ҒТАХР 27.29.17

10.51889/2959-5894.2025.90.2.010

К.Н. Оспанов , Е.Ө. Молдағали*

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, қ.Астана, Қазақстан
**e-mail: yerka2998@gmail.com*

ТӨРТІНШІ РЕТТІ АЙНЫМАЛЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ КОРРЕКТІЛІК ШАРТТАРЫ

Аңдатпа

Біз бұл мақалада шектелмеген айнымалы коэффициенттері бар төртінші ретті екі мүшелі бір дифференциалдық теңдеудің корректілік шарттарын көрсеттік. Теңдеу кіші мүшесі болмауы себепті нұқсанды теңдеу болып табылады. Теңдеудің екінші ерекшелігі – оның аралық коэффициенті жылдам өседі. Мұндай теңдеулерге тербелістердің, тұтқыр серпімді және серпімсіз ағындардың, иілу толқындарының және т.б. теорияларындағы бірқатар математикалық мәселелер алып келеді. Жұмыста жалпыланған шешімнің бар болуы және жалғыздығы жайлы теорема дәлелденді, сол сияқты шешім мен оның бірінші ретті туындысының салмақты нормаларының бағасы көрсетілді. Коэффициенттерге қойылған шарттарды функциялардың кең класы қанағаттандырады. Жоғарғы мүшедегі коэффициенттерден олардың шексіздіктегі өсуі дәрежелік функциядан аспауы талап етіледі. Коэффициенттер тегіс функциялар деп ұйғарылады, дегенмен олардың туындыларына ешқандай шектеу қойылмайды. Барлық шарттар әр коэффициенттің өзіне және олардың арасындағы белгілі бір қатынастарға қойылған.

Түйін сөздер: нұқсанды дифференциалдық теңдеу, айнымалы коэффициент, шешілімділік, корректілік, Харди теңсіздігі, түйіндес оператор.

К.Н. Оспанов, Е.Ө. Молдағали
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан

УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация

В данной статье мы показали условия корректности для двучленного дифференциального уравнения четвертого порядка с неограниченными переменными коэффициентами. Уравнение является вырожденным, поскольку в нем отсутствует младший член. Вторая особенность уравнения заключается в том, что его промежуточный коэффициент быстро увеличивается. Такие уравнения приводят к ряду математических задач в теории колебаний, вязкоупругих и неупругих течений, изгибных волн и т. д. В работе доказано существование и единственность обобщенного решения, а также даны оценки весовых норм решения и его первой производной. Условиям, налагаемым на коэффициенты, удовлетворяет широкий класс функций. Коэффициенты в верхнем члене должны иметь темп роста на бесконечности, не превышающий степенной функции. Коэффициенты предполагаются гладкими функциями, хотя на их производные не накладывается никаких ограничений. Все условия накладываются на каждый коэффициент и на определенные соотношения между ними.

Ключевые слова: вырожденное дифференциальное уравнение, переменный коэффициент, разрешимость, корректность, неравенство Харди, сопряженный оператор.

K.N. Ospanov, Ye.O. Moldagali
L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

CORRECTNESS CONDITIONS FOR FOURTH ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Abstract

In this paper we have shown the correctness conditions for a fourth-order binomial differential equation with unbounded variable coefficients. The equation is degenerate since it has no lower term. The second feature of the equation is that its intermediate coefficient increases rapidly. Such equations lead to a number of mathematical problems in the theory of oscillations, viscoelastic and inelastic flows, flexural waves, etc. The existence and uniqueness of a generalized solution are proved in the paper, and estimates of the weight norms of the solution and its first derivative are given. A wide class of functions satisfies the conditions imposed on the coefficients. The coefficients in the upper term must have a growth rate at infinity not exceeding a power function. The coefficients are assumed to be smooth functions, although no restrictions are imposed on their derivatives. All conditions are imposed on each coefficient and on certain relations between them.

Keywords: degenerate differential equation, variable coefficient, solvability, correctness, Hardy inequality, adjoint operator.

Негізгі ережелер

Жұмыста коэффициенттері шектелмеген төртінші ретті екі мүшелі нұқсанды дифференциалдық теңдеудің корректілік шарттары алынды. Ол үшін салмақты Харди типті бір интегралдық теңсіздік, тегіс функциялар класында шешім нормаларын Фридрихсше бағалау әдісі қолданылды. Сол сияқты, берілген теңдеуді құраушы дифференциалдық операторға түйіндес оператордың ядросының сипатталмасы айқын түрде көрсетілді. Алынған нәтижелер жоғарғы коэффициенті айнымалы дифференциалдық теңдеулердің шешілу теориясында қолданыс табуы мүмкін.

