

С.Е. Касенов<sup>1</sup> , Ж.Ғ. Тұрлыбек<sup>1</sup> , А.М. Тлеулесова<sup>1\*</sup> ,  
А.А. Кабулова<sup>2</sup> , А.Н. Темирбеков<sup>1</sup> 

<sup>1</sup>Казахский Национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

<sup>2</sup>Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева,

г. Усть-Каменогорск, Казахстан

\*e-mail: [aigerim1985\\_06@mail.ru](mailto:aigerim1985_06@mail.ru)

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВРЕДНЫХ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ

### *Аннотация*

В статье рассматривается уравнение переноса и диффузии для математического моделирования процесса распределения вредных примесей в атмосфере. В работе исследована явная разностная схема для уравнения переноса и диффузии, а также архитектура физически информированных нейронных сетей (PINN), их принцип функционирования и применения к решению уравнения переноса и диффузии. В ходе практического исследования изучалось направление ветра в различных условиях и обсуждалось их различное влияние на распределение смеси. Показана динамика распределения загрязняющих веществ в городской зоне в соответствии с северо-западным и северо-восточным ветрами, наблюдаемыми в городе Усть-Каменогорск. В результате исследования были показаны графики численных решений задачи, определены закономерности распределения вредных примесей в атмосфере, убедившись, что направление и скорость ветра оказывают непосредственное влияние на распределение вредных веществ в атмосфере.

**Ключевые слова:** численные методы, уравнение переноса, разностные схемы, PINN, загрязняющие вещества, экология.

С.Е. Касенов<sup>1</sup>, Ж.Ғ. Тұрлыбек<sup>1</sup>, А.М. Тлеулесова<sup>1</sup>, А.А. Кабулова<sup>2</sup>, А.Н. Темирбеков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы қ, Қазақстан

<sup>2</sup>Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен қ, Қазақстан

## АТМОСФЕРАДАҒЫ ЗИЯНДЫ ҚОСПАЛАРДЫҢ ТАРАЛУЫ ҮДЕРІСІН САНДЫҚ МОДЕЛДЕУ

### *Аңдатпа*

Мақалада зиянды қоспалардың атмосферада таралуы процессін математикалық тұрғыда моделдеу үшін тасымал және диффузия теңдеуі қарастырылады. Тасымал және диффузия теңдеуі үшін айқын айырымдылық сұлбасы келтіріліп және PINN физикалық заңдылықтарға негізделген нейронды желісінің архитектурасы, жұмыс істеу принципі мен оны тасымалдау және диффузия теңдеуіне қолданысы зерттелді. Практикалық зерттеу барысында желдің әртүрлі жағдайдағы бағытын зерттеліп, олардың зиянды қоспалардың таралуына беретін әртүрлі әсері талқыланды. Өскемен қаласында байқалған солтүстік-батыс және солтүсті-шығыс желдеріне сәйкес ластаушы заттардың қала аймағында таралу динамикасы көрсетілді. Зерттеу нәтижесінде есептің сандық шешімдерінің графиктері көрсетіліп, желдің бағыты мен жылдамдығы зиянды заттардың атмосферада таралуына тікелей беретін әсеріне көз жеткізіп, атмосферада зиянды қоспалардың таралу заңдылықтары анықталды.

**Түйін сөздер:** сандық әдістер, тасымал теңдеуі, айырымдылық сұлбалар, ластаушы заттар, PINN, экология.

S.E. Kasenov<sup>1</sup>, Zh.G. Turlybek<sup>1</sup>, A.M. Tleulesova<sup>1</sup>, A.A. Kabulova<sup>2</sup>, A.N. Temirbekov<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

<sup>2</sup>D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

## NUMERICAL MODELING OF THE SPREAD OF HARMFUL POLLUTANTS IN THE ATMOSPHERE

### Abstract

The article considers the equation of transport and diffusion for mathematical modeling of the process of distribution of harmful impurities in the atmosphere. The paper explores an explicit difference scheme for the transfer and diffusion equation, as well as the architecture of physically informed neural networks (PINNs), their principle of operation and application to solving the transfer and diffusion equation. In the course of a practical study, the wind direction was studied in various conditions and their different effects on the distribution of the mixture were discussed. The dynamics of the distribution of pollutants in the urban area in accordance with the north-west and north-east winds observed in the city of Ust-Kamenogorsk is shown. As a result of the study, graphs of numerical solutions to the problem were shown, patterns of the distribution of harmful impurities in the atmosphere were determined, making sure that the direction and speed of the wind have a direct effect on the distribution of harmful substances in the atmosphere.

