

Н.М. Темирбеков^{1,4}, А.К. Тураров^{2*}, Ф.А. Алиев³, А.Н. Темирбеков^{1,4}

¹Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

²Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева,
г. Усть-Каменогорск, Казахстан

³Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

⁴Национальная инженерная академия Республики Казахстан, Алматы, Казахстан

*e-mail: t010183@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССА ДОБЫЧИ НЕФТИ МЕТОДОМ СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

В данной статье рассматривается численный метод решения прямой и обратной задачи газлифтного процесса добычи нефти описываемый одномерными уравнениями Навье-Стокса для сжимаемого газа. Для решения прямой задачи построено семейство разностных схем и исследованы вопросы корректности этой разностной задачи в зависимости от параметра. Решение обратной задачи сведена к задаче оптимального управления. Целевой функционал строится с применением дополнительного условия. Для минимизации целевого функционала используется градиентный метод. Градиент целевого функционала определяется через решение сопряженной задачи, которая содержит ценную информацию о решении прямой задачи. А сама сопряженная задача строится с использованием тождество Лагранжа и условия равенства нулю внеинтегральных членов. Сопряженная задача является ретроспективной, т. к. дополнительное условие на объемный расход газа и на давление ставятся в некоторый момент времени. Итерациями определяются начальные условия для объемного расхода газа и давления через решение сопряженной, ретроспективной задачи. Проведен вычислительный эксперимент по разработанному алгоритму, который подтверждает то, что по заданному дополнительному условию можно определить начальные значения объемного расхода газа и давления с требуемой точностью. Разработанный алгоритм может быть использован для построения кривой для производительности газлифтного процесса.

Ключевые слова: Газлифтный процесс добычи нефти, уравнения Навье-Стокса, сопряжённое уравнение, обратная задача, оптимальное управление, градиентный метод, конечно-разностный метод.

Н.М. Темирбеков^{1,4}, А.К. Тураров², Ф.А. Алиев³, А.Н. Темирбеков^{1,4}

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;

²Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен, Қазақстан;

³Баку мемлекеттік университеті, Баку, Әзербайжан;

⁴Қазақстан Республикасының Ұлттық инженерлік академиясы, Алматы, Қазақстан

МҰНАЙ ӨНДІРУДІҢ ГАЗЛИФТТІК ПРОЦЕСІНІҢ ТУРА ЖӘНЕ КЕРІ ЕСЕПТЕРІН ТҮЙІНДЕС ТЕНДЕУЛЕР ӘДІСІМЕН САНДЫҚ ШЕШУ

Аңдатпа

Бұл мақалада сығылатын газ үшін бір өлшемді Навье-Стокс теңдеулерімен сипатталған мұнай өндірудің газлифттік процесінің тура және кері есептерін шешудің сандық әдісі қарастырылады. Тура есепті шешу үшін айырымдық сұлба тобы құрылды және параметрге байланысты осы айырымдық есебінің қисындылық мәселелері зерттелді. Кері есептің шешімі оңтайлы басқару есебіне келтіріледі. Мақсатты функционал қосымша шарт арқылы құрастырылады. Мақсатты функционалды азайту үшін градиент әдісі қолданылады. Мақсатты функционал градиенті тура есептің шешімі туралы құнды ақпаратты қамтитын түйіндес есептің шешімі арқылы анықталады. Ал түйіндес есептің өзі Лагранж сәйкестігі мен интегралдық емес мүшелер нөлге тең болу шарты арқылы құрастырылады. Түйіндес есеп ретроспективті болып табылады, өйткені көлемдік газ шығыны мен қысымға қосымша шарт белгілі бір уақытта орнатылады. Итерациялармен ретроспективті есепті шешу арқылы көлемдік газ шығыны мен қысымының бастапқы шарттарын анықтау үшін қолданылады. Көрсетілген қосымша

шарт негізінде газдың көлемдік шығыны мен қысымының бастапқы мәндерін қажетті дәлдікпен анықтауға болатынын растайтын әзірленген алгоритмді пайдаланып есептеу эксперименті жүргізілді. Әзірленген алгоритмді газлифтті процесінің өнімділігі үшін қисық сызығын салу үшін пайдалануға болады.

