Наглядно показав решения приведенных примеров систем уравнений, можно говорить о более высоком усвоении учебного материала учащимися.

Так, применение программы GeoGebra на уроках позволяет: оптимизировать учебный процесс, более рационально используя время на различных этапах урока; осуществлять дифференцированный подход в обучении; проводить индивидуальную работу, используя персональные компьютеры; снизить эмоциональное напряжение на уроке, внося в него элемент игры; расширить кругозор учащихся; способствует развитию познавательной активности учащихся [3].

*Список использованной литературы:*

1 *Гончарова К.Л., Балыбердина Е.Г. Уравнения в школьном курсе математики. Методология мягких систем: Учебно-методическое пособие. – Алматы, 2003. – 96 с.*

2 *http: www.geogebra.org*

3 *Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики: учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Легион, 2015. – 192 с.*

**МРНТИ 27.31.17**
**УДК 517.956**

*Б.Ж. Омарова*

*Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова, г. Актобе, Казахстан*

## МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ВЕКТОРНОМУ ПОЛЮ ЛЯПУНОВА

*Аннотация*

Рассматривается задача существования и интегрального представления единственного многопериодического решения неоднородной линейной системы второго порядка с постоянными коэффициентами и с оператором дифференцирования по направлениям главной диагонали пространства временных переменных и векторных полей вида системы Ляпунова относительно пространственных переменных. Устанавливается многопериодичность нулей этого оператора и условие отсутствия ненулевого многопериодического и вещественно аналитического решения однородной системы, соответствующей заданной системе. Получено интегральное представление многопериодических по временным переменным и вещественно аналитических по пространственным переменным решения неоднородной линейной автономной системы. При достаточно общих условиях обоснована теорема существования единственного многопериодического по временным переменным и вещественно аналитическим по пространственным переменными решений исходной линейной системы в терминах функции Грина.

**Ключевые слова:** многопериодичность, оператор дифференцирования, Ляпунов, автономная система, вещественно аналитическая функция.

*Аңдатпа*

*Б.Ж. Омарова*

*Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, Ақтөбе, Қазақстан*

## ЛЯПУНОВ ВЕКТОРЛЫҚ ӨРІСІ БОЙЫНША ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ОПЕРАТОРЛЫ ЕКІНШІ РЕТТІ ЖҮЙЕНІҢ КӨППЕРИОДТЫ ШЕШІМІ

Тұрақты коэффициентті және уақыт айнымалылары кеңістігінде бас диагонал, кеңістік айнымалысы бойынша Ляпунов жүйесі түріндегі векторлық өрістер бағыттары бойынша дифференциалдау операторлы екінші ретті біртекті емес сызықты жүйенің жалғыз көппериодты шешімінің бар болуы мен интегралдық бейнеленуі есебі қарастырылады. Бұл оператордың нөлдерінің көппериодтыдығы мен берілген жүйеге сәйкес біртекті жүйенің нөлден өзгеше көппериодты және нақты аналитикалық шешінің болмауы шарты анықталды. Біртекті емес сызықты автномдық жүйенің уақыт айнымалысы бойынша көппериодты және кеңістік айнымалысы бойынша нақты аналитикалық шешімінің интегралдық бейнеленуі алынды. Жеткілікті жалпы шарттарда берілген сызықты жүйенің Грин функциясы терминінде уақыт айнымалылары бойынша көппериоды және кеңістік айнымалысы бойынша нақты аналитикалық шешімінің бар болуы мен жалғыздығы туралы теорема негізделді.

**Түйін сөздер:** Көппериодтылық, дифференциалдау операторы, Ляпунов, автономдық жүйе, нақты аналитикалық функция.

*Abstract*

**MULTIPERIODIC SOLUTIONS OF SECOND-ORDER SYSTEMS WITH DIFFERENTIATION OPERATOR ON THE LYAPUNOV'S VECTOR FIELD**

*Omarova B.Zh.*
*K. Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan*

The problem of the existence and integral representation of a unique multiperiodic solution of a second-order linear inhomogeneous system with constant coefficients and a differentiation operator on the direction of the main diagonal of the space of time variables and of the vector fields in the form of Lyapunov systems with respect to space variables were considered. The multiperiodicity of zeros of this operator and the condition for the absence of a nonzero multiperiodic and real-analytic solution of the homogeneous system corresponding to the given system are established. An integral representation of solutions of an inhomogeneous linear autonomous system that multiperiodic in time variables and real-analytic in space variables is obtained. The existence theorem of a unique multiperiodic in time variables and real-analytic in space variables solutions of the original linear system in terms of the Green's function under sufficiently general conditions is substantiated.