**Keywords:** numerical methods, transport equation, difference schemes, PINN, pollutants, ecology.

### Введение

В данной работе исследуется численное моделирование распространения вредных примесей в атмосфере и применение нейронных сетей к решению уравнений в частных производных. Рассматривается модель распространения загрязняющих веществ на основе уравнения переноса и диффузии. В этой работе исследуются характеристики вредных примесей, формулируется уравнение переноса и диффузии. По результатам исследования показано распределение вредных веществ в зависимости от направления ветра, а также подробно объяснены физические закономерности каждого из выявленных явлений.

В настоящее время распространение вредных примесей в атмосфере является одной из актуальных научных проблем. Загрязнение воздуха оказывает значительное негативное влияние на экологическое состояние окружающей среды, а также на здоровье всех живых существ на Земле. Основными источниками загрязняющих веществ считаются выбросы промышленных предприятий, транспортные средства, энергетические установки, а также природные явления, такие как извержения вулканов и лесные пожары. Все эти источники встречаются в значительном количестве практически в любой части нашей планеты. Для прогнозирования концентрации вредных веществ в воздухе и разработки мер по снижению их воздействия требуется численное моделирование, основанное на уравнении переноса и диффузии [1]. Более подробно математическое исследование вредных примесей можно получить в приложении [2].

Загрязняющие атмосферу химические примеси можно разделить на несколько категорий:

- Диоксид серы ( $SO_2$ ) – это бесцветный газ или жидкость с резким запахом, возникающий в результате человеческой деятельности.
- Диоксид азота ( $NO_2$ ) – газ с резким запахом, который образуется при сгорании топлива и в процессе работы автотранспорта.
- Озон – природный газ, который защищает Землю от ультрафиолетового излучения Солнца в верхних слоях атмосферы. Однако на уровне земной поверхности озон может образовываться в результате химических реакций загрязняющих веществ под воздействием солнечного света, превращаясь в токсичный газ.
- Твердые частицы – компоненты загрязненного воздуха, включающие пыль, дым, микроскопические загрязняющие жидкости и твердые частицы различного размера. Они классифицируются следующим образом:
  - Крупные частицы ( $PM_{10}$ ) – размером от 2.5 до 10 микрон.
  - Мелкие частицы ( $PM_{2.5}$ ) – размером менее 2.5 микрон, видимые только под микроскопом.

- Ультратонкие частицы – с диаметром менее 0.1 микрона, наиболее распространенные в воздухе.

- Оксид углерода (CO) – бесцветный, не имеющий запаха, но крайне токсичный газ.

Одним из ключевых методов моделирования загрязняющих веществ является решение уравнения переноса и диффузии, которое описывает динамику примесей с учетом конвективных и диффузионных процессов. В данной работе рассматривается численное решение уравнения переноса и диффузии, а также представлены результаты вычислительных экспериментов с использованием физически информированной нейронной сети (PINN), демонстрирующих её эффективность.

### Методология исследования

Перемещение загрязняющих веществ в атмосфере осуществляется воздушными потоками с учетом их локальных колебаний. Средний поток веществ, переносимых воздушными массами, как правило, включает адвективные и конвективные составляющие. В процессе движения примесей основная усредненная динамика дополняется диффузией, вызванной случайными колебаниями частиц.

Постановка задачи для уравнения переноса загрязняющих веществ в области:

$$\omega = \{(x, z, t): 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T\}$$

$$\frac{\partial \varphi_q}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_q}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_q}{\partial y} = \Delta \varphi_q + \alpha_q \varphi_q + \beta_q + f_q \quad (1)$$

$$\varphi_q(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad (2)$$

$$\varphi_q(0, y, t) = 0, \quad \varphi_q(1, y, t) = 0 \quad (3)$$

$$\varphi_q(x, 0, t) = 0, \quad \varphi_q(x, 1, t) = 0 \quad (4)$$

Здесь  $f_q = \sum_{j=1}^m Q_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$  представляет собой радиус-вектор расположения источников загрязнения, мощность источников загрязнения, число источников.

где

$u, v$  – коэффициенты скорости воздушного потока,

$q$  – концентрация вредного вещества в смеси,

$\beta_q$  – коэффициент скорости образования вещества,

$\alpha_q$  – коэффициент уменьшения скорости,

$\varphi(x, y, t)$  – интенсивность аэрозольной субстанции, переносимой воздушным потоком в атмосфере.