Түйін сөздер: Мұнай өндірудің газлифттік процесі, Навье-Стокс теңдеулері, түйіндес теңдеу, кері есеп, оңтайлы басқару, градиент әдісі, ақырлы айырымдар әдісі.

N.M. Temirbekov^{1,4}, A.K. Turarov², F.A. Aliev³, A.N. Temirbekov^{1,4}

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

²D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

³Baku State University, Baku, Azerbaijan

⁴National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan

NUMERICAL SOLUTION OF THE DIRECT AND INVERSE PROBLEM OF GAS LIFT OIL PRODUCTION PROCESS BY THE METHOD OF CONJUGATE EQUATIONS

Abstract

This article discusses a numerical method for solving the direct and inverse problems of the gas-lift process of oil production described by one-dimensional Navier-Stokes equations for compressible gas. To solve the direct problem, a family of difference schemes is constructed and the correctness of this difference problem depending on the parameter is investigated. The solution to the inverse problem is reduced to an optimal control problem. The objective functional is constructed using an additional condition. To minimize the objective functional, a gradient method is used. The gradient of the objective functional is determined through the solution of the conjugate problem, which contains valuable information about the solution of the direct problem. And the conjugate problem itself is constructed using the Lagrange identity and the condition of equality to zero of the integral terms. The conjugate problem is retrospective, since the additional condition on the volumetric gas flow rate and pressure are set at a certain point in time. Iterations determine the initial conditions for the volumetric gas flow rate and pressure through the solution of the conjugate, retrospective problem. A computational experiment was conducted using the developed algorithm, which confirms that the initial values of the volumetric gas flow rate and pressure can be determined with the required accuracy using the specified additional condition. The developed algorithm can be used to plot a curve for the gas-lift process performance.

Keywords: Gas-lift oil production process, Navier-Stokes equations, conjugate equation, inverse problem, optimal control, gradient method, finite-difference method.

Введение

Газлифтный процесс представляет собой метод добычи нефти, при котором газ вводится в затрубное пространство скважины, чтобы уменьшить плотность газожидкостной смеси (ГЖС) и облегчить её подъём на поверхность. Этот процесс происходит в двух основных зонах:

- Кольцевое пространство (затрубное): пространство между стенкой скважины и насосно-компрессорной трубой, где движется газ.

- Подъёмник: внутренняя труба, через которую смесь нефти, газа и воды поднимается к устью скважины.

Модель предложенная в работе [1] описывает движение газа и ГЖС в этих зонах с использованием системы гиперболических уравнений с частными производными. Эти уравнения учитывают давление P и объёмный расход закачиваемого газа Q как основные параметры, влияющие на транспортировку смеси.

В этой [2] работе представлен математический метод к оптимизации добычи нефти из скважин, использующих газлифтную систему. Цель работы — определить экономически эффективный уровень добычи нефти и снизить производственные затраты за счет минимизации расхода газа, используемого для подъема нефти. Для этого были собраны данные о характеристиках скважин, которые затем использовались в приложении PIPESIM для моделирования. На основе этих данных были построены кривые производительности каждой скважины. Далее была разработана нелинейная многокритериальная модель программирования для оптимизации добычи нефти. В работе [3] рассмотрено исследование

метода оптимизации и распределения газлифта для увеличения нефтеотдачи генетическим алгоритмом. В работах [4-10] используется математическая модель основанная на законе Дарси. Это очень простое уравнение в правой части которого сила тяжести, сила трения и ускорения. Давление заменяется плотностью газа согласно уравнению состояния, а плотность смеси рассматривается как линейная комбинация плотностей газа и жидкости.