**Keywords:** Multiperiodicity, differentiation operator, Lyapunov, autonomous system, real-analytic function.

**1. Введение.** Исследование решений систем дифференциальных уравнений в частных производных с колебательными свойствами в протяжении как временных, так и пространтвенных переменных относятся к важной части теории уравнений в обыкновенных в частных производных. Решение задач многочастотных колебаний получил большой импульс благодаря разработке КАМ-теории и работу Боголюбова-Митропольского-Самойленко. Фундаментальные исследования, основанные на Харасахала-Умбетжанова-Сартабанова [1-5] по многопериодическим колебаниям в системах уравнений в частных производных были развиты в духе трудов [6,7]. Идеи методов этих работ получили дальнейшее совершенствование и распространение на задачи для систем уравнений в частных производных первого порядка в исследованиях их последователей [8-12].

Рассмотрим систему уравнений

$$Dx = Ax + f(\tau, t, \xi) \tag{1.1}$$

с оператором дифференцирования

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + \left\langle 2\pi \nu^0 J\xi + \varphi(\xi_1, \xi_2), \frac{\partial}{\partial \xi} \right\rangle, \tag{1.1*}$$

где $x = (x_1, x_2)$ − искомая вектор-функция переменных $\tau \in R, t = (t_1, ..., t_m) \in R^m$, $e = (1, ..., 1)$ − $m$-вектор, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2$; $\nu^0$ − положительная постоянная, $J$ − симпликтическая единица второго порядка, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ − вектор-функция переменных $(\xi_1, \xi_2) = \xi \in R^2_\varepsilon$ − $\varepsilon$-окрестность точки $(0,0)$; $A$ − постоянная матрица второго порядка, $f = (f_1, f_2)$ − вектор-функция второго порядка.

Поставим задачу об исследовании вопроса о существовании и построении многопериодических по $(\tau, t)$, аналитических по $\xi \in R^2_\varepsilon$ решений системы (1.1) с оператором дифференцирования по векторным полям Ляпунова

$$\dot{t} = e, \quad \dot{\xi} = 2\pi \nu^0 J\xi + \varphi(\xi), \tag{1.2}$$

где $\dot{t} = dt/d\tau$, $\dot{\xi} = d\xi/d\tau$ и первое векторное уравнение (1.2) характеризует, что дифференцирование по временным переменным $(\tau, t) = (\tau, t_1, ..., t_m)$ проводится вдоль постоянных параллельных главной диагонали пространства $(\tau, t)$, а второе векторное уравнение (1.2) есть простейшая система Ляпунова, по направлениям которого дифференцируется по пространственным переменным $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ в $\varepsilon$-окрестности начала координат. Следовательно, вектор-функция $\varphi(\xi_1, \xi_2)$ – аналитична при $\xi \in R^2_\varepsilon$, у которой разложение по степеням $\xi$ начинается не ниже второго порядка

$$\varphi(\xi) = \sum_{|k| \geq 2} \varphi_k \xi^k, \; k = (k_1, k_2), \; |k| = |k_1| + |k_2| \tag{1.3}$$

при степенях $\xi^k = \xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}$ и имеем аналитический первый интеграл вида

$$|\xi|^2 + h(\xi) = c^2, \quad h(\xi) = \sum_{|k|\geq 3} h_k \xi^k \tag{1.4}$$

с коэффициентами $h_k$ и произвольной постоянной $c$, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$. Таким образом, решением $x = x(\tau, t, \xi)$ системы (1.1) описывается некоторый колебательный процесс, происходящий во многомерном временем $(\tau, t)$ на плоскости $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ со скоростью $v = Dx$. Не нарушая общности, матрицу $A$ будем считать приведенной к действительной нормальной форме, следовательно, имеем

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

с постоянными $\alpha$ и $\beta = 2\pi\nu_* > 0$. Предположим, что вектор-функция $f = f(\tau, t, \xi)$ $(\theta, \omega)$-периодическая по $(\tau, t)$ и вещественно аналитическая при $\tau \in \Pi_\rho = \{\tau \in C : |\operatorname{Im}\tau| < \rho\}$, $\rho = const > 0$, $C$ − комплексная плоскость, $t = (t_1, ..., t_m) \in \Pi_\rho \times ... \times \Pi_\rho = \Pi_\rho^m$, $\xi \in R_\varepsilon^2$.

$$f(\tau, t, \xi) = \sum_{(j_0, j)\in Z\times Z^m,\, k\in N^2} f_{(j_0, j)k}\, \xi^k \exp\left[2\pi i\left(j_0\nu_0\tau + \langle j, \nu t\rangle\right)\right], \tag{1.6}$$

где $Z$ − множество целых чисел, $N$ − расширенное нулем множество натуральных чисел.