Кіріспе

$$l_0 y = \frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)''\right)' - \frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)' = F(x), \tag{1}$$

теңдеуін қарастырайық. Мұндағы $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,, r(x) > 0, r(x) \in C_{loc}^{(1)}(\mathbb{R}),\ \ \rho(x) > 0,$ $\rho(x) \in C_{loc}^{(3)}(\mathbb{R})$, $\mathrm{s}(x) > 0$ – үзіліссіз функция, ал $F(x) \in L_2(\mathbb{R})$ деп ұйғарамыз. $C_0^{(4)}(\mathbb{R})$- төрт рет үзіліссіз дифференциалданатын және финитті функциялар жиынында анықталған

$$l_0 y = \frac{1}{S}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{y}{S}\right)'\right)''\right)' - \frac{1}{S}\left(r(x)\left(\frac{y}{S}\right)'\right)'$$

операторының $L_2(\mathbb{R})$ нормасында тұйықталуын l деп белгілейік. (1) теңдеуінің шешімі деп $ly = F$ теңдігін қанағаттандыратын $y \in D(l)$ элементін айтамыз.

Төртінші ретті дифференциалдық теңдеулерге әртүрлі практикалық есептер алып келеді [1, 2]. Сонымен бірге, олар төменгі ретті дифференциалдық теңдеулерді, мысалы, реакция – диффузиялық теңдеулерді регуляризациялауға белсенді қолданылады. (1) дивергенттік формадағы теңдеу, оның басты ерекшелігі, шешімдердің регулярлық қасиеттері бірден байқалмайды, ол үшін қосымша талдау жасалуы қажет [3].

Осы кезге дейін 4-ретті дифференциалдық теңдеулер көбіне шенелген облыста қарастырылып келді. Компактылы емес облыста берілген айнымалы коэффициентті жоғарғы жұп ретті дифференциалдық теңдеулердің шешілу және регулярлық шарттары М.А. Наймарк, А.Г. Костюченко, М.В. Федорюк, Р.С. Исмагилов [4-7] жұмыстарында зерттелген. Дегенмен бұл жұмыстарда негізінен шенелген коэффициентті теңдеулер қарастырылды.

Кіші мүшесі жоқ, ал коэффициенттері шенелмеген (1) түріндегі теңдеулер нұқсанды теңдеу деп аталады. $\rho(x) = s(x) = 1$ жағдайында оның корректілі шешілуінің тиімді шарттары [8] мақаласынан шығады. Бұл нәтиже $s(x)$ функциясы бар (1) теңдеуіне [9] жұмысында жалпыланған. L_0- ге ұқсас кейбір нұқсанды жоғарғы ретті симметриялы операторлардың өзіне түйіндестік және үзіліссіз қайтарымдылық шарттары [10] (r – дәрежелік функция болғанда), [11] жұмыстарында алынған. Практикалық қолданыстар төртінші ретті дифференциалдық теңдеулердің жоғарғы коэффициенттері айнымалы және шенелмеген функциялар болып келген жаңа жағдайларын зерттеуді күн тәртібіне қойып отыр. Мақала осы мәселеге арналған және белгілі бір мөлшерде жоғарыда келтірілген [8-11] зерттеулерінің жалғасы болып табылады. Әдістемелік жағынан бұл мақалаға құрылымы симметриялы емес нұқсанды дифференциалдық теңдеулерге арналған [12, 13] жұмыстары жақын келеді.

Алдағы уақытта C, C_1, C_2 т.б. арқылы мәндері әр жерде әртүрлі болуы мүмкін оң тұрақтыларды белгілейміз.

Зерттеу әдіснамасы

Жұмыста белгілі Гёльдер, Харди функционалдық теңсіздіктері және Макенхаупт теоремасы қолданылады. $\rho(t)$ және $v(t) \neq 0$ үзіліссіз функциялары үшін келесі белгілеулерді енгізейік:

$$\alpha_{\rho,v,k}(x) = \sup_{x>0}\left(\int_0^x |\rho(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_x^\infty t^{(k-1)q'}v^{-q'}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q'}},$$

$$\beta_{\rho,v,k}(x) = \sup_{x<0}\left(\int_x^0 |\rho(s)|^q\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{-\infty}^x s^{(k-1)q'}v^{-q'}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q'}},$$

$$\gamma_{\rho,v,k} = \max\big(\alpha_{\rho,v,k}(x), \beta_{\rho,v,k}(x)\big).$$

Мұндағы $k -$ натурал сан.

