

С.Е. Касенов<sup>id</sup>, А.М. Тлеулесова<sup>\*id</sup>, Е.Б. Саменов<sup>id</sup>, Р.Ж. Султанов<sup>id</sup>

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

\*e-mail: aigerim1985\_06@mail.ru

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ

### Аннотация

В данной работе рассматриваются численные методы решения задачи продолжения для одномерных уравнений акустики, актуальной в задачах моделирования звуковых волн. Основное внимание уделено применению градиентного метода в решении обратных задач, что позволяет эффективно восстанавливать параметры акустического поля по ограниченному набору данных. Разработан алгоритм, включающий вычисление целевого функционала, его градиента и минимизацию с помощью итерационных методов. Проведен анализ влияния уровня шума на точность и устойчивость решений. Численные эксперименты продемонстрировали, что предложенный метод позволяет достичь высокой точности восстановления параметров даже при значительных шумовых искажениях. Анализ вычислительных затрат подтвердил эффективность предложенного подхода. Полученные результаты имеют практическое значение для применения в медицинской диагностике (ультразвуковая томография), геофизике (сейсморазведка), технической диагностике и мониторинге окружающей среды.

**Ключевые слова:** обратные задачи, численные методы, градиентный метод, уравнение акустики, оптимизация.

С.Е. Касенов, А.М. Тлеулесова, Е.Б. Саменов, Р.Ж. Султанов

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

## БІРӨЛШЕМДІ АКУСТИКА ТЕНДЕУЛЕРІ ҮШІН ЖАЛҒАСТЫРУ ЕСЕБІНІҢ САНДЫҚ ШЕШІМІ

### Аңдатпа

Бұл жұмыста дыбыс толқындарын модельдеу есептерінде өзекті болып табылатын бірөлшемді акустика тендеулері үшін жалғастыру есебін шешудің сандық әдістері қарастырылады. Негізгі назар градиенттік әдісті кері есептерді шешуде қолдануға аударылған, бұл акустикалық өріс параметрлерін шектеулі деректер жиынтығы бойынша тиімді қалпына келтіруге мүмкіндік береді. Нысаналы функционалды, оның градиентін есептеуді және итерациялық әдістер арқылы минимизациялауды қамтитын алгоритм әзірленді. Шу деңгейінің шешімдердің дәлдігі мен орнықтылығына әсері талданды. Сандық эксперименттер ұсынылған әдістің айтарлықтай шу бұрмалауларында да параметрлерді жоғары дәлдікпен қалпына келтіруге мүмкіндік беретінін көрсетті. Есептеу шығындарын талдау ұсынылған тәсілдің тиімділігін растады. Алынған нәтижелер медициналық диагностикада (ультрадыбыстық томография), геофизикада (сейсмикалық барлау), техникалық диагностикада және қоршаған ортаны мониторингте қолдануға практикалық маңызға ие.

**Түйін сөздер:** кері есептер, сандық әдістер, градиенттік әдіс, акустика тендеуі, оңтайландыру.

S.E. Kassenov, A.M. Tleulessova, E.B. Samenov, R.Zh. Sultanov

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

## NUMERICAL SOLUTION OF THE CONTINUATION PROBLEM FOR ONE-DIMENSIONAL ACOUSTIC EQUATIONS

### Abstract

This paper examines numerical methods for solving the continuation problem for one-dimensional acoustic equations, which is relevant in sound wave modeling tasks. The main focus is on applying the gradient method to inverse problems, allowing for the efficient reconstruction of acoustic field parameters from a limited set of data. An algorithm has been developed that includes computing the objective functional, its gradient, and

performing minimization using iterative methods. The influence of noise level on the accuracy and stability of solutions has been analyzed. Numerical experiments have demonstrated that the proposed method achieves high accuracy in parameter reconstruction even under significant noise distortions. The analysis of computational costs confirmed the efficiency of the proposed approach. The obtained results have practical significance for applications in medical diagnostics (ultrasound tomography), geophysics (seismic exploration), technical diagnostics, and environmental monitoring.

**Keywords:** inverse problems, numerical methods, gradient method, acoustic equation, optimization.

### **Основные положения**

В данной статье рассматривается численный подход к решению задачи продолжения для одномерных уравнений акустики, относящейся к классу некорректных обратных задач. Основное внимание уделено применению градиентного метода, позволяющего эффективно восстанавливать параметры акустического поля по ограниченному набору измеренных данных. Разработан алгоритм численного решения, включающий вычисление целевого функционала, его градиента и минимизацию с использованием итеративных процедур. Проведенный анализ показал, что предложенный метод обеспечивает высокую точность решений даже в условиях значительных шумовых искажений. Работа опирается на современный аппарат математического моделирования волновых процессов и расширяет существующие подходы к решению обратных задач гиперболического типа. Результаты численных экспериментов подтверждают устойчивость и точность предложенного алгоритма. Полученные выводы обладают практической значимостью для таких прикладных областей, как медицинская диагностика (ультразвуковая томография), геофизическое зондирование и технический мониторинг.