Метод конечных разностей

1. Построение сетки

$$h_x = \frac{1}{N_x}, \quad h_y = \frac{1}{N_y}, \quad \tau = \frac{1}{N_t}$$

Для численного решения задачи такого типа сначала рассматриваем распределенное множество узлов с шагами:

$$\mathcal{D}_{h_x, h_y}^\tau = \{(x_i, y_j, t_k): x_i = ih_x, y_j = jh_y, t_k = k\tau, i = \overline{1, N_x - 1}, \\ j = \overline{1, N_y - 1}, \tau = \overline{0, N_t - 1}\}$$

2. Дискретизация

Аппроксимируем производную по времени в уравнении (1) правой разностью, а производные по  $x$  и  $y$  точностью второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_q}{\partial t} &= \frac{\varphi_{i,j}^{k+1} - \varphi_{i,j}^k}{\tau} = \varphi_{qt} \\ u \frac{\partial \varphi_q}{\partial x} &= u \left( \frac{\varphi_{i+1,j}^k - \varphi_{i-1,j}^k}{2h_x} \right) = u\varphi_{qx} \\ v \frac{\partial \varphi_q}{\partial y} &= v \left( \frac{\varphi_{i,j+1}^k - \varphi_{i,j-1}^k}{2h_y} \right) = v\varphi_{qy} \\ \Delta \varphi_q &= \frac{\varphi_{i+1,j}^k - 2\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i-1,j}^k}{h_x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1}^k - 2\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i,j-1}^k}{h_y^2} = \varphi_{qxx} + \varphi_{qyy} \end{aligned}$$

Начальные и граничные условия (2), (3), (4)

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}^0 &= \varphi_0(x_i, y_j), \\ \varphi_{0,j}^k &= \varphi_{1,j}^k = 0, \\ \varphi_{i,0}^k &= 0, \\ \varphi_{i,1}^k &= 0 \end{aligned}$$

### 3. Разностная схема

После дискретизации получаем следующую разностную задачу

$$\varphi_{qt} + u\varphi_{qx} + v\varphi_{qy} = \varphi_{qxx} + \varphi_{qyy} + \alpha_q \varphi_q + \beta_q + f_q \quad (6)$$

или в индексной форме:

$$\frac{\varphi_{i,j}^{k+1} - \varphi_{i,j}^k}{\tau} + u \frac{\varphi_{i+1,j}^k - \varphi_{i-1,j}^k}{2h_x} + v \frac{\varphi_{i,j+1}^k - \varphi_{i,j-1}^k}{2h_y} = \Lambda \varphi_{i,j}^k + \mu \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda \varphi_{i,j}^k &= \frac{\varphi_{i+1,j}^k - 2\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i-1,j}^k}{h_x^2} + \frac{\varphi_{i,j+1}^k - 2\varphi_{i,j}^k + \varphi_{i,j-1}^k}{h_y^2} \\ \mu &= \beta_q + f_{i,j}, \end{aligned}$$

Разностная задача (7) является явной схемой, значения на верхнем временном слое  $\varphi_{i,j}^{k+1}$  определяется через значения на предыдущем слое по формуле (8)

$$\varphi_{i,j}^{k+1} = \varphi_{i,j}^k - \tau \left( u \frac{\varphi_{i+1,j}^k - \varphi_{i-1,j}^k}{2h_x} + v \frac{\varphi_{i,j+1}^k - \varphi_{i,j-1}^k}{2h_y} \right) + \tau \Lambda \varphi_{i,j}^k + \tau \mu \quad (8)$$

Традиционные численные методы изучались с давних времен и всегда были полны новых открытий, приведенные выше схемы конечных разностей были более подробно изучены в работах [3-5]. С развитием технологий, включая компьютерные системы и искусственный интеллект, наука также продолжает непрерывное развитие. В современную эпоху развитых технологий с помощью искусственного интеллекта можно создавать даже математические модели, которые демонстрируют результаты, не уступающие, а в некоторых случаях превосходящие традиционные численные методы. PINN – это искусственная нейронная сеть, структурированная на основе физических законов. В данной работе исследуем модель распределения вредных примесей в атмосфере с использованием нейронной сети PINN. Цели, архитектуру, принцип работы нейронной сети PINN, а также области её применения можно более подробно изучить в работах [6-8]. PINN строится на основе глубокой нейросети, в которую интегрируются физические уравнения. Это достигается путем добавления к функции

потерь компонентов, учитывающих дифференциальных уравнений, начальные и граничные условия. Обучение PINN осуществляется через минимизацию функции потерь.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{PDE} + \mathcal{L}_{BC} + \mathcal{L}_{IC} \quad (9)$$

где

$\mathcal{L}_{PDE}$  – ошибка уравнения в частных производных,

$\mathcal{L}_{BC}, \mathcal{L}_{IC}$  – ошибки на начальных и граничных условиях.

Функция потерь в PINN формулируется как среднеквадратичная ошибка, что позволяет минимизировать невязку уравнения в частных производных в случайно выбранных точках внутри области.

$$\mathcal{L}_{PDE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\mathcal{F}(u_{\theta}(x_i, y_i, t_i))|^2 \quad (10)$$

где

$u_{\theta}(x_i, y_i, t_i)$  – предсказанное значение решения нейросетью с параметрами  $\theta$ ,

$\mathcal{L}(u)$  – оператор уравнения в частных производных.

PINN представляет собой многослойную нейронную сеть, в которой входными данными являются координаты пространства и времени, а выходное значение аппроксимирует решение искомого дифференциального уравнения. Ниже на рисунке 1 показана архитектура нейронной сети PINN, подробнее об архитектуре вы можете увидеть в работе [9].