Келесі тұжырым белгілі.

Лемма 1. Айталық, $s(t)$ және $v(t)$ функциялары $\gamma_{s,v,k} < \infty$ шартын қанағаттандырсын. Онда

$$\|sf\|_q \leq C\left\|vf^{(k)}\right\|_q$$

теңсіздігі, кез-келген $1 < q < \infty$ және әрбір $f \in C_0^{(k)}(\mathbb{R})$ үшін орынды. Және осы теңсіздік орындалатындай ең кіші C тұрақтысы

$$C \leq \frac{q^{\frac{1}{q}}(q')^{\frac{1}{q'}}}{(k-1)!}\gamma_{s,v,k}$$

теңсіздігін қанағаттандырады. Мұндағы$q^{-1} + (q')^{-1} = 1$.

Зерттеу нәтижелері

Лемма 2. Айталық $r(x)$ функциясы $0 < \delta \leq r(x)$ және $\gamma_{1+s,\sqrt{r},1} < \infty$ шарттарын қанағаттандырсын. Онда әрбір $y \in D(l)$ үшін келесі баға орынды:

$$\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2 + \|y\|_2 \leq C\|l_0y\|_2 . \qquad (2)$$

Дәлелдеу.$y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ болсын. (l_0y, y) скаляр көбейтіндісін келесідей түрлендірейік.

$$(l_0y, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)''\right)' y\,dx - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)' y\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)''\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\left[\left(\frac{y}{s}\right)'\right]^2 dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)'\right]^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\left[\left(\frac{y}{s}\right)'\right]^2 dx =$$

$$= \left\|\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)'\right\|_2^2 + \left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2^2.$$

Осыдан

$$\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2^2 \le (l_0y, y). \tag{3}$$

Екінші жағынан

$$(l_0y, y) \le \|l_0y\|_2\,\|y\|_2. \tag{4}$$

(3), (4) және $\gamma_{s,\sqrt{r},1} < \infty$ шартынан

$$\|y\|_2^2 \le C_1\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2^2 \le C_1\|l_0y\|_2\,\|y\|_2.$$

Осыдан

$$\|y\|_2 \le C_1\|l_0y\|_2. \tag{5}$$

(4) бойынша,

$$\|l_0y\|_2 \ge \frac{\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2}{\|y\|_2}\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2 \ge \frac{1}{\sqrt{C_1}}\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2$$

немесе

$$\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2 \le \sqrt{C_1}\|l_0y\|_2. \tag{6}$$

(5), (6) бағалары $D(l)$– ге тиісті әрбір элемент үшін де орынды екенін көрсетейік. Айталық $y \in D(l)$. l операторы l_0-дің тұйықталуы болғандықтан, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ тізбегі табылып,

$$\|y_n - y\|_2 \to 0,\ \ \|l_0y_n - ly\|_2 \to 0\ (n \to \infty)$$

қатыстары орындалады. Осыдан

$$\|y_n\|_2 \to \|y\|_2, \qquad \|l_0y_n\|_2 \to \|ly\|_2 (n \to \infty). \tag{7}$$

(5) және (6) бойынша, сәйкес

$$\|y_n\|_2 \le C_1\|l_0y_n\|_2 \tag{8}$$

және

$$\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y_n}{s}\right)'\right\|_2 \le \sqrt{C_1}\|l_0y_n\|_2. \tag{9}$$

Екіншіден (8), (9) теңсіздіктерінен және (7) қатыстарынан әрбір $y_n, y_m \in C_0^{(4)}(\mathbb{R})$ $(n, m -$ натурал сандар) үшін

$$\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y_n}{s}\right)' - \sqrt{r}\left(\frac{y_m}{s}\right)'\right\|_2 + \|y_n - y_m\|_2 \le C_2\|l_0y_n - l_0y_m\|_2 \tag{10}$$

бағасы шығады. Алуымыз бойынша, $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|l_0y_n - l_0y_m\|_2 = 0$. Сондықтан (10)-нан $\left\{\sqrt{r}\left(\frac{y_n}{s}\right)'\right\}_{n=1}^{\infty}$ және $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тізбектері $L_2(\mathbb{R})$ - де фундаментальды болатынын көреміз. Жалпыланған дифференциалдау және функцияға көбейту операциялары тұйық болғандықтан,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y_n}{s}\right)' - \sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2 = 0.$$