### **Введение**

Акустика – это раздел физики, изучающий природу звука, его генерацию, распространение и воздействие на окружающую среду. Исторически исследования в области акустики берут свое начало еще в античные времена, но значительное развитие они получили в эпоху Возрождения. Согласно работам Гассенди, который развивал идеи атомизма, звук представляет собой поток мельчайших частиц – «атомов», испускаемых звучащими телами, а скорость звука определяется скоростью этих частиц. Он также предполагал, что частота звука связана с количеством испускаемых атомов в единицу времени [1]. Эти идеи стали основой для дальнейшего изучения природы звука и разработки математических моделей его распространения.

Современные исследования в области акустики основаны на представлении звука как волнового явления. Согласно классической теории, изложенной в работах Пирса [2], звуковая волна – это колебательное возмущение, распространяющееся в среде без переноса вещества. Распространение звука зависит от характеристик среды, таких как плотность, температура и упругие свойства. В связи с этим, в различных приложениях – от инженерии до медицины – важную роль играет математическое моделирование акустических процессов. Современные исследования акустических волн используют как классические подходы, описанные в [2], так и современные численные методы, основанные на обратных задачах [3].

Одной из актуальных задач акустики является задача продолжения, заключающаяся в восстановлении акустического поля на основе ограниченной информации. Вопрос точности восстановления акустических параметров остается актуальным, особенно в контексте некорректных задач [4]. Это особенно важно в таких областях, как медицинская визуализация (например, ультразвуковая диагностика), геофизические исследования, мониторинг окружающей среды и обнаружение скрытых объектов, например, мин или подземных структур. В данной работе рассматривается решение задачи продолжения для акустического уравнения с использованием градиентных методов.

Основной целью исследования является разработка и анализ численных методов решения задачи продолжения для акустического уравнения. Для этого исследуются прямые и обратные задачи распространения акустических волн, а также анализируется влияние различных факторов, таких как шум в данных, на точность решений. Исследование опирается на фундаментальные принципы акустики и современные методы математического моделирования, предложенные в классических и современных работах в данной области [2].

Чем точнее модель отражает реальные процессы, тем более обоснованной становится методика интерпретации и более точным результат. Рассматриваемая в статье задача относится к продолжению акустического уравнения. Осуществляется исследование как прямой, так и обратной задачи. Прямая задача заключается в нахождении волнового поля для заданного распределения источников акустического излучения, а, зная отклик среды, через которую распространяется волна, она позволяет определить распределение поля приходящей волны, измеренное детектором. Важно отметить, что существование обобщенного решения прямой задачи подтверждается теоремой, доказанной в статье [5].

В данной статье представлен подход, основанный на градиентных методах, для решения обратных задач одномерной акустики. Предложен алгоритм численного решения задачи Коши с минимизацией целевого функционала, учитывающий влияние различных уровней шума. Приводятся численные эксперименты, демонстрирующие эффективность и устойчивость предложенного подхода в условиях некорректности.

### Методология исследования

*Постановка задачи продолжения для акустического уравнения.* В этом разделе исследуется решение задачи продолжения одномерного акустического уравнения от части границы. Для полученной обратной задачи составляется конечная разностная схема, и эта схема решается методом обратного хода [6]. Физическое содержание задачи следующее: предположим, что до некоторого времени  $t = 0$  среда находилась в покое, а затем распространение акустической волны в виде  $u_x|_{x=0} = g(y, t)$  звука воздействует на часть границы  $x = 0$ , и  $u|_{x=0} = f(y, t)$  дополнительная информация измеряется. Задача заключается в продолжении функции  $u(x, y, t)$ , заданной на части границы  $x = 0$ , в области с известными параметрами окружающей среды. Рассматриваемая в статье задача относится к классу обратных задач, решение которых требует специальных подходов, таких как градиентные методы [7], регуляризация Тихонова [8] и итерационные методы [9].