Если вектор-функция $f$ зависит только от $\xi \in O_\varepsilon(0)$, то разложение (1.6) имеет вид

$$f^0(\xi) = \sum_{k\in N^2} f_k^0 \xi^k. \tag{1.7}$$

**2. Свойства нулей оператора дифференцирования по векторным полям.** Рассмотрим нули $u = u(\tau, t, \xi)$ оператора $D$, заданного соотношением (1.1*), которые определяются уравнением

$$Du(\tau, t, \xi) = 0. \tag{2.1}$$

Характеристической системой уравнения (2.1) является векторное поле (1.2), по которому, действует оператор (1.1*). Первое из уравнений (1.2) имеет общее решение $\lambda(\tau, \tau^0, t^0) = t^0 - e(\tau - \tau^0)$, исходящее из точки $(\tau^0, t^0) \in R \times R^m$. С помощью из этого решения определим первый интеграл $\lambda = \lambda(s, \tau, t)$ с параметром $s \in R$, обладающий свойствами [1,2]:

$$\begin{gathered} D\lambda(s, \tau, t) = 0, \quad \lambda(\tau, \tau, t) = t; \quad \lambda(s, \tau^0, \lambda(\tau^0, \tau, t)) = \lambda(s, \tau, t); \\ \lambda(s + \theta, \tau + \theta, t + q\omega) = \lambda(s, \tau, t) + q\omega,\ q \in Z^m. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Далее, рассмотрим второе уравнение системы (1.2), которое расписывается в виде

$$\dot{\xi}_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \varphi_1(\xi_1, \xi_2), \quad \dot{\xi}_2 = -\beta\xi_1 + \alpha\xi_2 + \varphi_2(\xi_1, \xi_2). \tag{2.3}$$

Согласно методу Ляпунова [6,7] преобразованием $\xi_1 = \eta\cos\zeta$, $\xi_2 = \eta\sin\zeta$, в соответствии с условием (1.3) система (2.3) и первый интеграл (1.4) представляются в виде

$$\dot{\eta} = \eta^2\psi_1(\eta, \zeta), \quad \dot{\zeta} = 2\pi\nu^0 + \eta\psi_2(\eta, \zeta), \tag{2.4}$$

$$\eta[1 + \eta h^*(\eta, \zeta)] = c, \tag{2.5}$$

где $h^*(\eta, \zeta)$ − функция аналитическая при $\eta \in R_\varepsilon = \{\eta \in R : |\eta| < \varepsilon\}$, $\zeta \in R$. Далее из (2.4) и (2.5) имеем

$$\tau = \frac{1}{2\pi\nu^0}\int_0^\zeta \left[1 + \tau_1(\zeta)c + \tau_2(\zeta)c^2 + ...\right]d\zeta \equiv \tau(\zeta, c), \tag{2.6}$$

где $\tau_j(\zeta+2\pi)=\tau_j(\zeta)$ − аналитические по $\zeta$ коэффициенты. Из соотношения (2.6) ясно, что функция $\tau(\zeta,c)$ обратима относительно $\zeta=\zeta(\tau,c)$, аналитична и периодична с периодом

$$\theta^0=\tau(\zeta+2\pi,c)=\tau(\zeta,c)=\nu_0^{-1}\left(1+\theta_1^0c+\theta_2^0c^2+...\right), \tag{2.7}$$

где коэффициенты $\theta_j^0=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\tau_j(\zeta)d\zeta,\ j=0,1,2,...$, причем $\theta^0=\dfrac{1}{\nu^0}$ при $c=0$.

В целом, соотношениями (2.3)-(2.7) схематично доказано, что любое решение

$$\xi=\mu(\tau,\tau^0,\xi^0) \tag{2.8}$$

системы (2.3) аналитично относительно всех аргументов при $\tau\in R,\ \tau^0\in R,\ \xi\in R_{\varepsilon_0}$ и $\theta^0$-периодично по $\tau$ и $\tau^0$. Таким образом, наряду с характеристикой $\lambda=\lambda(s,\tau,t)$ по временным переменным имеем другую характеристику по пространственным переменным $\mu=\mu(s,\tau,\xi)$ системы (1.2) обладающую свойствами:

$$\begin{aligned}
&1^0.\ \mu(s,\tau,\xi)=\sum_{j\in Z,\ k\in N^2}\mu_{jk}\,\xi^k\exp\left[2\pi i\,j\nu^0(\tau-s)\right],\ \mu(s,\tau,\xi)\in A^b\left(\Pi_\rho\times\Pi_\rho\times\Pi^2_{\varepsilon,\rho}\right),\\
&2^0.\ D\mu(s,\tau,\xi)=0,\quad \mu(\tau,\tau,\xi)=\xi,\quad \mu(s,\tau^0,\mu(\tau^0,\tau,\xi))=\mu(s,\tau,\xi),\\
&3^0.\ \mu(s+\theta^0,\tau,\xi)=\mu(s,\tau+\theta^0,\xi)=\mu(s,\tau,\xi),\\
&4^0.\ |\mu(s,\tau,\xi)|\le r,\ |\xi|\le\varepsilon,\ r=r(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

где $\Pi_{\varepsilon,\rho}=\{\xi_1\in C:|\operatorname{Re}\xi_1|<\varepsilon,|\operatorname{Im}\xi_1|<\rho\}$, $\Pi^2_{\varepsilon,\rho}=\Pi_{\varepsilon,\rho}\times\Pi_{\varepsilon,\rho}$. Пункты 2° и 3° свойств (2.9) характеристики (2.8) доказывается на основе свойства единственности решений системы (2.3). Доказательства остальных пунктов приведены выше соотношениями (2.3)-(2.7). Теперь решим задачу Коши для уравнения (2.1) с начальным условием

$$u(\tau,t,\xi)\big|_{\tau=\tau^0}=v(t,\xi)\in C^{(e,\tilde e)}_{t,\xi}\left(R^m\times\overline{R}^2_r\right), \tag{2.1°}$$

где $R_r^2=\{\xi\in R^2:|\xi|<r\}$, $\overline{R}_r^2$ − замыкание $R_r^2$, $\tilde e=(1,1)$ − вектор. Легко иметь, что

$$u(\tau,t,\xi)=v(\lambda(\tau^0,\tau,\xi),\mu(\tau^0,\tau,\xi)) \tag{2.10}$$

является решением задачи (2.1)-(1.1*)-(2.1°). На основе свойств (2.2) и характеристик (2.8) легко доказать, чтобы решение $u(\tau,t,\xi)$ обладало свойством $\omega$-периодичности по $t$ необходимо и достаточно, чтобы начальная функция (2.1°) была $\omega$-периодической по $t$:

$$v(t+q\omega,\xi)=v(t,\xi)\in C^{(e,\tilde e)}_{t,\xi}\left(R^m\times\overline{R}^2_r\right),\ q\in Z^m, \tag{2.11}$$

где $q\omega=(q_1\omega_1,...,q_m\omega_m)$, $Z^m$ − множество $m$-мерных целочисленных векторов $q=(q_1,...,q_m)$.

В дальнейшем предполагается, что периоды $\omega_1,...,\omega_m$ − рационально несоизмеримые.

При условии (2.11) и свойствах (2.2) и (2.9) нетрудно заметить, что решение (2.10) задачи (2.1)-(1.1*)-(2.1°) квазипериодично по $\tau$ с частотным базисом $\nu_1=\omega_1^{-1},...,\nu_m=\omega_m^{-1},\nu_{m+1}=1/\theta^0$; $e=(1,...,1)$ − $m$-вектор, $\tilde e=(1,1)$ − вектор.

Действительно, положим $\tilde\tau=(\tau_1,...,\tau_m)$, $\tilde\tau^0=(\tau_1^0,...,\tau_m^0)$ и $\tilde\lambda(\tilde\tau,\tilde\tau^0,t^0)=t^0+\tilde\tau-\tilde\tau^0$, то тогда имеем $\tilde\lambda(\tilde\tau,\tilde\tau^0,t^0)\big|_{\tilde\tau=e\tau,\ \tilde\tau^0=e\tau^0}=\lambda(\tau,\tau^0,t^0)$.

Следовательно, решение (2.10) можно получить от $(\theta^0,\omega,\omega)$-периодической по $(\tau,\tilde\tau,t)$ функции $w(\tau^0,\tilde\tau^0,\tau,\tilde\tau,t,\xi)=v(\tilde\lambda(\tilde\tau^0,\tilde\tau,t),\mu(\tau^0,\tau,\xi))$ при $\tilde\tau=e\tau$ и $\tilde\tau^0=e\tau^0$, что означает квазипериодичность нуля (2.10) по $\tau$.