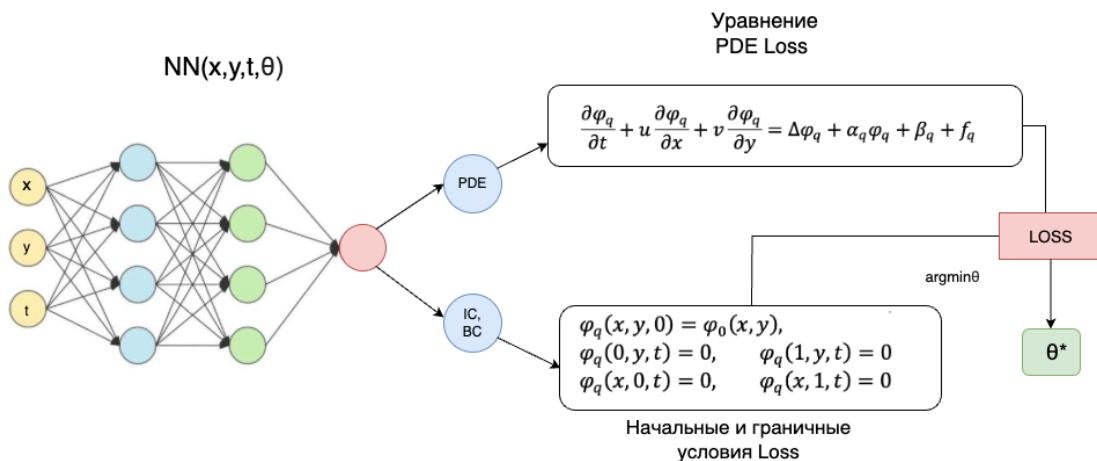


Рисунок 1. Архитектура PINN для уравнения переноса и диффузии

Для получения математической модели с использованием нейронной сети PINN мы реализуем решение с помощью библиотеки DeepXDE. DeepXDE – открытая библиотека, поддерживаемая сообществом исследователей и инженеров, широко используемая в академической среде для математического моделирования и численного анализа, подробнее об использовании библиотеки показано в работе [10].

### Результаты исследования

В данном разделе представлена динамика обученной нейронной сети PINN для уравнения переноса и диффузии, а также численное графическое отображение результатов моделирования распространения загрязняющих веществ и их физические характеристики.

На рисунке 2 показана зависимость значений потерь в обучающих и тестовых наборах нейронной сети от количества итераций. Поскольку значения потерь обучающих и тестовых наборов на графике близки друг к другу, в модели не наблюдается переобучения, что свидетельствует о высокой способности к обобщению. Функция потерь сначала быстро уменьшается, приближаясь к постоянным значениям на более поздних итерациях. Наличие временных колебаний на графике показывает, что модель адаптируется к сложным областям

и учитывает физические условия уравнения. Близость значений потерь обучающих и тестовых наборов в нейронной сети PINN свидетельствует о хорошей обобщающей способности модели.

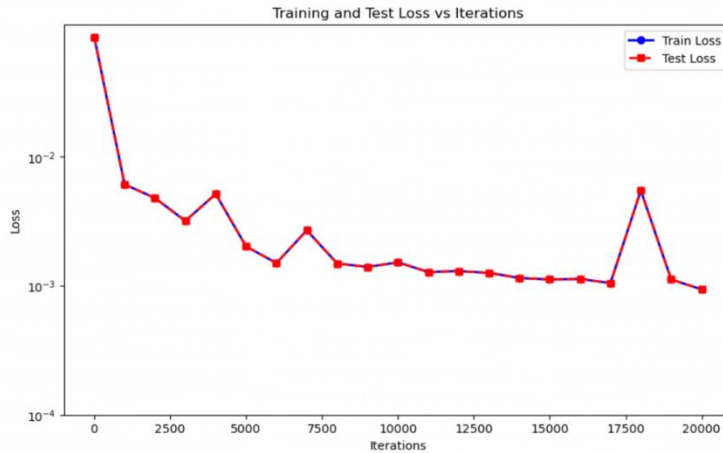
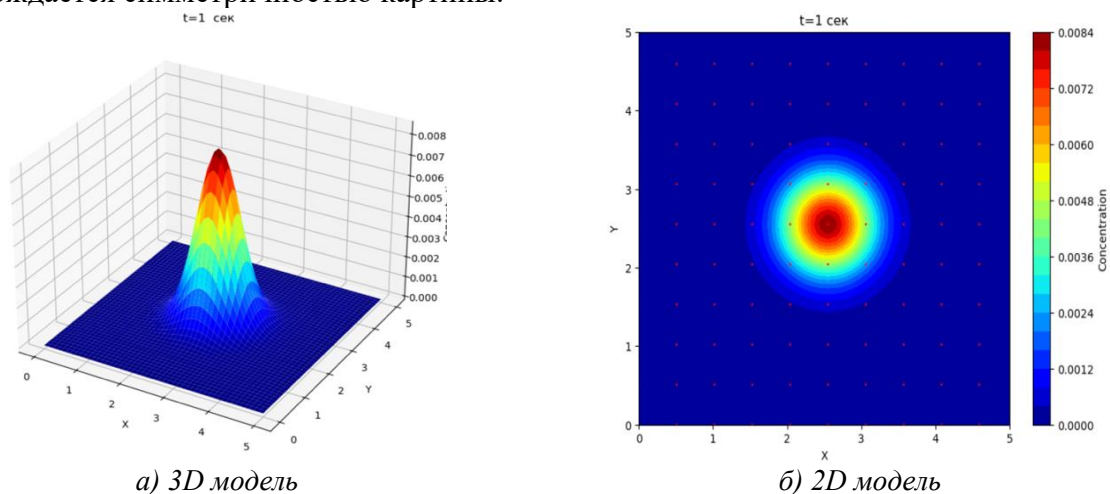