В дальнейшем авторами работы [4] были использованы генетические алгоритмы решения задачи максимизации добычи нефти. Скорость добычи жидкости из добывающей скважины иллюстрирована сочетанием притока производительности (IPR) и производительности вертикальной подъемной силы (VLP). В работе [5] кривая производительности газ лифта (КПГЛ) построена для заданных скважин в результате эксперимента. С помощью этой кривой можно оценить влияние скорости закачки газа на дебит жидкости. Это позволяет определить скорость закачки газа, необходимую для достижения желаемой производительности. Изучение КПГЛ позволяет найти оптимальную скорость закачиваемого газа. В работе [6] КПГЛ получено на основе промысловых данных путем измерения скорости закачки газа и скорости добычи жидкости. По измеренным данным проведено интерполирование для получения КПГЛ. Из полевых данных КПГЛ строится методом наименьших квадратов в виде квадратичной полиномиальной функций. В работе [7] предложена новая функция для улучшения предыдущего квадратичного полинома КПГЛ с добавлением логарифмического члена. В работе Sukarno P. и другие [8] предложена экспоненциальная функция для подбора КПГЛ по полевым данным. Однако экспоненциальная КПГЛ хорошо описывает только закачку газа. Исследователи S. Guet и G. Oams [9, 10] используя кусочно-линейную функцию для подбора GLPC по полевым данным, которая имеет хорошую перспективу применения. Во всех этих работах использованы полуэмпирические подходы исследования кривой производительности процесса газ лифта. На сегодняшний день распространенным методом решения обратных задач математической физики являются сведения их к задачам оптимального управления. Одной из актуальных задач современного оптимального управления является управление поведением объектов, изменение которых описывается с помощью уравнений с частными производными. Цель управления состоит в том, чтобы перевести изучаемый объект из одного известного состояния в другое, влияя на некоторые его параметры. Впервые подобные задачи были сформулированы в работах J.L. Lions [11, 12].

В качестве управляющей функций может быть использована правая часть уравнения или системы уравнений. Решению таких задач методом сопряженных уравнений посвящены работы Агашкова В.И. [13]. Во многих работах рассматриваются граничное управление, т.е. управление посредством граничных условий. Работы В.И. Ильина и Е.И. Моисеева [14] посвящены исследованию задач граничного управления для уравнения колебаний струны, в которых были получены в явном виде управляющие функции, переводящие струну из заданного начального состояния в заданное финальное состояние за определенное время. При этом рассматривались различные типы граничных управлений. В работе Г.И. Марчука [15] дано понятие сопряженных операторов и уравнений и отмечены возможные их приложения в математическом моделировании и вычислительной математике. Свойства сопряженных операторов достаточно полно исследованы для линейных операторов в гильбертовых и банаховых пространствах и отражены во многих монографиях. В работе [16] предложен метод фиктивных областей с идеей сопряженной оптимизации позволяющий строить однородную разностную схему во всей расширенной области. При этом разумное продолжение коэффициентов основного уравнения приводит к сходимости решения задачи в исходной области к искомому решению, что подтверждается математически доказанными утверждениями и результатами численных расчетов. Для минимизации функционала Лагранжа использовался сопряженный градиентный метод, который позволяет найти эффективное оптимальное решение путем итеративного уточнения. При этом необходимо вычислить градиент функционала Лагранжа, который приводит к постановке сопряженной задачи. Приведено постановка сопряженной задачи, а также описано вычисление градиента