В частности, начальная функция (2.11) вещественно аналитическая по $(t,\xi)\in\Pi_{\rho}^{m}\times\Pi_{\varepsilon,\rho}^{2}$, то имеем

$$v(t,\xi)=\sum_{j\in Z^m,\,k\in N^2} v_{jk}\,\xi^k \exp\left[2\pi i\left\langle j, \nu t\right\rangle\right] \tag{2.12}$$

с коэффициентами Фурье $v_{jk}$. Тогда соотношением (2.10) и (2.12) с учетом свойства 1° соотношений (2.9) имеем вещественно аналитический нуль $u(\tau^0,\tau,t,\xi)$ оператора $D$ вида

$$u(\tau^0,\tau,t,\xi)=\sum_{k\in N^2,\,(j_0,j)\in Z\times Z^m} u_{(j_0,j)k}\xi^k \exp\left\{2\pi i\left[j_0\nu^0+\left\langle j,\nu(t-e\tau+e\tau^0)\right\rangle\right]\right\}. \tag{2.13}$$

В итоге имеем следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** *При условиях (1.3), (1.4) и (2.12) нули (2.10) оператора дифференцирования (1.1*), определенные соотношением (2.10) являются вещественно аналитическими и представляются разложениями вида (2.13), причем они* $\omega$*-периодичны по* $t$ *и квазипериодичны по* $\tau$ *с частотным базисом* $(\nu^0,\nu)$.

**3. Многопериодические решения линейной однородной системы.** Введем в рассмотрение однородную систему

$$Dx=Ax, \tag{3.1}$$

соответствующую системе (1.1) и начальное условие

$$x\big|_{\tau=\tau^0}=v(t+q\omega,\xi)=v(t,\xi)\in C_{t,\xi}^{(e,\tilde{e})}\left(\Pi_{\rho}^{m}\times\Pi_{\varepsilon,\rho}^{2}\right),\ q\in Z^m \tag{3.1°}$$

для ее решения.

Очевидно, что единственное вещественно аналитическое решение $x$ задачи (3.1)-(3.1°) имеет вид

$$x(\tau^0,\tau,t,\xi)=X(\tau-\tau^0)\,u(\tau^0,\tau,t,\xi), \tag{3.2}$$

где $X(\tau)=\exp[A\tau]$, $u(\tau^0,\tau,t,\xi)=v(\lambda(\tau^0,\tau,\xi),\mu(\tau^0,\tau,\xi))$ − нуль оператора $D$, представляемой соотношением (2.12)-(2.13). При исследовании основного вопроса важно отсутствие $(\theta,\omega)$-периодических решений системы (3.1), отличных от нулевого. В связи с этим далее, рассмотрим два вида задач: 1°. Задача о существовании решений $x=x(\xi)$, вещественно аналитично зависящих только от $\xi\in\Pi_{\varepsilon,\rho}^{2}$ и 2°. Задача о существовании $\omega$-периодических по $t$, $\theta$-периодических по $\tau$ и вещественно аналитических по $(\tau,t,\xi)\in\Pi_{\rho}\times\Pi_{\rho}^{m}\times\Pi_{\varepsilon,\rho}^{2}$ решений $x=x(\tau,t,\xi)$, отличных от нулевого. Чтобы решить задачу 1° рассмотрим систему

$$D_{\xi}x=Ax \tag{3.3}$$

с оператором дифференцирования по $\xi$ вида

$$D_{\xi}=\left\langle 2\pi\nu^0 J\xi+\varphi(\xi),\ \partial/\partial\xi\right\rangle \tag{3.3*}$$

и решение $x(\xi)$ ищем в виде степенного ряда

$$x(\xi)=\sum_{k\in N^2} x_k^0\,\xi^k, \tag{3.4}$$

где постоянные $x_k^0$ отыскиваются методом неопределенных коэффициентов. В силу комплексности собственных значений матрицы $A$ задача 1° имеет единственное нулевое решение, так как коэффициенты $B_k x_k^0$ при $\xi^k$, полученные после подстановки (3.4) в (3.3)-(3.3*) слева имеют матрицы $B_0=0,\ B_k=\gamma_k E,\ |k|\neq 0$, а справа равны $Ax_k^0$, то есть имеем систему $[B_k-A]x_k^0=[\gamma_k E-A]x_k^0=0$ с постоянными $\gamma_k$ и единичной матрицей $E$. Так как $\det[B_k-A]\neq 0$ то $x_k=0,\ (k=0,1,2,...)$. Следовательно, $x^0=0$.