Рисунок 2. Динамика изменения функции потерь при обучении PINN

Далее представлено детальное исследование процессов распространения вредных примесей в атмосфере. Рассматриваются различные случаи с разными параметрами скорости потока:

- Отсутствие конвективного переноса ( $u = 0, v = 0$ ).
- Горизонтальный перенос ( $u = 1, v = 0$ ).
- Вертикальный перенос ( $u = 0, v = 1$ ).
- Северо-западный ветер в Усть-Каменогорске ( $u = -1, v = 1$ ).
- Северо-восточный ветер в Усть-Каменогорске ( $u = 1, v = 1$ ).

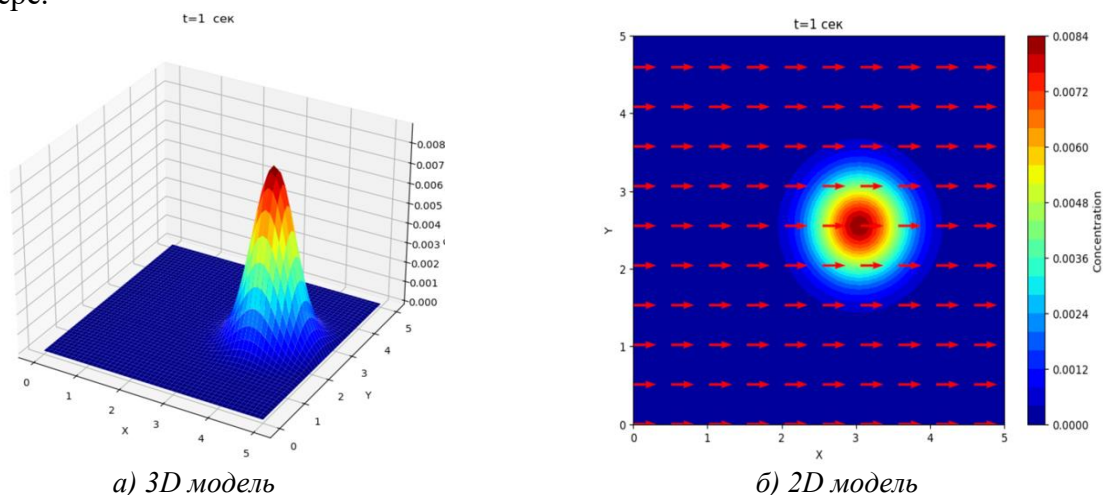
Результаты моделирования представлены в виде трехмерных и двумерных графиков, которые позволяют визуализировать распределение концентрации примеси во времени. На первых двух графиках представлено распределение концентрации примеси при  $t = 1$  секунде в условиях отсутствия конвективного переноса. На представленном рисунке 3а трехмерный график показывает симметричное распределение примеси вокруг источника, обусловленное исключительно процессом диффузии, а на рисунке 3б двумерный график отображает аналогичное распределение с изолиниями концентрации. Отсутствие направленного переноса подтверждается симметричностью картины.