Онда норманың қасиеті бойынша,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y_n}{s}\right)'\right\|_2 = \left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2.$$

(7) қатысын ескеріп, (8) мен (9) теңсіздіктерінен $y \in D(l)$ үшін алатынымыз, сәйкесінше

$$\|y\|_2 \le C_1\|ly\|_2 \tag{11}$$

және

$$\left\|\sqrt{r}\left(\frac{y}{s}\right)'\right\|_2 \le \sqrt{C_1}\|ly\|_2. \tag{12}$$

(11) - мен (12) - теңсіздіктерін мүшелей қосып, (2) бағасына келеміз. Лемма дәлелденді.

Зерттеу нәтижесі

Теорема 1.

Егер r және ρ функциялары $0 < \delta_1 \le \rho(x)$, $\mathrm{s}(x) \le C|x|^N (N > 0)$, $r \ge C_1\rho^2$ теңсіздіктерін және Лемма 1 шарттарын қанағаттандырса, онда (1) теңдеуінің шешімі бар және жалғыз ғана.

Дискуссия

Дәлелдеу. (1) теңдеуінің шешімінің жалғыздығы Лемма 2- ден шығады. l – тұйық оператор болғандықтан, (11) теңсіздігі бойынша, $R(l) = \overline{R(l)}$. $R(l) \neq L_2(\mathbb{R})$ деп қарсы жориық. Онда нөлдік емес $v \in L_2(\mathbb{R})\backslash R(l)$ элементі табылады. Жалпылықты шектемей, v элементі $R(l)$ – ге ортогональ деп аламыз. Демек әрбір $y \in D(l)$ үшін,

$$(ly, v) = 0.$$

Айталық, l^* берілген l операторына формальды түйіндес оператор болсын, онда $y \in D(\,l)$, $v \in D(\,l^*)$ үшін $(ly, v) = (y, l^*v)$. Келесі (l_0y, v) $(y \in C_0^{(4)}(\mathbb{R}),\ v \in D(\,l^*))$ скаляр көбейтіндісін түрлендірейік.

$$(l_0y, v) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)''\right)' v\,dx - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)' v\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)''\rho(x)\left(\frac{v}{s}\right)' dx + \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\left(\frac{v}{s}\right)' dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\right)'\left(\rho(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)' dx - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{s}\left(r(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)' dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\left(\frac{y}{s}\right)'\left(\rho(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)'' dx - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{s}\left(r(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)' dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y\left[\frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)''\right)' - \frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)'\right] dx = (y, l^*v).$$

Демек, $v \in D(\,l^*)$ келесі біртекті дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады

$$l^*v=\frac{1}{s}\left(\rho(x)\left(\rho(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)''\right)'-\frac{1}{s}\left(r(x)\left(\frac{v}{s}\right)'\right)'=0.$$

Егер

$$\rho(x)\left(\frac{v}{s}\right)'=z \tag{13}$$

деп белгілесек, онда $\mathrm{s}(x)>0$ болғандықтан,

$$\left(\rho z''-\frac{r}{\rho}z\right)'=0.$$

Осыдан

$$-z''+\frac{r}{\rho^2}z=\frac{\mathrm{C}_2}{\rho}. \tag{14}$$

Мұндағы c_2 - кез-келген тұрақты. $r\geq C_1\rho^2$ болғандықтан, біртекті

$$-z''+\frac{r}{\rho^2}z=0$$

теңдеуінің келесі

$$z_1(x)\to+\infty\ (x\to+\infty),\qquad z_1(x)\to 0\ (x\to-\infty),$$

$$z_2(x)\to 0\ (x\to+\infty),\ z_2(x)\to+\infty\ (x\to-\infty),$$

қатыстарын қанағаттандыратын екі өзара сызықты тәуелсіз $z_1(x)$ және$z_2(x)$ шешімдері бар және мұндағы ұмтылу экспоненциалды. Грин функциясын құрайық

$$G(x,t)=\begin{cases}z_1(t)z_2(x), & -\infty<t<x,\\ z_1(x)z_2(t), & x<t<+\infty\end{cases}$$

демек $0<G(x,t)\leq C_0e^{-\delta_0|x-t|}$. Және (14) теңдеуінің жалпы шешімі былайша жазылады

$$z(x)=C_3z_1(x)+C_4z_2(x)+C_5\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(x,t)}{\rho(t)}dt. \tag{15}$$

