. $\frac{d}{q'} < \beta \leq \min \left(\alpha + \varepsilon + \frac{d}{p'}, \alpha + \frac{d}{(p+\delta)'} \right)$ шартын қанағаттандыратын β мен 1-теоремадағыдай $f_\beta^{(3)}(x)$ функциясын таңдайық.

$f_\beta^{(3)} \in L_{q, \tau}(\mathbb{T}^d)$ екенін көрсету үшін біз В теоремасын қолданамыз. Бізде бары $\frac{1}{q'} - \beta < 0$ үшін

$$\begin{aligned} \|f_\beta^{(3)}\|_{L_{q, \tau}(\mathbb{T}^d)} &\leq C_4 \|f_\beta^{(3)}\|_{B_p^{\left(\frac{d}{p} - \frac{d}{q}\right)\tau}(\mathbb{T}^d)} = \\ &= C_4 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{d}{p} - \frac{d}{q}, s\right)} \|\Delta_s(f_\beta^{(3)})\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \leq \\ &\leq C_5 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{d}{p} - \frac{d}{q}, s\right)} 2^{-\beta + \frac{d}{p'}, s} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\ &= C_5 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{d}{p} + \frac{d}{p'} - \beta - \frac{d}{q}, s\right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\ &= C_5 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(d - \frac{d}{q} - \beta, s\right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = C_5 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{d}{q'} - \beta, s\right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} < +\infty, \end{aligned}$$

орындалады, яғни $f_\beta^{(3)} \in L_{q, \tau}(\mathbb{T}^d)$.

Енді $f_\beta^{(3)} \notin B_p^{\alpha+\varepsilon, \tau}(\mathbb{T}^d)$ екенін көрсетейік. Бұл функцияның нормасын төменнен бағалайық

$$\begin{aligned} \|f_\beta^{(3)}\|_{B_p^{\alpha+\varepsilon, \tau}(\mathbb{T}^d)} &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha+\varepsilon, s)} \|\Delta_s(f_\beta^{(3)})\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \geq \\ &\geq C_6 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha+\varepsilon, s)} 2^{\left(\frac{d}{p'} - \beta, s\right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\ &= C_6 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\alpha+\varepsilon + \frac{d}{p'} - \beta, s\right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = +\infty, \end{aligned}$$

$\alpha + \varepsilon + \frac{d}{p'} - \beta > 0$ ретінде, яғни $f_\beta^{(3)} \in B_p^{(\alpha+\varepsilon),\tau}(\mathbb{T}^d)$.

Әрі қарай, біз $f_\beta^{(3)} \notin B_{(p+\delta)}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^d)$ екенін көрсетеміз. $\alpha + \frac{d}{(p+\delta)'} - \beta > 0$ екенін ескере отырып, бізде бары

$$\begin{aligned} \|f_\beta^{(3)}\|_{B_{(p+\delta)}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^d)} &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha,s)} \|\Delta_s(f_\beta^{(3)})\|_{L_{(p+\delta)}(\mathbb{T}^d)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} \geq \\ &\geq C_7 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{(\alpha,s)} 2^{\left(\frac{d}{(p+\delta)'} - \beta, s\right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = \\ &= C_7 \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(2^{\left(\alpha + \frac{d}{(p+\delta)'} - \beta, s\right)} \right)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}} = +\infty, \end{aligned}$$

орындалады, онда $f_\beta^{(3)} \notin B_{(p+\delta)}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^d)$.

Осылайша, біз $f_\beta^{(3)} \notin B_p^{\alpha+\varepsilon,\tau}(\mathbb{T}^d) \cup B_{(p+\delta)}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^d)$ екенін көрсеттік.

Теорема толық дәлелденді.

Қорытынды

К.А. Бекмаганбетов, Қ.Е. Кервенев және Е. Төлеуғазының [12] мақаласында басым аралас туындысы және аралас метрикасы бар Никольский–Бесов кеңістіктері және анизотропты Лоренц кеңістіктері үшін енулері алынды. Ұсынылған жұмыста жоғарыда көрсетілген теоремалардағы параметрлердің жетілдірілмейтіндігі көрсетілді. Осыны көрсетуге біз сол жақтағы енулердегі кеңістіктер үшін шекті функцияларды құрамыз және олар оң жақтағы енулерде «сәл ғана жіңішкертілген» кеңістіктерде жатпайтындығы көрсетілген.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

- [1] Sobolev S.L. On a theorem of functional analysis // Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2. – 1938. – V. 34. – P. 39–68.
- [2] Nikol'skii S.M. Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. Heidelberg: Springer-Verlag, 1975. – 418 p.
- [3] Besov O.V. Integral representations of functions and imbedding theorems. New York – Toronto – London: J. Wiley and Sons, 1979. – 311p.
- [4] Лизоркин П.И. Пространства $L_p^r(\Omega)$. Теоремы продолжения и вложения // ДАН СССР. –1962. – Т.145, №3. – С. 527–530.
- [5] Triebel H. Theory of interpolation, function spaces, differential operators. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978. –528 p.
- [6] Bergh J., Löfstrom J. Interpolation spaces. An introduction. Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1976. –207 p.
- [7] Никольский С.М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гёльдера // Сиб. мат. журн., –1963. –Т. 4, № 6. – С. 1342–1364.
- [8] Джабраилов А.Д. О некоторых функциональных пространствах. Прямые и обратные теоремы вложения // ДАН СССР. –1964. – Т. 159, № 2. – С. 254–257.
- [9] Аманов Т.И. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S_{p\theta}^{(r)}B(\mathbb{R}^n)$ и $S_{p\theta}^{(r)}B(0 \leq x_j \leq 2\pi)$ // Тр. МИАН СССР. –1965. – Т. 77. – С. 5–34.
- [10] Унинский А.П. Теоремы вложения для класса функций со смешанной нормой // ДАН СССР. – 1966. – Т. 166, № 4. – С. 806–808.