а) 3D модель  
б) 2D модель  
Рисунок 3. Решение уравнения при отсутствии конвективного переноса ( $u = 0, v = 0$ )

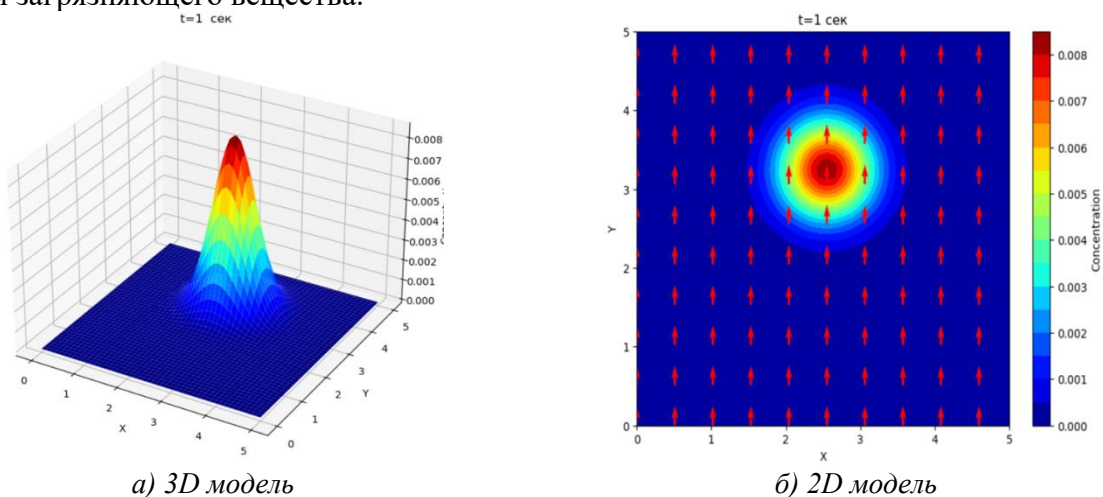
На рисунке 4 продемонстрировано влияние горизонтального потока на распространение примеси. На изображении 4а в трехмерном представлении видно смещение пика

концентрации примеси вправо, что соответствует направлению потока, а на изображении 4б в двумерном представлении добавлены векторные стрелки, показывающие движение примеси в горизонтальном направлении. Это наглядно демонстрирует влияние конвективного переноса на распределение загрязняющего вещества в пространстве. Полученные результаты подтверждают физическую закономерность смещения примеси в направлении основного потока, что согласуется с теоретическими представлениями о механизме переноса загрязнений в атмосфере.



а) 3D модель б) 2D модель  
Рисунок 4. Решение уравнения при горизонтальном переносе ( $u = 1, v = 0$ )

На 5 рисунке можно увидеть поведение системы при вертикальном движении среды. Изображение 5а позволяет увидеть, как трехмерный график демонстрирует смещение примеси вверх, что обусловлено направлением потока, а также на визуализации 5б можно заметить двумерное изображение с векторным полем подчеркивает вертикальную направленность движения загрязняющего вещества.



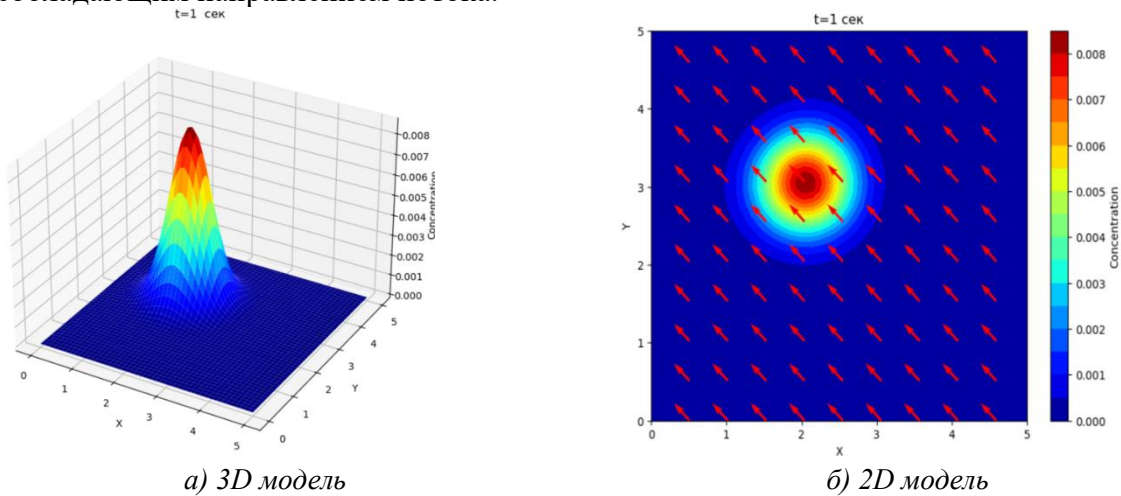
а) 3D модель б) 2D модель  
Рисунок 5. Решение уравнения при вертикальном переносе ( $u = 0, v = 1$ )

Для более реалистичной иллюстрации данного эксперимента рассмотрим пример направления ветра в Усть-Каменогорске. В этом регионе чаще всего преобладают ветра северо-западного и северо-восточного направлений. Например, 7 августа 2024 году было зафиксировано усиление северо-западного ветра со скоростью до 15 м/с. Эти атмосферные условия можно учесть в моделировании:

- Северо-западный ветер при ( $u = -1, v = 1$ ),
- Северо-восточный ветер при ( $u = 1, v = 1$ ).