(13) және (15) қатыстарынан

$$v(x)=C_6s(x)+C_3s(x)\int_0^x\frac{z_1(t)}{\rho(t)}dt+C_4s(x)\int_0^x\frac{z_2(t)}{\rho(t)}dt$$
$$+C_5s(x)\int_0^x\frac{1}{\rho(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(t,\tau)}{\rho(\tau)}d\tau. \tag{16}$$

Шарт бойынша, $v(x)\neq 0$ екенін ескеріп, $C_6\neq 0$ деп аламыз. $0<\delta_1\leq\rho(x)$ болғандықтан, (16) - дағы екінші қосылғыш $x\to+\infty$ жағдайында экспоненциалды өседі. Онда, $u(x)\in L_2(\mathbb{R})$ қатысынан, $C_3=0$ екені шығады. Ал (16) - дағы үшінші қосылғыш $x\to-\infty$ жағдайында экспоненциалды өседі, демек $C_4=0$. Сонымен

$$v(x)=C_6s(x)+C_5\ s(x)\int_0^x\frac{1}{\rho(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(t,\tau)}{\rho(\tau)}d\tau\,dt.$$

Жалпылықты шектемей,

$$v(x)=s(x)+C_7s(x)\int_0^x\frac{1}{\rho(t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(t,\tau)}{\rho(\tau)}d\tau\,dt$$

деп есептеуге болады. Осыдан, егер $C_7 > 0$ болса, онда $v(x) \geq \delta_1 > 0$ $(x > 0)$. Ал егер $C_7 < 0$ болса, онда $v(x) \geq \delta_1 > 0$ $(x < 0)$. Демек $v(x) \notin L_2(\mathbb{R})$. Алынған қарама-қайшылық $R(l) = L_2(\mathbb{R})$ екенін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

Қорытынды

Мақалада шенелмеген екі коэффициенті бар төртінші ретті нұқсанды дифференциалдық теңдеудің корректілі шешілуі үшін жеткілікті шарттар көрсетілді. Бұл шарттар коэффициенттер арасындағы байланыстарға және олардың әрқайсысының шексіздікте өсу жылдамдығына қойылған. Коэффициенттер тегіс функциялар деп ұйғарылады, бірақ олар туынды астында тұрса да, туындыларының өзгеруіне ешқандай шектеу қойылмайды. Мұндай тиімді нәтижеге тұйық сызықты операторлар теориясының әдістерін қолдана отырып қол жеткіздік. Дәлелденген теореманы таңбалары айнымалы бола алатын кіші мүшелері бар төртінші ретті дифференциалдық теңдеудің шешілімділігін көрсету үшін пайдалануға болады.

Пайдаланылған дереккөздер тізімі

[1] Островский Л.А., Потапов И.А. Введение в теорию модулярных волн. М: Физматлит,2003. https://djvu.online/file/Xvixkr59hLNmK

[2]Yadeta D.M., Gizaw A.K., Mussa Y.O. (2020). Approximate Analytical Solution of One-Dimensional Beam Equations by Using Time-Fractional Reduced Differential Transform Method//J. Appl. Math. - 2020.ArticleID 7627385. – pp. 1–13. https://doi.org/10.1155/2020/7627385

[3] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные эллиптические уравнения второго порядка. –М.: Наука, 1972. https://djvu.online/file/9ayCDOEWMl97w

[4] Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). – М.: Наука, 1979. – 400 с. https://reallib.org/reader?file=579194

[5] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с. https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Najmark1969ru.pdf

[6] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М: Наука, 1983. – 354 с. https://reallib.org/reader?file=470429

[7] Исмагилов Р.С. Об условиях полуограниченности и дискретности спектра для одномерных дифференциальных операторов // Доклады АН СССР. – 1961. – № 140. – С. 33-36. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=26157&option_lang=rus

[8] Отелбаев М. Критерий дискретности спектра одного вырожденного оператора и некоторые теоремы вложения // Дифференц. уравнения. – 1977. - Т.13, №1. –С. 111–120. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=2972&option_lang=rus

[9] Апышев О. Д. , Отелбаев М. О спектре одного класса двучленных операторов // Докл. АН СССР. – 1979. Т. 248, №2. –С. 265–268.https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=42979&option_lang=rus