функционала, который зависит от решения сопряженной задачи. По численным результатам работы сделаны выводы, что использование градиентного метода, сопряженной задачи и метода фиктивных областей являются эффективным подходом для решения сложных задач оптимизации с ограничениями. В работе метод разработан сначала для уравнения Бюргерса. Сформулирована вспомогательная и сопряженная задача для уравнения Бюргерса. Разработан итерационный алгоритм для приближенного решения вспомогательной задачи. Получена оценка условной устойчивости сопряженной задачи методом энергетических неравенств. Доказана теорема об оценке условной устойчивости. На модельной задаче показана эффективность использования такой модификации. Данный метод является очень удобным в части автоматизации программирования. Далее предложенный алгоритм разработан для решения уравнения Навье-Стокса. В статье А.В. Аргучинцева, V.P. Poplevko [17] рассматривается задача оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений, в которой граничные условия определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Рассмотрена задача моделирования динамики невзаимодействующих между собой популяций с учетом возрастного распределения особей. Целью задачи управления может быть достижение заданных плотностей популяций в конечный момент времени. Для этой задачи получено неклассическое необходимое условие оптимальности, которое основано на применении специальной вариации управления, обеспечивающей гладкость управляющих функций. Предложен метод улучшения допустимых управлений. В работе [18] рассматривается разработка методов решения задач оптимального управления в классе гладких управляющих воздействий с учетом таких ограничений на управления, которые характерны для обратных задач математической физики. Численная реализация метода проведена для системы гиперболических уравнений первого порядка линеаризованной теории “мелкой воды”. Предполагается, что в конечный момент времени известен профиль волны. Обратная задача интерпретирована как задача минимизации квадратичного функционала. Далее модель “мелкой воды” приведена к инвариантной форме. Для численного решения используется разностная схема метода характеристик. Обратные задачи различных типов встречаются в повседневной жизни. Работы [19, 20] посвящены исследованию применения численных методов для решения задач, связанных с акустическими уравнениями, с особым акцентом на задачи, имеющие значительное практическое значение, как в области медицинской визуализации, так и в теоретической акустике. В работе Темирбекова Н.М. [21] для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода использован проекционный метод Бубнова-Галеркина, где в качестве базисных функций применены вейвлеты Лежандра. В рамках метода Галеркина разложение осуществлялось с использованием этих базисов, что привело к системе линейных алгебраических уравнений для вычисления коэффициентов. Полученная система решалась методом сопряженных градиентов.

Методология исследования

1. *Постановка прямой задачи.* Математическая модель работы газлифтной скважины описывается следующей системой уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа [1]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad t \geq 0, x \in (0; 2l), \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\bar{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - 2a \cdot Q, \quad t \geq 0, x \in (0; 2l), \quad (2)$$

где

$$c = \begin{cases} c_1, & x \in (0; l) \\ c_2, & x \in (l; 2l) \end{cases}, \quad \bar{F} = \begin{cases} \bar{F}_1, & x \in (0; l) \\ \bar{F}_2, & x \in (l; 2l) \end{cases}, \quad a = \begin{cases} a_1, & x \in (0; l) \\ a_2, & x \in (l; 2l) \end{cases}$$

начальные условия

$$P(0, x) = P^0(x), \quad Q(0, x) = Q^0(x) \quad (3)$$

и граничные условия

$$P(t, 0) = P_0(t), \quad Q(t, 0) = Q_0(t) \quad \text{при } x = 0, \quad (4)$$

$$P(t, l + 0) = P(t, l - 0) + P_{pl}(t), \quad Q(t, l + 0) = Q_0(t, l - 0) + Q_{pl}(t) \quad (5)$$

при $x = l$,

Здесь, t - время, x - координата по глубине скважины, P - давление, Q - объемный расход газа, \bar{F} - площадь поперечного сечения скважины, c - скорость звука в жидкости, a - коэффициент, Q_{pl} - объемный расход газа в пласте, P_{pl} - давление пласта, $P^0(x)$ - начальное распределение давления газа, $Q^0(x)$ - начальный объемный расход закачиваемого газа, l - глубина скважины.

В прямой задаче надо найти $P(t, x)$ и $Q(t, x)$ по заданными функциями $P^0(x)$, $Q^0(x)$, $P_0(t)$, $Q_0(t)$, $P_{pl}(t)$, $Q_{pl}(t)$.

Уравнение (1) является уравнением неразрывности, а (2) - уравнением движения газа.