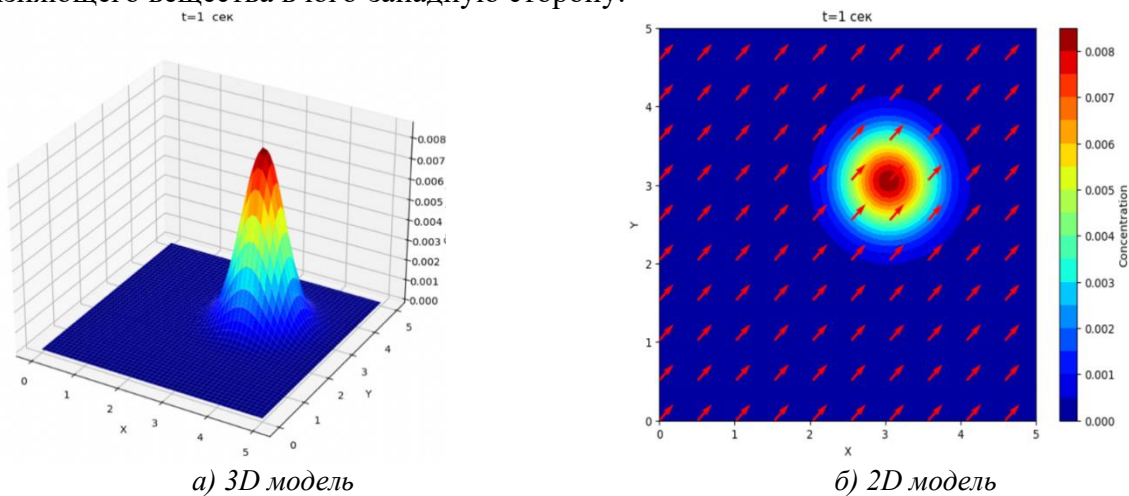
Визуально можно наблюдать на 6 рисунке распределение концентрации примеси при ветре,

дующем с северо-запада на юго-восток. На изображении ба трехмерный график демонстрирует смещение загрязняющего вещества в юго-восточном направлении, что соответствует направлению ветра, а в бб рисунка представлено двумерный график с наложенными векторными стрелками иллюстрирует перенос примеси, совпадающий с преобладающим направлением потока.



а) 3D модель  
 б) 2D модель  
 Рисунок 6. Решение уравнения при северо-западном ветре ( $u = -1, v = 1$ )

На 7 рисунке представлены результаты моделирования при ветре, дующем с северо-востока на юго-запад. Рисунок 7а это трехмерное изображение, которое демонстрирует распространение примеси в юго-западном направлении, вызванное конвективным переносом, сравнительно в 7б двумерная визуализация с векторным полем подтверждает снос загрязняющего вещества в юго-западную сторону.



а) 3D модель  
 б) 2D модель  
 Рисунок 7. Решение уравнения при северо-восточном ветре ( $u = 1, v = 1$ )

### Дискуссия

В результате исследований выявлено, что направление и скорость ветра существенно влияют на распределение загрязняющих веществ, смещая концентрационные поля в направлении потока. В условиях отсутствия конвективного переноса наблюдается симметричное распределение примеси, что подтверждает доминирующую роль диффузии. Напротив, при наличии горизонтальных и вертикальных потоках концентрация примесей смещается вдоль направления ветра, что указывает на влияние конвективного переноса. Эти результаты согласуются с теоретическими представлениями о механизмах распространения загрязнений в атмосфере. Полученные результаты могут быть использованы для прогнозирования качества воздуха в городских условиях и оптимизации экологических

стратегий. В будущем планируется учёт вертикальных движений воздуха и химических реакций для повышения точности модели.

### Заключение

В данной работе проведено численное моделирование распределения вредных примесей в атмосфере, а также применение нейронной сети PINN для уравнения переноса и диффузии. Разработанная модель учитывает ключевые физические процессы, влияющие на поведение загрязняющих веществ в атмосфере, включая конвекцию, диффузию и турбулентность. Это позволило не только смоделировать процесс переноса примесей, но и отразить их взаимодействие с окружающей средой. Проведённое моделирование подтвердило значительное влияние конвективных процессов на распространение загрязняющего вещества в атмосфере. При отсутствии конвекции примесь распространяется равномерно за счет диффузии, формируя симметричное распределение вокруг источника. В условиях направленного потока наблюдается смещение концентрационного пятна в соответствии с направлением ветра. На примере характерных условий Усть-Каменогорска были рассмотрены два типичных направления ветра – северо-западное и северо-восточное. Полученные результаты показывают, что в данных условиях примесь распространяется в юго-восточном и юго-западном направлениях соответственно, что соответствует реальным атмосферным процессам.