*Постановка задачи.* Рассмотрим следующую задачу в области  $\Delta(L_x) = \{(x, t): x \in (0, L), t \in (x, 2L_x - x)\}$ . (рис. 1)

$$u_{tt} = u_{xx} - r(x)u, \quad (x, t) \in \Delta(L) \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = g(t), \quad t \in (0, 2L) \quad (2)$$

$$u(0, t) = f(t), \quad t \in (0, 2L) \quad (3)$$

*Прямая задача.* Некорректную задачу (1)–(3) сведем к обратной задаче относительно следующей прямой задачи. Используя равенства (4)–(6), требуется найти функцию  $u(x, t)$  в области  $\Delta(L_x) = \{(x, t): x \in (0, L), t \in (x, 2L_x - x)\}$  через заданные функции  $q(x)$  и  $g(t)$ .

$$u_{tt} = u_{xx} - r(x)u, \quad (x, t) \in \Delta(L) \quad (4)$$

$$u_x(0, t) = g(t), \quad t \in (0, 2L) \quad (5)$$

$$u(x, x) = q(x) \quad x \in (0, L) \quad (6)$$

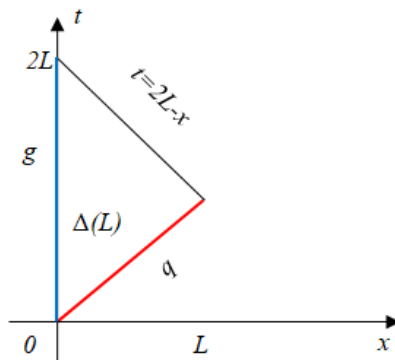


Рисунок 1. Область  $\Delta(L)$

Дополнительная информация

$$u(0, t) = f(t), t \in (0, 2L) \quad (7)$$

Используя заданные в прямой задаче (4)–(6) функции  $g(t)$  и  $q(x)$ , необходимо определить функцию  $u(x, t)$ .

*Обратная задача.* Используя дополнительную информацию (7) о решении прямой задачи (4)–(6), необходимо определить функцию  $q(x)$  из соотношений (4)–(7), что и составляет обратную задачу.

Обратные задачи акустики являются, как правило, некорректными, что требует использования специальных численных методов для их решения. Одним из традиционных подходов является метод регуляризации, который стабилизирует решение за счет введения регуляризационного параметра, контролирующего баланс между точностью и устойчивостью. Однако эти методы требуют предварительного подбора параметров, что может значительно усложнять его применение в случае высоко шумных данных.

В данном исследовании выбран градиентный метод, поскольку он позволяет эффективно минимизировать целевой функционал, обеспечивая высокую точность восстановления акустического поля. В отличие от методов регуляризации, градиентный метод напрямую использует информацию о производных функционала, что ускоряет сходимость и позволяет адаптивно учитывать влияние шума. Кроме того, градиентный метод хорошо подходит для итеративного решения некорректных задач, поскольку он позволяет уточнять решение на каждом шаге, снижая ошибки, вызванные шумовыми искажениями. Проведенные численные эксперименты показали, что градиентный метод обеспечивает более точное восстановление параметров по сравнению с методом регуляризации, особенно при низком и среднем уровне шума. Однако в случае сильного зашумления возможна комбинация градиентного метода с техникой регуляризации для повышения устойчивости решения.

### Результаты исследования

Алгоритм решения задачи непрерывности для уравнения акустики градиентным методом.

Рассмотрим численное решение уравнения распространения акустической волны в однородной среде. Построение численных алгоритмов основано на работах [10], где предложены методы решения уравнений гиперболического типа.

*Задача продолжения для акустического уравнения.* Рассмотрим следующую задачу, заданную в области  $\Delta(L_x) = \{(x, t): x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\}$ .

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\rho_x}{\rho} u_x \quad (8)$$

$$u_x(0, t) = g(t) \quad (9)$$

$$u(0, t) = f(t) \quad (10)$$

Сделав замену  $u(x, t) = v(x, t) \cdot e^{\frac{1}{2} \ln \rho(x)}$ , получаем следующие уравнения:

$$v_{tt} = v_{xx} - r(x)v \quad (11)$$

$$v_x(0, t) = \phi(t) \quad (12)$$

$$v(0, t) = f(t) \quad (13)$$

Здесь

$$r(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_{xx}\rho - (\rho_x)^2}{\rho^2} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\rho_x}{\rho}\right)^2, \quad \phi(t) = \left(g(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_x(0)}{\rho(0)} f(t)\right) \cdot e^{-\frac{1}{2} \ln \rho(0)} \text{ и}$$

$$f(t) = f(t) \cdot e^{-\frac{1}{2} \ln \rho(0)}.$$

*Прямая и обратная задача.* Уравнения (11) - (13) некорректную задачу рассматриваем как обратную задачу относительно некоторой прямой задачи.

С помощью заданных в  $\Delta(L_x) = \{(x, t): x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\}$  — функцией  $q(x)$  и  $\phi(t)$  функции, необходимо найти функцию через следующие соотношения.