[11] Bekmaganbetov K.A., Kervenev K.Ye., Toleugazy Ye. *Interpolation theorem for Nikol'skii–Besov type spaces with mixed metric* // *Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series.* –2020. – No. 4 (100). – P. 33–42. [https://doi.org/10.31489/2020M4/33–42](https://doi.org/10.31489/2020M4/33-42)

[12] Bekmaganbetov K.A., Kervenev K.Ye., Toleugazy Ye. *The embedding theorems for Nikol'skii–Besov spaces with generalized mixed smoothness* // *Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series.* –2021. – No. 4 (104). – P. 28–34. [https://doi.org/10.31489/2021M4/28–34](https://doi.org/10.31489/2021M4/28-34)

[13] Bekmaganbetov K.A., Kervenev K.Ye., Toleugazy Ye. *The theorems about traces and extensions for functions from Nikol'skii–Besov spaces with generalized mixed smoothness* *Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series.* – 2022. – No. 4 (108). – P. 42–50. [https://doi.org/10.31489/2022M4/42–50](https://doi.org/10.31489/2022M4/42-50)

[14] Нурсултанов Е.Д. *Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения* // *ДАН СССР* – 2004. –Т. 394, № 1. – С. 22–25.

References

[1] Sobolev S.L. (1938) *On a theorem of functional analysis.* Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 34, 39–68.

[2] Nikol'skii S.M. (1975) *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems.* Heidelberg: Springer–Verlag. – 418 p.

[3] Besov O.V. (1979) *Integral representations of functions and imbedding theorems.* New York – Toronto – London: J.Wiley and Sons. – 311p.

[4] Lizorkin P.I. (1962) *Prostranstva $L_p^r(\Omega)$. Teoremy prodolzheniya i vlozheniya [$L_p^r(\Omega)$ spaces. Extension and imbedding theorems].* *Doklady Akademii nauk SSSR* 145 (3), 527–530 (in Russian).

[5] Triebel H. (1978) *Theory of interpolation, function spaces, differential operators.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. –528 p.

[6] Bergh J., Löfström J. (1976) *Interpolation spaces. An introduction.* Berlin – Heidelberg – New York: Springer–Verlag. –207 p.

[7] Nikol'skii S.M. (1963) *Funkcii s dominiruyushchej smeshannoju proizvodnoj, udovletvoryayushchej kratnomu usloviyu Gëldera [Functions with dominant mixed derivative, satisfying a multiple Holder condition].* *Sib. mat. zhurn.* 4 (6), 1342–1364 (in Russian).

[8] Dzhabrailov A.D. (1964) *O nekotorykh funktsionalnykh prostranstvakh. Priamye i obratnye teoremy vlozheniya [About some functional spaces. Direct and inverse embedding theorems].* *Doklady Akademii nauk SSSR* 159 (2), 254–257 (in Russian).

[9] Amanov T.I. (1965. *Teoremy predstavleniya i vlozheniya dlia funktsionalnykh prostranstv $S_{p\theta}^{(r)}B(\mathbb{R}^n)$ i $S_{p\theta}^{(r)}B(0 \leq x_j \leq 2\pi)$ [Representation and embedding theorems for functional spaces $S_{p\theta}^{(r)}B(\mathbb{R}^n)$ and $S_{p\theta}^{(r)}B(0 \leq x_j \leq 2\pi)$].* *Trudy MIAN SSSR* 77, 5–34 (in Russian).

[10] Uninskii A.P. (1966) *Teoremy vlozheniya dlia klassa funktsij so smeshannoju normoj [Imbedding theorems for a class of functions with a mixed norm].* *Doklady Akademii nauk SSSR* 166 (4), 806–808 (in Russian).

[11] Bekmaganbetov K.A., Kervenev K.Ye., Toleugazy Ye. (2020) *Interpolation theorem for Nikol'skii–Besov type spaces with mixed metric* // *Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series* 4 (100), 33–42.

[12] Bekmaganbetov K.A., Kervenev K.Ye., Toleugazy Ye. (2021) *The embedding theorems for Nikol'skii–Besov spaces with generalized mixed smoothness* // *Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series* 4 (104), 28–34.

[13] Bekmaganbetov K.A., Kervenev K.Ye., Toleugazy Ye. (2022) *The theorems about traces and extensions for functions from Nikol'skii–Besov spaces with generalized mixed smoothness* *Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series* 4 (108), 42–50.

[14] Nursultanov, E.D. (2004) *Interpolyacionnye teoremy dlia anizotropnykh funktsional'nykh prostranstv i ih prilozheniya [Interpolation theorems for anisotropic functional spaces and their applications]* *Doklady Mathematics.* 394 (1), 22–25. (in Russian)