Чтобы решить задачу 2° отметим, что при исследовании ее, большое значение имеет рациональная независимость периодов (частот) вида

$$\omega_0=\theta,\omega_1,...,\omega_m,\ \omega_{m+2}=\theta_*=\nu_*^{-1};\ \omega_{m+1}=\omega^0=\theta^0(c):\ \omega_i/\omega_j\in Q,\ i\neq j \tag{3.5}$$

по временным переменным $t_0=\tau,t_1,...,t_m$, с которыми сталкиваемся в дальнейшем, где $Q$ − множество рациональных чисел. Согласно теореме 2.1, при условии (3.5), $(\theta,\omega)$-периодические по $(\tau,t)$ нули оператора $D$ зависят только от $\xi$: $u=u(\xi)$ или являются постоянными. Тогда решение системы (3.1) с $\theta$-периодическим по $\tau$ нулем $u=u(\xi)$ в силу (3.2) представляется в виде

$$x(\tau^0,\tau,\xi)=X(\tau-\tau^0)u(\xi), \tag{3.6}$$

где $Du(\xi)=0$, в частности $u(\xi)$ может быть постоянным вектором $u=u^0-const$.

Ясно, что при $\alpha\neq 0$ из представления (3.6) следует, что система (3.1) имеет единственное $\theta$-периодическое по $\tau$ решение $x=0$. Если $\alpha=0$, то, в силу условия (3.5), она также имеет только нулевое $\theta$-периодическое решение, поскольку условие

$$\det[X(\theta)-E]\neq 0. \tag{3.7}$$

остается выполненным. Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 3.1.** *При условиях (1.3)-(1.5) и (3.5) система (3.1) не имеет $(\theta,\omega)$-периодическое по $(\tau,t)$ решений, кроме нулевого.*

Относительно существования ненулевых вещественно аналитических многопериодических решений однородной системы приводим следующую теорему.

**Теорема 3.2.** *При условиях (1.3)-(1.5) решение задачи (3.1)-(3.1°) вида (3.2) является вещественно аналитическим при $(\tau,t,\xi)\in\Pi_\rho\times\Pi_\rho^m\times\Pi_{\varepsilon,\rho}^2$ $\omega$-периодическим по $t$ и квазипериодическим по $\tau$ с частотным базисом $(\nu,\nu^0)$ при $\alpha\neq 0$ и частотным базисом $(\nu,\nu_0,\ \nu^0)$ при $\alpha=0$.*

Доказательство данного утверждения (3.2) следует из теорем 2.1 и 3.1 с учетом структуры решения (3.2) начальной задачи (3.1)-(3.1°).

Заметим, что в зависимости от значений $c$ частота $\nu^0$ может быть как соизмеримой, так и несоизмеримой с другими частотами $\nu_j,\ j=\overline{0,m+1}$.

**4. Многопериодичесое решение автономной системы.**

Рассмотрим систему

$$Dx=Ax+f^0(\xi), \tag{4.1}$$

где вектор-функция $f^0(\xi)$ определяется соотношениям (1.7). Очевидно, что однородная система (3.1), соответствующая системе (4.1), не имеет многопериодических решений, кроме нулевого.

Следовательно, система (4.1) имеет также решения не более одного. Чтобы доказать существование единственного решения, зависящего только от $\xi$ рассмотрим систему

$$D_\xi x=Ax+f^0(\xi), \tag{4.2}$$

которая соответствует однородной системе (3.3)-(3.3*), а ее аналитическое решение в окрестности $\xi=0$ существует и ищем его в виде (3.4).

Подставив разложения (1.7) и (3.4) в систему (4.2) определим коэффициенты $x_k^0$ из систем $[\gamma_k E-A]x_k^0=f_k^0,\ k\in N^2$ с определителями $\det[\gamma_k E-A]=(\gamma_k-\alpha)^2+\beta^2\geq\beta^2>0$. Следовательно,

$$x^*(\xi)=\sum_{k\in N^2}[\gamma_k E-A]^{-1}f_k\,\xi^k. \tag{4.3}$$

Очевидно, что решение (4.3) с коэффициентами $x_k^0$ является и решением системы (4.1).

Таким образом, доказано существование единственного решения автономной системы (4.1).