Используя функции и  $\phi(t)$ , заданные в  $\Delta(L_x) = \{(x, t): x \in (0, L_x), t \in (x, 2L_x - x)\}$ , нам необходимо найти функцию  $v(x, t)$ , используя следующие соотношения.

$$v_{tt} = v_{xx} - r(x)v, \quad (x, t) \in \Delta(L_x), \quad (14)$$

$$v_x(0, t) = \phi(t), \quad t \in \Delta(0, 2L_x), \quad (15)$$

$$v(x, x) = q(t), \quad x \in \Delta(0, L_x) \quad (16)$$

*Прямая задача.* Используя заданные в уравнениях (14) - (16) функции  $q(x)$  и функции  $\phi(t)$ , необходимо определить функцию  $v(x, t)$ .

Под обратной задачей понимается нахождение функции  $q(x)$  из соотношений (14) – (16) с использованием дополнительной информации (17) о решении прямой задачи (14) – (16).

Дополнительная информация о решении:

$$v(0, t) = f(t) \quad (17)$$

Введем оператор следующим образом

$$\begin{aligned} A: q(x) &\mapsto f(t) \\ A: H^1(0, L_x) &\mapsto H^1(0, 2L_x) \end{aligned}$$

Тогда обратная задача для уравнений (14) - (17) может быть записана в виде оператора следующим образом:

$$Aq = f \quad (18)$$

Вводим целевой функционал:

$$J(q_n) = \|Aq_n - f\|_{L_2}^2 = \int_0^{2L_x} [v(0, t; q_n) - f(t)]^2 dt \quad (19)$$

Минимизируем целевой функционал (19) используя градиентный метод

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J' q_n, \quad (20)$$

Вычисление градиента целевого функционала. Предположим, что добавим приращение  $q_n + \delta q_n$ , тогда:

$$\delta v = \tilde{v} - v = v(x, t; q_n + \delta q_n) - v(x, t, q_n) \quad (21)$$

Используя выражение (21), вычисляем приращение целевого функционала.

$$\begin{aligned}
 J(q_n + \delta q_n) - J(q_n) &= \int_0^{2L_x} [v(0, t; q_n + \delta q_n) - f(t)]^2 dt \\
 - \int_0^{2L_x} [v(0, t; q_n) - f(t)]^2 dt &= \int_0^{2L_x} [v(0, t; q_n + \delta q_n) - v(0, t; q_n)] \\
 &\quad \cdot [v(0, t; q_n + \delta q_n) - f(t) + v(0, t; q_n) - f(t)] dt \\
 &= \int_0^{2L_x} \delta v(0, t; q_n) \cdot 2[v(0, t; q_n) - f(t)] dt + o(\|\delta v\|)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Для получения уравнения, связанного с  $\delta v(0, t; q_n)$ , рассмотрим постановку задачи отклонения для уравнений (14) – (16).

$$\tilde{v}_{tt} = \tilde{v}_{xx} - r(x)\tilde{v}, \tag{23}$$

$$\tilde{v}_x(0, t) = \phi(t) \tag{24}$$

$$\tilde{v}(x, x) = q_n + \delta q_n \tag{25}$$

Вычитая соотношения (14) – (16) из соотношений (23) – (25) и учитывая уравнение (21), получаем следующее уравнение для приращения  $\delta v$ :

$$\delta v_{tt} = \delta v_{xx} - r(x)\delta v \tag{26}$$

$$\delta v_x(0, t) = 0 \tag{27}$$

$$\delta v(x, x) = \delta q_n \tag{28}$$

Умножим (26) на некоторую функцию  $\psi(x, t)$  и проинтегрируем по  $\Delta(L_x)$ , получаем:

$$\begin{aligned}
 0 &= \iint_{\Delta(L_x)} (\delta v_{tt} - \delta v_{xx} + r(x)\delta v)\psi \, dx \, dt = \int_0^{L_x} \int_x^{2L_x-x} \psi \, \delta v_{tt} \, dt \, dx - \\
 &- \int_0^{L_x} \int_0^t \psi \, \delta v_{xx} \, dx \, dt - \int_{L_x}^{2L_x} \int_0^{2L_x-t} \psi \, \delta v_{xx} \, dx \, dt + \iint_{\Delta(L_x)} r(x)\psi \, \delta v \, dx \, dt.
 \end{aligned}$$

Интегрируем этот интеграл по частям:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{L_x} [(\psi \delta v_t)(x, 2L_x - x) - (\psi \delta v_t)(x, x) - (\psi_t \delta v)(x, 2L_x - x) + \\
 &+ (\psi_t \delta v)(x, x) + \int_x^{2L_x-x} \psi_{tt} \delta v \, dt] \, dx - \int_0^{L_x} [(\psi \delta v_x)(t, t) - (\psi \delta v_x)(0, t) - (\psi_x \delta v)(t, t) \\
 &+ (\psi_x \delta v)(0, t) + \int_0^t \psi_{xx} \delta v \, dx] \, dt - \int_{L_x}^{2L_x} [(\psi \delta v_x)(2L_x - t, t) - (\psi \delta v_x)(0, t) \\
 &- (\psi_x \delta v)(2L_x - t, t) + (\psi_x \delta v)(0, t) \\
 &+ \int_0^{2L_x-t} \psi_{xx} \delta v \, dx] \, dt + \iint_{\Delta(L_x)} r(x)\psi \, \delta v \, dx \, dt
 \end{aligned}$$