2. Исследование аппроксимации, устойчивости семейства разностных схем. Рассмотрим явную разностную схему для задачи (1) - (5)

$$\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\tau} = -\frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{h}, \quad (6)$$

$$\frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\tau} = -\bar{F} \cdot \frac{P_i^n - P_{i-1}^n}{h} - 2a \cdot Q_i^{n+1} \quad (7)$$

начальные условия

$$P_i^0 = P^0(x_i), \quad Q_i^0 = Q^0(x_i), \quad i = \overline{0, N_x} \quad (8)$$

и граничные условия соответственно

$$P_0^j = P_0(t_j), \quad Q_0^j = Q_0(t_j), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad (9)$$

$$P_{\frac{N_x}{2}}^j = P_{\frac{N_x}{2}-1}^j + P_{pl}, \quad Q_{\frac{N_x}{2}}^j = Q_{\frac{N_x}{2}-1}^j + Q_{pl}. \quad (10)$$

Неявную схему для уравнений рассмотрим в виде

$$P_i^{j+1} = P_i^j - \gamma_1 \cdot (Q_i^{j+1} - Q_{i-1}^{j+1}), \quad (11)$$

$$Q_i^{j+1} = [Q_i^j - \gamma_2 \cdot (P_i^{j+1} - P_{i-1}^{j+1})] / (1 + 2a\tau), \quad (12)$$

где $\gamma_1 = \frac{\tau c^2}{\bar{F} \cdot h}$, $\gamma_2 = \frac{\tau \cdot \bar{F}}{h}$.

Отсюда видно, что счет можно начинать с точки $i = 1$, $j = 0$. Тогда

$$P_1^1 = P_1^0 - \gamma_1 \cdot (Q_1^1 - Q_0^1), \quad (13)$$

$$Q_1^1 = [Q_1^0 - \gamma_2 \cdot (P_1^1 - P_0^1)] / (1 + 2a\tau). \quad (14)$$

Умножаем уравнение (14) на $-\gamma_1$ и суммируем с первым, получим

$$P_1^1 = P_1^0 + \gamma_1 \cdot Q_0^1 - \frac{\gamma_1}{1 + 2a\tau} \cdot Q_1^0 + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{1 + 2a\tau} \cdot P_1^1 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{1 + 2a\tau} \cdot P_0^1.$$

Отсюда находим P_1^1

$$P_1^1 = \frac{1 + 2a\tau}{1 + 2a\tau - \gamma_1 \gamma_2} \cdot \left[P_1^0 + \gamma_1 \cdot Q_0^1 - \frac{\gamma_1}{1 + 2a\tau} \cdot Q_1^0 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{1 + 2a\tau} \cdot P_0^1 \right]. \quad (15)$$

Подставляя P_1^1 в (14) и определим Q_1^1 .

Зная P_1^1 , Q_1^1 можно вычислить все значения P_1^j , Q_1^j до некоторого $j = j_0$, затем, положив $i = 2$, найти P_2^j , Q_2^j при $0 \leq j \leq j_0$ и т.д.

В общем случае для определения P_i^{j+1} получим

$$P_i^{j+1} = \frac{1 + 2a\tau}{1 + 2a\tau - \gamma_1\gamma_2} \cdot \left[P_i^j + \gamma_1 \cdot Q_{i-1}^{j+1} - \frac{\gamma_1}{1 + 2a\tau} \cdot Q_i^j - \frac{\gamma_1\gamma_2}{1 + 2a\tau} \cdot P_{i-1}^{j+1} \right]. \quad (16)$$

Объединяя явную (6), (7) и чисто неявную схему (11), (12) рассмотрим семейство схем, заданных на четырехточечном шаблоне

$$P_t^n + \frac{c^2}{F} (\sigma \cdot Q_{\bar{x}}^{n+1} + (1 - \sigma)Q_{\bar{x}}^n) = 0, \quad (17)$$

$$Q_t^n + \bar{F}(\sigma \cdot P_{\bar{x}}^{n+1} + (1 - \sigma)P_{\bar{x}}^n + 2aQ_i^{n+1}) = 0, \quad x \in \omega_h, \quad t \in \omega_\tau \quad (18)$$