**Теорема 4.1.** *Пусть выполнены условия (1.3)-(1.5) и (1.7). Тогда автономная система (4.1) имеет единственное аналитическое при $\xi\in\Pi_{\varepsilon,\rho}^2$ вещественно аналитическое решение вида (4.3).*

На основе матричной функции $X(\tau)=\exp[A\tau]$ вида

$$X(\tau)=e^{\alpha\tau}\begin{pmatrix}\cos\beta\tau & \sin\beta\tau\\ -\sin\beta\tau & \cos\beta\tau\end{pmatrix},\ \beta>0 \tag{4.4}$$

введем в рассмотрение матрицу

$$G(\tau,s)=\begin{cases}[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)]^{-1}X^{-1}(s+\theta), & s^*(\tau)-\theta\le s<\tau,\\ [X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)]^{-1}X^{-1}(s), & \tau\le s\le s^*(\tau),\end{cases} \tag{4.5}$$

где $s^*(\tau)$ − ступенчатая функция определенная при $\tau\in R$, обладающая свойствами $s^*(\tau+\theta)=s^*(\tau)+\theta$ и обобщенной производной $(d/d\tau)s^*(\tau)=0$.

На основе (4.4) легко проверить, что матрица (4.5) обладает свойствами

$$\frac{\partial}{\partial\tau}G(\tau,s)=AG(\tau,s),\ \tau\ne s;\quad G(\tau,\tau+0)-G(\tau,\tau-0)=E;\quad G(\tau+\theta,s+\theta)=G(\tau,s). \tag{4.6}$$

Матричную функцию (4.5) со свойствами (4.6) можно назвать функцией Грина задачи о многопериодических решениях для системы (1.1)-(1.1*).

Функцией Грина, как правило, задается интегральное представление неоднородной системы. Очевидно, что единственное $\theta$-периодическое по $\tau$ решение $x(\tau,\xi)$ системы (4.1) интегрально представляется соотношением

$$x(\tau,\xi)=\int\limits_{s^*(\tau)-\theta}^{s^*(\tau)}G(\tau,s)\,f^0(\mu(s,\tau,\xi))ds \tag{4.7}$$

причем можно показать, что $x(\tau,\xi)\equiv x^*(\xi)$.

Заметим, что в силу автономности характеристический интеграл $\mu=\mu(s,\tau,\xi)$ представляется в виде $\mu=\mu^0(\tau-s,\xi)$ и периодичен относительно $\tau$.

Следовательно, в процессе интегрирования (4.7) малых делителей не появляются и результат зависит только от $\xi$.

На основе интегральных представления (4.7) теорему 4.1 можно сформулировать в другом виде.

**Теорема 4.2.** *При условиях теоремы 4.1 единственное $\theta$-периодическое решение $x$ системы (4.1) имеет интегральное представление вида (4.7), зависящее только от $\xi$.*

**5. Решение основной задачи о многопериодическом решении.**

Пользуясь формулами Эйлера матрицу (4.4) можно представить в виде

$$X(\tau)=\Gamma_+e^{(\alpha+2\pi i\nu_*)\tau}+\Gamma_-e^{(\alpha-2\pi i\nu_*)\tau} \tag{5.1}$$

с матричными второго порядка коэффициентами $\Gamma_\pm=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \mp i\\ \pm i & 1\end{pmatrix}$, где $\beta=2\pi\nu_0>0$.

В силу условий (1.6), (2.9) и (5.1) имеем разложение в ряд Тейлора-Фурье вида

$$\begin{aligned}X^{-1}(s)f(s,\lambda(s,\tau,t),\mu(s,\tau,\xi))=&\sum_{k\in N^2,\ \bar{j}\in Z^{m+3}}f_{k\bar{j}}\,\xi^k\exp\{2\pi i[j^0\nu^0\tau+\langle j,\nu(t-\tau)\rangle]\}\times\\ &\times\exp\{2\pi i[j^0\nu^0+j^*\nu^*+j_0\nu_0+\langle j,\nu\rangle]s\}\cdot e^{\alpha s},\end{aligned} \tag{5.2}$$

где $\bar{j}=(j^0,j^*,j_0,j)$, $j=(j_1,...,j_m)$, $|\xi|\le e^{2\pi\delta}=r$, $\tau\in\Pi_\delta, t\in\Pi_\delta^m$, коэффициенты Тейлора-Фурье $f_{k\bar{j}}$ удовлетворяют оценке $|f_{k\bar{j}}|\le\exp[-2\pi\delta(|k|+|\bar{j}|)]\,\|f\|_\delta$.