Учитывая (27),

$$\begin{aligned}
 \psi_x(x, 2L_x - x) - \psi_t(x, 2L_x - x) &= \frac{d\psi}{dx} \Big|_{\frac{dt}{dx}=-1} = \psi_t(x, 2L_x - x) - \\
 &(\text{производная по направлению } t = 2L_x - x);
 \end{aligned}$$

$$\delta v_x(x, 2L_x - x) - \delta v_t(x, 2L_x - x) = \frac{d\delta v}{dx} \Big|_{\frac{dt}{dx}=-1} = \delta v_t(x, 2L_x - x) -$$

(производная по направлению  $t = 2L_x - x$ );

$$\delta v_x(x, x) + \delta v_t(t, t) = \frac{d\delta v}{dx} \Big|_{\frac{dt}{dx}=-1} = (\delta q)_t(x) -$$

(производная по направлению  $t = x$ ), интегрируя по частям, получаем следующее уравнение:

$$0 = \iint_{\Delta(L_x)} (\psi_{tt} - \psi_{xx} + r(x)\psi) \delta v \, dx \, dt +$$

$$+ \int_0^{L_x} [\psi(x, 2L_x - x)(\delta v(x, 2L_x - x))_t|_{t=2L_x-x} - \delta v(x, 2L_x - x)(\psi(x, 2L_x - x))_t|_{t=2L_x-x}] dx +$$

$$+ \int_0^{L_x} [\delta v(x, x)(\psi(x, x))_t|_{t=x} - \psi(x, x)(\delta v(x, x))_t|_{t=x}] dx - \int_0^{2L_x} \psi_x(0, t) \delta v(0, t) dt$$

Из этого вытекает постановка задачи для получаемого уравнения.

$$\psi_{tt} = \psi_{xx} - r(x)\psi \tag{29}$$

$$\psi(x, 2L_x - x) = 0 \tag{30}$$

$$\psi_n(0, t) = 2(u(0, t) - f(t)) \tag{31}$$

тогда учитывая (26), получаем следующее уравнение:

$$\langle \delta q_n, J'^{q_n} \rangle = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \delta q (2\psi(x, x))_t|_{t=x} \, dx$$

Согласно определению, основную часть приращения функционала составляет градиент, т.е.

$$J'q_t = (2\psi(x, x))_t \tag{32}$$

где  $\psi(x, t)$ — решение сопряженной задачи (29)–(31).

Алгоритм решение обратной задачи.

1. Выбор начального приближения  $q_0$ .
2. На основе полученного приближения  $q_n$  решаем прямую задачу (14)–(16).
3. Используя уравнение (19), вычисляем функционал  $J(q_n)$ .
4. Если значение целевой функции не уменьшается, решаем связанную задачу (29) – (31).
5. Используя уравнение (32), вычисляем градиент функционала  $J'(q_n)$ .
6. Вычисляем приближение  $q_{n+1} = q_n - \alpha_n J'q_n$  и переходим к шагу 2 [5].

Численные результаты.

а) Пусть  $N = 100, h = 0.01, r(x) = 2 - (x - 0.5)^2, q_{ex}(x) = \frac{(1 - \cos(6\pi x))}{10}$  будет.

$$\frac{v_i^{k+1} - 2v_i^k + v_i^{k-1}}{h^2} = \frac{v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k}{h^2} - r_i \cdot v_i, i = \overline{1, N}, k = \overline{1, N-1}$$

$$\frac{v_1^k - v_0^k}{h} = \varphi^k, k = \overline{1, N}$$

$$v_0^k = q^k, k = \overline{0, N}$$

Проведены численные эксперименты при различных уровнях шума. Результаты представлены в таблицах 1-2 и рисунках 2-7, демонстрирующих высокую точность метода.