с начальными условиями

$$P(0, x_i) = P_0(x_i), \quad Q(0, x_i) = Q_0(x_i), \quad x_i \in \omega_h, \quad (19)$$

и граничными условиями

$$P(t_j, 0) = P_0(t_j), \quad Q(t_j, 0) = Q_0(t_j), \quad t_j \in \omega_\tau, \quad (20)$$

$$P\left(t_j, x_{\frac{N_x}{2}}\right) = P\left(t_j, x_{\frac{N_x}{2}-1}\right) + P_{pl}, \quad (21)$$

$$Q\left(t_j, x_{\frac{N_x}{2}}\right) = Q\left(t_j, x_{\frac{N_x}{2}-1}\right) + Q_{pl}, \quad (22)$$

Схема (6), (7) и (11), (12) принадлежат этому семейству и соответствуют $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ соответственно.

Вычислим невязку для этой системы разностных уравнений

$$\psi_1 = P_t^n + \frac{c^2}{F} (\sigma \cdot Q_{\bar{x}}^{n+1} + (1 - \sigma)Q_{\bar{x}}^n), \quad (23)$$

$$\psi_2 = Q_t^n + \bar{F}(\sigma \cdot P_{\bar{x}}^{n+1} + (1 - \sigma)P_{\bar{x}}^n + 2aQ_{\bar{x}}^{n+1}). \quad (24)$$

Используем разложение в ряд Тейлора

$$P(t_{n+1}, x_i) = P\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + \frac{\tau}{2} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + \frac{\tau^2}{8} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + \\ + \frac{\tau^3}{48} \cdot \left(\frac{\partial^3 P}{\partial t^3}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + \frac{\tau^4}{384} \cdot \left(\frac{\partial^4 P}{\partial t^4}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + O(\tau^5),$$

$$P(t_n, x_i) = P\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) - \frac{\tau}{2} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + \frac{\tau^2}{8} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) - \\ - \frac{\tau^3}{48} \cdot \left(\frac{\partial^3 P}{\partial t^3}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + \frac{\tau^4}{384} \cdot \left(\frac{\partial^4 P}{\partial t^4}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + O(\tau^5).$$

Подставляя эти разложения в $\frac{(P_i^{n+1} - P_i^n)}{\tau}$ получим, что

$$P_t^n = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + O(\tau^2). \quad (25)$$

Аналогично

$$Q_t^n = \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)\left(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i\right) + O(\tau^2). \quad (26)$$

Разложим функций P и Q по переменной x :

$$Q_{i-1}^n = Q_i^n - h \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^n + O(h^3).$$

Теперь найдем разностную производную назад:

$$\frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{h} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^n - \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^n + O(h^2). \quad (27)$$

Аналогично имеем

$$\frac{P_i^n - P_{i-1}^n}{h} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^n - \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^n + O(h^2). \quad (28)$$

Подставляем (25) - (28) в (23) и (24), получим

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{c^2}{\bar{F}} \left\{ \sigma \cdot \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2) \right] + \right. \\ & \left. + (1 - \sigma) \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2) \right] \right\} + O(\tau^2), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \bar{F} \left\{ \sigma \cdot \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2) \right] + \right. \\ & \left. + (1 - \sigma) \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+1} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2) \right] + 2aQ_i^{n+1} \right\} + O(\tau^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Для удобства дальнейших выкладок для невязок ψ_1, ψ_2 положим

$$\frac{c^2}{\bar{F}} = 1, \quad \bar{F} = 1. \quad (31)$$

Разложим в ряд Тейлора по t слагаемые $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+1}, \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^n, \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+1}, \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^n$ в окрестности точки $t = t_{n+\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+1} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \quad (32)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^n = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+1} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \quad (34)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^n = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2). \quad (35)$$