[10] Аникеева Л.И. Об индексе дефекта одного дифференциального оператора высшего порядка // Успехи мат. наук. - 1977. – Т. 32(1). – С. 179-180. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=3053&option_lang=eng

[11] Апышев О.Д. , Отелбаев М. О спектре одного класса дифференциальных операторов и некоторые теоремы вложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1979. – Т. ***43, №****4. –С. 739–764. https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=1729&option_lang=rus*

[12] Moldagali Ye.O., OspanovK.N. Conditions for maximal regularity of solutions to fourth-order differential equations// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2024. - No. 4(116). - pp. 149–158. https://mathematics-vestnik.ksu.kz/index.php/mathematics-vestnik/article/view/630

[13] Ospanov K., Ospanov M. The maximal regularity of the third-order differential equation and its applications// Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2024. – Vol. 47(6). – pp. 4895–4910. https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:001139610800001

References

[1] Ostrovskii, L.A., Potapov, I.A. (2003). Vvedenie v teoriiumodulirovannykhvoln [Introductionto Modulated Wave Theory]. Moscow: Fizmatlit [in Russian]. https://djvu.online/file/Xvixkr59hLNmK

[2]Yadeta, D.M., Gizaw, A.K., Mussa, Y.O. (2020). Approximate Analytical Solution of One-Dimensional Beam Equations by Using Time-Fractional Reduced Differential Transform Method.J. Appl. Math., ArticleID 7627385, 1–13. https://doi.org/10.1155/2020/7627385

[3]Ladyzhenskaja O.A., Ural'ceva N.N. (1972) Linejnye i kvazilinejnye jellipticheskie uravnenija vtorogo porjadka [Linear and quasilinear elliptic equations of second order]. Moscow: Nauka. (In Russian) https://djvu.online/file/9ayCDOEWMl97w

[4]Kostjuchenko A.G., Sargsjan I.S. (1979) Raspredelenie sobstvennyh znachenij (samosoprjazhennye obyknovennye differencial'nye operatory) [Distribution of eigenvalues (self-adjoint ordinary differential operators)]. Moscow: Nauka. - 400 p. (In Russian) https://reallib.org/reader?file=579194

[5]Najmark M.A. (1969) Linejnye differencial'nye operatory [Linear differential operators]. Moscow: Nauka. - 526 p. (In Russian) https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Najmark1969ru.pdf

[6]Fedorjuk M.V. (1983) Asimptoticheskie metody dlja linejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Asymptotic methods for linear ordinary differential equations]. Moscow: Nauka. - 354 p. (In Russian) https://reallib.org/reader?file=470429

[7] Ismagilov R.S. (1961) Ob uslovijah poluogranichennosti i diskretnosti spektra dlja odnomernyh differencial'nyh operatorov [On conditions for the semi-boundedness and discreteness of the spectrum for one-dimensional differential operators]. Doklady AN SSSR, № 140, 33-36. (In Russian) https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=26157&option_lang=rus

[8] Otelbaev M. Kriterij diskretnosti spektra odnogo vyrozhdennogo operatora i nekotorye teoremy vlozheniya // Differenc. uravneniya. – 1977. - T.13, №1. –S. – 1977. - T.13, №1, 111–120. (In Russian) https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=de&paperid=2972&option_lang=rus

[9] Apyshev O. D. , Otelbaev M. O spektre odnogo klassa dvuchlennyh operatorov // Dokl. AN SSSR. – 1979. T. 248, №2, 265–268. (In Russian)
https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dan&paperid=42979&option_lang=rus

[10] Anikeeva L.I. (1977) Ob indekse defekta odnogo differencial'nogo operatora vysshego porjadka [On the defect index of one higher order differential operator]. Uspehi mat. nauk, Vol. 32(1), 179-180. (In Russian) https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=3053&option_lang=eng

[11] Apyshev O. D. , Otelbaev M. O spektre odnogo klassa differencial'nyh operatorov i nekotorye teoremy vlozheniya // Izv. AN SSSR. Ser. matem. - 1979. – T. 43, №4. –C. 739–764.
https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=1729&option_lang=rus

[12] Moldagali Ye.O., Ospanov K.N. Conditions for maximal regularity of solutions to fourth-order differential equations// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2024. - No. 4(116). - pp. 149–158. https://mathematics-vestnik.ksu.kz/index.php/mathematics-vestnik/article/view/630

[13] Ospanov K., Ospanov M. The maximal regularity of the third-order differential equation and its applications// Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2024. – Vol. 47(6). – pp. 4895–4910. https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:001139610800001