Таким образом, проведённое исследование позволяет количественно оценить динамику загрязняющих веществ в атмосфере, учитывать региональные особенности воздушных потоков и использовать полученные данные для прогнозирования экологических последствий. Разработанный численный подход может быть адаптирован для других регионов и условий, что делает его универсальным инструментом для анализа распространения загрязняющих примесей.

### Благодарность

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № BR27100483 «Разработка прогнозно-поисковых технологий выделения рудоперспективных территорий на основе анализа данных единой платформы недропользователей «Minerals.gov.kz» с применением искусственного интеллекта и методов дистанционного зондирования Земли»)

#### Список использованных источников

- [1] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука., 1982.-320 с.
- [2] Temirbekov N., Temirbekov A., Kasenov S., Tamabay D. (2024) Numerical modeling for enhanced pollutant transport prediction in industrial atmospheric air // *Journal of Sustainable Development and Environmental Engineering*. Vol. 19, No. 3, 917–926. <https://doi.org/10.18280/ij dne.190321>
- [3] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука., 1977.-456 с.
- [4] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука., 1977.-656 с.
- [5] Зализняк В. Основы вычислительной физики. Часть I. Введение в конечно-разностные методы. М.: Техносфера., 2008.-224 с.
- [6] Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep Learning*. MIT Press, 2018.-775 p. <https://www.deeplearningbook.org/>
- [7] Bajaj, C., McLennan, L., Andin, T., & Roy, A. (2023). Recipes for when Physics Fails: Recovering Robust Learning of Physics Informed Neural Networks // *Machine Learning: Science and Technology*. Vol. 4, No. 1. <https://doi.org/10.1088/2632-2153/acb416>
- [8] Mahmoudabadbozchelou, M., Karniadakis, G. E., & Jamali, S. (2022). nn-PINNs: Non-Newtonian Physics-Informed Neural Networks for Complex Fluid Modeling // *Soft Matter*. Vol. 18, No. 1, 172-185. <https://doi.org/10.1039/D1SM01298C>

[9] Cuomo, S., Giampaolo, F., Raissi, M., & Wang, S. (2022). *Scientific Machine Learning through Physics-Informed Neural Networks: Where we are and What's next* // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 92, No. 88. <https://doi.org/10.1007/s10915-022-01939-z>

[10] Lu L., Karniadakis G. *DeepXDE Documentation* [Электронный ресурс]. – 2019. – URL: <https://deepxde.readthedocs.io/en/latest/> (дата обращения: 17.01.2025)

#### References

[1] Marchuk G.I. (1982) *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhajushchej sredy* [Mathematical modeling in environmental problems]. Moskva: Nauka, 320 p. (In Russian)

[2] Temirbekov N., Temirbekov A., Kasenov S., Tamabay D. (2024) Numerical modeling for enhanced pollutant transport prediction in industrial atmospheric air // *Journal of Sustainable Development and Environmental Engineering*. Vol. 19, No. 3, 917–926. <https://doi.org/10.18280/ijedne.190321>

[3] Marchuk G.I. (1977) *Metody vychislitel'noj matematiki* [Methods of computational mathematics]. Moskva: Nauka, 456 p. (In Russian)

[4] Samarskij A.A. (1977) *Teoriya raznostnyh skhem* [Theory of difference schemes]. Moskva: Nauka, 656 p. (In Russian)

[5] Zaliznyak V. (2008) *Osnovy vychislitel'noj fiziki. Chast' I. Vvedenie v konechno-raznostnye metody* [Fundamentals of computational physics. Part I. Introduction to finite-difference methods]. Moskva: Tekhnosfera, 224 p. (In Russian)

[6] Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep Learning*. MIT Press, 2018.-775 p. <https://www.deeplearningbook.org/>

[7] Bajaj, C., McLennan, L., Andin, T., & Roy, A. (2023). *Recipes for when Physics Fails: Recovering Robust Learning of Physics Informed Neural Networks* // *Machine Learning: Science and Technology*. Vol. 4, No. 1. <https://doi.org/10.1088/2632-2153/acb416>

[8] Mahmoudabadbozchelou, M., Karniadakis, G. E., & Jamali, S. (2022). *nn-PINNs: Non-Newtonian Physics-Informed Neural Networks for Complex Fluid Modeling* // *Soft Matter*. Vol. 18, No. 1, 172-185. <https://doi.org/10.1039/D1SM01298C>

[9] Cuomo, S., Giampaolo, F., Raissi, M., & Wang, S. (2022). *Scientific Machine Learning through Physics-Informed Neural Networks: Where we are and What's next* // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 92, No. 88. <https://doi.org/10.1007/s10915-022-01939-z>

[10] Lu L., Karniadakis G. *DeepXDE Documentation* [Electronic resource]. – 2019. – URL: <https://deepxde.readthedocs.io/en/latest/> (Accessed: 17.01.2025)