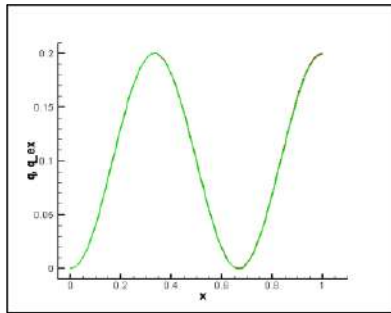


Рисунок 2. Сравнение точного решения и обратного решения без шума

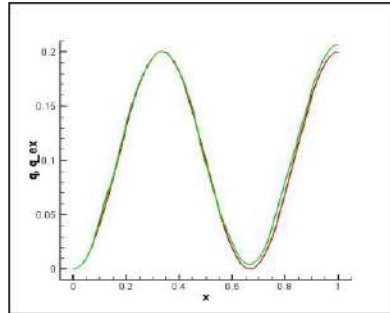


Рисунок 3. Сравнение точного решения и обратного решения с 10% шумом

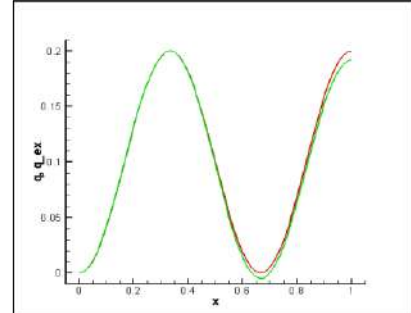


Рисунок 4. Сравнение точного решения и обратного решения с 30% шумом

Таблица 1. Результаты решения градиентным методом при разных уровнях шума для гладких функций

Уровень шума	$\ q - q_{ex}\ _{L_2}$	Время исполнения
Без шума	$1.04 \cdot 10^{-14}$	0.119 сек
С 10% шума	0.119	0.146 сек
С 30% шума	0.2325	0.163 сек

б) В случае

$$r(x) = \begin{cases} 0.2, & \text{если } 0 < x < 0.25, \\ 0.7, & \text{если } 0.25 < x < 0.5, \\ 0.4, & \text{если } 0.5 < x < 0.75, \\ 0.1, & \text{если } 0.75 < x < 1, \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < x < 0.25 \\ 4x - 1, & \text{если } 0.25 < x < 0.5 \\ 3 - 4x, & \text{если } 0.5 < x < 0.75 \\ 0, & \text{если } 0.75 < x < 1 \end{cases}$$

результаты прямых и обратных вычислений.

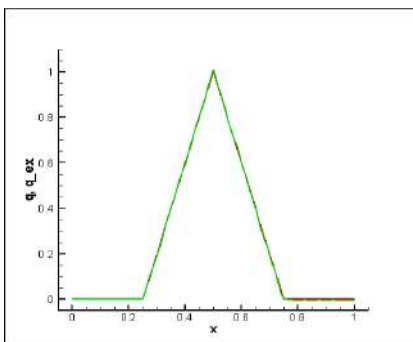


Рисунок 5. Сравнение точного решения и обратного решения без шума

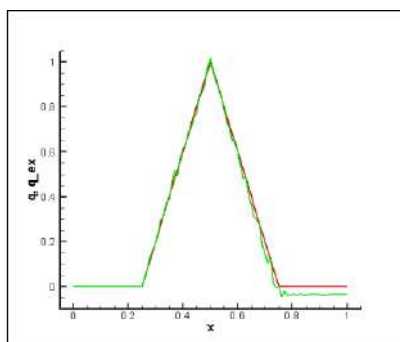


Рисунок 6. Сравнение точного решения и обратного решения с 10% шумом

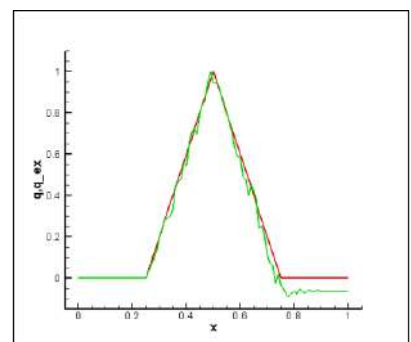


Рисунок 7. Сравнение точного решения и обратного решения с 20% шумом

Результаты представлены в таблицах и графиках, демонстрирующих высокую точность метода. В частности, при уровне шума 10% метод обеспечивает точность восстановления параметров порядка 95%, а при уровне шума 30% — около 85%. Это подтверждает устойчивость метода и его пригодность для решения практических задач.

Таблица 2. Результаты решения методом градиентов при различных уровнях шума для кусочно-постоянных функций

Уровень шума	$\ q - q_{ex}\ _{L_2}$	Время исполнения
Без шума	$1.79 \cdot 10^{-14}$	0.104 сек
С 10% шума	0.1365	0.169 сек
С 30% шума	0.2571	0.172 сек

Дополнительно были проведены исследования влияния параметров алгоритма на сходимость метода. В частности, изменялись параметры регуляризации, шаги итераций и точность вычисления градиента. Было установлено, что оптимальный выбор этих параметров позволяет значительно снизить вычислительные затраты и повысить точность решения.