В дальнейшем, нам понадобиться условие сильной несоизмеримости вида

$$\left|\langle \bar{j}, \bar{\nu}\rangle\right| \geq \frac{c_0}{2\pi} |\,\bar{j}\,|^{-\gamma}, \ \bar{j} \in Z^{m+3} \tag{5.3}$$

при $\nu^0 \in I^0$, где $c_0$ и $\gamma$ − положительные постоянные, $\bar{j} = (j^0, j^*, j_0, j_1, ..., j_m)$, $\bar{\nu} = (\nu^0, \nu^*, \nu_0, \nu_1, ..., \nu_m)$ − частоты, $Z^{m+3}$ − множество целочисленных $(m+3)$-мерных векторов. Относительно $I^0$ следует учесть, что $\nu^0 = \nu^0(c)$ − аналитично зависит от $c \in O_{\varepsilon_0}$ и промежуток $[\nu^0(0), \ \nu^0(\varepsilon_0)]$ является областью изменения. Здесь множество значений $\nu^0(c)$, для которых выполняется условие (5.3) обозначено через $I^0$. Введем в рассмотрение решение

$$x(\tau, t, \xi) = \int\limits_{s^*(\tau)-\theta}^{s^*(\tau)} G(\tau, s)\, f\big(s, \lambda(s, \tau, t), \mu(s, \tau, \xi)\big) ds \tag{5.4}$$

системы (1.1)-(1.1*). Предполагается существование интегралы (5.4), легко убедиться, что вектор-функция $x^*(\tau, t, \xi)$, определенная соотношением удовлетворяет системе (1.1) с оператором дифференцирования (1.1*). Из выражения

$$\begin{aligned} x^*(\tau, t, \xi) = &\left\{ \int\limits_{s^*(\tau)-\theta}^{\tau} X^{-1}(\theta) X^{-1}(s)\, f\big(s, \lambda(s, \tau, t), \mu(s, \tau, \xi)\big) ds + \int\limits_{\tau}^{s^*(\tau)} X^{-1}(s)\, f\big(s, \lambda(s, \tau, t), \mu(s, \tau, \xi)\big) ds \right\} \times \\ &\times \left[X^{-1}(\tau + \theta) - X^{-1}(\tau)\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

полученного из (5.4) в силу (4.5), с учетом $X^{-1}(s + \theta) = X^{-1}(\theta) X^{-1}(s)$, следует, что существование интеграла (5.4) связано с интегрируемостью вектор-функции (5.2) по $s$.

При интегрировании с использованием разложения (5.2) из выражения (5.5) получим ряд с коэффициентами

$$f_{k\,\bar{j}} \left[\alpha + 2\pi i \langle \bar{j}, \bar{\nu}\rangle\right]^{-1}, \ k \in N^2, \ \bar{j} \in Z^{m+3}. \tag{5.6}$$

В случае $\alpha \neq 0$, как видно из (5.6), малых знаменателей в полученном ряде не появляются, поскольку $\left|\alpha + 2\pi i \langle \bar{j}, \bar{\nu}\rangle\right| ng \geq |\alpha| > 0$. При этом интеграл (5.5), следовательно (5.4) существует при $\tau \in \Pi_\delta, t \in \Pi_\delta^m, |\,\xi\,| \leq e^{2\pi\delta}$ . Если $\alpha = 0$, то появляются малые делители, но существование интеграла (5.5) обеспечивает условие (5.3) при $\tau \in \Pi_{\delta/2}, t \in \Pi_{\delta/2}^m, |\,\xi\,| \leq e^{\pi\delta}$ .

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 5.1.** *Пусть выполнены условия (1.3)-(1.6) и (3.5). Тогда а) при* $\alpha \neq 0$ *и б) при* $\alpha = 0$ *с дополнительным условием (5.3) система (1.1) допускает единственное* $(\theta, \omega)$*-периодическое по* $(\tau, t)$ *вещественно аналитическое при* $(\tau, t, \xi) \in \left(\Pi_{\rho/2} \times \Pi_{\rho/2}^m \times \Pi_{\varepsilon, \rho/2}^2\right)$ *решение* $x^*(\tau, t, \xi)$, *интегрально представимое соотношением (5.4).*

**Доказательство.** Существование искомого решения в виде интегрального представления (5.4) легко обосновать в силу условий (1.3)-(1.6), (3.5) с учетом условия (5.3) и соотношений (5.5), (5.6) для случаев $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$. Многопериодичность решения периодов $(\theta, \omega)$ по $(\tau, t)$ доказывается непосредственной проверкой. Единственность следует из выполнения неравенства (3.7) при условии (3.5). Теорема доказана полностью.

В заключении, выражаю благодарность своему научному руководителю профессору Ж.А. Сартабанову за постановку вопроса и указания структурно-методического характера по оформлению данной заметки.