### Дискуссия

Полученные результаты показывают, что предложенный численный метод позволяет эффективно решать задачи продолжения расчёта для одномерных уравнений акустики. Проведённые вычислительные эксперименты подтвердили высокую точность и устойчивость метода при различных уровнях шума. В частности, использование градиентного метода позволило минимизировать погрешности в решении обратных задач даже в условиях некорректности исходных данных. Несмотря на достигнутые результаты, дальнейшее развитие предложенного метода представляется перспективным в нескольких направлениях:

- Усовершенствование численных схем. Разработка новых методов регуляризации и адаптивных стратегий выбора параметров градиентного метода для повышения сходимости алгоритма.

- Расширение области применения. Адаптация метода к двумерным и трёхмерным моделям распространения звука, что позволит применять его в геофизике, биомедицине и технической диагностике.

- Использование машинного обучения. Включение элементов машинного обучения и нейросетевых алгоритмов для улучшения качества восстановления акустических параметров.

- Разработка эффективных программных реализаций. Оптимизация алгоритмов для работы на высокопроизводительных вычислительных системах и GPU-ускорителях, что позволит значительно ускорить расчёты.

Таким образом, предложенный подход закладывает основу для дальнейших исследований в области численного моделирования акустических волн и решения обратных задач акустики. В будущих работах планируется исследование эффективности метода в многомерных постановках и его применение в практических задачах диагностики и мониторинга. Также рассматриваются возможности использования современных суперкомпьютерных вычислений для ускорения моделирования сложных акустических процессов.

### Заключение

В данной работе рассмотрены численные методы решения задачи продолжения для одномерных уравнений акустики, которая представляет собой важную проблему в области математического моделирования волновых процессов. Было проведено исследование эффективности градиентного метода при решении обратных задач, возникающих в акустических системах, с учетом различных уровней шума в исходных данных.

Разработанный алгоритм включал вычисление целевого функционала, его градиента и последующую минимизацию с использованием итеративных методов. Проведенные численные эксперименты позволили оценить точность и устойчивость предложенного подхода, а также выявить влияние шумовых искажений на результаты расчетов. В частности, сравнение с точными решениями показало, что метод позволяет с высокой степенью достоверности восстанавливать акустические параметры даже в условиях некорректности

исходных данных. Анализ временных затрат вычислений продемонстрировал эффективность разработанного метода, позволяя его применять в реальных задачах моделирования акустических процессов. Полученные результаты могут быть полезны в таких областях, как медицинская диагностика (ультразвуковые исследования), геофизическое зондирование, мониторинг окружающей среды и техническая диагностика.

Таким образом, предложенный метод и его численная реализация могут быть использованы для решения широкого спектра задач в акустике, требующих высокой точности восстановления параметров среды, и обладают большим потенциалом для дальнейшего развития и адаптации к многомерным случаям. Будущие исследования могут быть направлены на применение более сложных алгоритмов, таких как нейросетевые методы решения обратных задач, а также их использование в геофизике и биомедицине.

### Благодарность

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19579325 «Разработка и исследование современных численных методов решения обратных и некорректных задач для уравнения акустики»).

### Список использованных источников

[1] R. B. Lindsay Pierre Gassendi and the revival of atomism in the Renaissance.// *Am. J. Phys.*, 1945, №13, P. 235–242. <https://doi.org/10.1119/1.1990711>

[2] Allan D. Pierce *Acoustics. An Introduction to Its Physical Principles and Applications*// Previously published by McGraw-Hill, Inc., East Sandwich MA, USA 1980, and the Acoustical Society of America, 1989, © McGraw-Hill, Inc., 1981. ISBN 978-3-030-11213-4 ISBN 978-3-030-11214-1 (eBook) url: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-11214-1>

[3] Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. 2018. url: [https://www.researchgate.net/profile/Sergey-Kabanikhin/publication/276931881\\_Obratnye\\_i\\_nekorrektnye\\_zadaciUcebNIK/links/555e77fd08ae86c06b5f4341/Obratnye-i-nekorrektnye-zadaci-UcebNIK.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Sergey-Kabanikhin/publication/276931881_Obratnye_i_nekorrektnye_zadaciUcebNIK/links/555e77fd08ae86c06b5f4341/Obratnye-i-nekorrektnye-zadaci-UcebNIK.pdf)

[4] М. А. Шишленин *Прямые и итерационные методы регуляризации многомерных обратных задач акустики и электродинамики* // Диссертация, Институт вычислительной математики и математической геофизики, РАН, 2013. url: <https://www.dissercat.com/content/pryamye-i-iteratsionnye-metody-regulyarizatsii-mnogomernykh-obratnykh-zadach-akustiki-i-elek>

[5] Syrym Kasenov, Janar Askerbekova, Aigerim Tleulesova, *Algorithm construction and numerical solution based on the gradient method of one inverse problem for the acoustics equation*, // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 2, No. 5 (116), 2022, pp. 43-52. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.253568

[6] Baishemirov Zh., Kasenov S., Askerbekova J., Veibitkyzy A. *Numerical Solution of the inverse problem for the acoustic equation* // *Известия НАН РК. Серия физико-математическая*, Алматы, 2021, Т. (3), С.26-32. url: <https://journals.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics/article/view/2070>

[7] А. М. Денисов, С. Р. Туйкина, А. В. Баев и др., *Итерационные методы решения обратных задач для гиперболических уравнений*// Отчет по проекту, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. – 2017–2019. url: <https://istina.msu.ru/projects/50617444/>

[8] В. А. Морозов *Методы решения некорректных задач* // Наука, Москва, 1984. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01083885>

[9] S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin *Numerical methods for inverse problems of acoustics*. // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, Т. 57, № 9, с. 1515-1528. url: [https://vniitf.ru/data/images/zst/2017/section\\_6/20\\_shishlenin\\_en.pdf](https://vniitf.ru/data/images/zst/2017/section_6/20_shishlenin_en.pdf)

[10] Меражова Ш. Б. *О численном решении обратной задачи для уравнения смешанного параболического типа по определению правой части уравнения* // *Математические заметки СВФУ*. – 2022. – Т. 29. – №. 3. – С. 108-127. DOI: 10.25587/SVFU.2022.87.84.009

Referens

- [1] R. B. Lindsay Pierre Gassendi and the revival of atomism in the Renaissance *Am. J. Phys.*, 1945, №13, P. 235–242. <https://doi.org/10.1119/1.1990711>
- [2] Allan D. Pierce *Acoustics. An Introduction to Its Physical Principles and Applications*// Previously published by McGraw-Hill, Inc., East Sandwich MA, USA 1980, and the Acoustical Society of America, 1989, © McGraw-Hill, Inc., 1981. ISBN 978-3-030-11213-4 ISBN 978-3-030-11214-1 (eBook) url: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-11214-1>
- [3] Kabanikhin S. I. (2018) *Inverse and ill-posed problems*. url: [https://www.researchgate.net/profile/Sergey-Kabanikhin/publication/276931881Obratnye\\_i\\_nekorrektnye\\_zadaciUcebnik/links/555e77fd08ae86c06b5f4341/Obratnye-i-nekorrektnye-zadaci-Ucebnik.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Sergey-Kabanikhin/publication/276931881Obratnye_i_nekorrektnye_zadaciUcebnik/links/555e77fd08ae86c06b5f4341/Obratnye-i-nekorrektnye-zadaci-Ucebnik.pdf) (in Russian)
- [4] M. A. Shishlenin (2013) *Direct and iterative methods of regularization of multidimensional inverse problems of acoustics and electrodynamics* Dissertation, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, url: <https://www.dissercat.com/content/pryamye-i-iteratsionnye-metody-regulyarizatsii-mnogomernykh-obratnykh-zadach-akustiki-i-elek>
- [5] Syrym Kasenov, Janar Askerbekova, Aigerim Tleulesova, Algorithm construction and numerical solution based on the gradient method of one inverse problem for the acoustics equation, // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 2, No. 5 (116), 2022, pp. 43-52. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.253568
- [6] Baishemirov Zh., Kasenov S., Askerbekova J., Beibitkyzy A. Numerical Solution of the inverse problem for the acoustic equation // *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physics and Mathematics series*, Almaty, 2021, T. (3), C.26-32. url: <https://journals.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics/article/view/2070>
- [7] Denisov A.M., Tuikina S.R., Baev A.V. et al. (2017–2019) Iteratsionnye metody resheniya obratnykh zadach dlya giperbolicheskikh uravneniy [Iterative methods for solving inverse problems for hyperbolic equations]. *Otchet po proektu, Moskovskiy gosudarstvennyy universitet im. M.V. Lomonosova*. url: <https://istina.msu.ru/projects/50617444/> (in Russian)
- [8] Morozov V.A. (1984) *Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for solving ill-posed problems]*. Nauka, Moscow. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01083885>
- [9] S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin Numerical methods for inverse problems of acoustics. // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, T. 57, № 9, c. 1515-1528. url: [https://vniitf.ru/data/images/zst/2017/section\\_6/20\\_shishlenin\\_en.pdf](https://vniitf.ru/data/images/zst/2017/section_6/20_shishlenin_en.pdf)
- [10] Merazhova Sh.B. (2022) O chislennom reshenii obratnoi zadachi dlya uravneniya smeshannogo parabolicheskogo-giperbolicheskogo tipa po opredeleniyu pravoï chasti uravneniya [On the numerical solution of the inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type to determine the right-hand side of the equation]. *Matematicheskie zametki SVFU*, Vol. 29, № 3, 108–127. DOI: 10.25587/SVFU.2022.87.84.009