Тогда из (29) - (30) с учетом предположения (31) получим

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \sigma \cdot \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + O(h^2) \right] + \\ & + (1 - \sigma) \cdot \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^n + O(h^2) \right], \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \sigma \cdot \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} + O(h^2) \right] + \\ & + (1 - \sigma) \cdot \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5\tau \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^n + O(h^2) + 2aQ_i^{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Из основных уравнений (1), (2) имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} &= - \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}}, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} &= - \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 2aQ_i^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Подставляем эти выражения в (37) и получим

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \sigma \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - (1 - \sigma) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} + 0,5(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \\ & - \frac{\sigma h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} - \frac{(1 - \sigma)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right)_i^n + O(\tau^2 + h^2), \\ \psi_2 = & \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \sigma \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - (1 - \sigma) \cdot \left[- \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 2aQ_i^{n+\frac{1}{2}} \right] + \\ & + 0,5\tau \cdot (2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{(1 - \sigma)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} - \frac{(1 - \sigma)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^n + \\ & + (1 - \sigma)2aQ_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что слагаемое содержащие $\left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}}$ сокращаются и получается, что

$$\begin{aligned} \psi_1 = & 0,5\tau(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\sigma h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} - \\ & - \frac{(1 - \sigma)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right)_i^n + O(\tau^2 + h^2), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & 0,5\tau(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} \right)_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\sigma h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^{n+1} - \frac{(1 - \sigma)h}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_i^n + \\ & + 2a(1 - \sigma) \cdot \left(Q_i^{n+1} - Q_i^{n+\frac{1}{2}} \right) + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned} \quad (39)$$

Далее разлагаем в ряд Тейлора по t в окрестности точки $t = t_{n+\frac{1}{2}}$ вторые производные

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} &= \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau), \\
 \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^n &= \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau), \\
 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} &= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau), \\
 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^n &= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau).
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Предположим, что $Q_i^{n+1} = Q_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2)$.

С учетом (40) из (38) и (39) получим

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= 0,5\tau(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5h \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2), \\
 \psi_2 &= 0,5\tau(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5h \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2).
 \end{aligned}$$

Из системы уравнений (1), (2) имеем, что

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial x}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned}
 \psi_1 + \psi_2 &= 0,5\tau(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5h \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &+ 0,5\tau(2\sigma - 1) \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 0,5h \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2).
 \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} &= -\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - 2a \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}}, \\
 \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} &= -\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

получим, что

$$\begin{aligned}
 \psi &= \psi_1 + \psi_2 = 0,5\tau(2\sigma\tau - \tau + h) \cdot \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} - ah \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + \\
 &+ 0,5\tau(2\sigma\tau - \tau + h) \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2).
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что схема с весами имеет второй порядок аппроксимации

$$\psi = O(\tau^2 + h^2),$$

Если

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau} = \sigma_0 \quad (41)$$

а при $\sigma \neq \sigma_0$ - первый порядок, $\psi = O(\tau + h)$.

3. Устойчивость по начальным данным. Покажем теперь, что схема семейство схем с весами (23) - (29) устойчива по начальным данным при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau}.$$

Для доказательства используем метод энергетических неравенств.

$$u_t^n + \sigma v_{\bar{x}}^{n+1} + (1 - \sigma)v_{\bar{x}}^n = 0, \quad (42)$$

Можно рассмотреть сумму $w = u + v$

$$w_t^n + \sigma w_{\bar{x}}^{n+1} + (1 - \sigma)w_{\bar{x}}^n = 0. \quad (43)$$

На отрезке $0 \leq x \leq 1$ вводим сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, N_x = 1\}$.

Скалярное произведение и норму определяем так:

$$(y, z] = \sum_{i=1}^N y_i \cdot z_i \cdot h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, z]}.$$

Учитывая, что

$$y^{n+1} = 0,5(y^{n+1} + y^n) + 0,5(y^{n+1} - y^n),$$

$$y^n = 0,5(y^{n+1} + y^n) - 0,5(y^{n+1} - y^n),$$

и полагая $y = w_{\bar{x}}$.

Перепишем схему (43) в следующем виде

$$w_t^n + \sigma(0,5(w_{\bar{x}}^{n+1} + w_{\bar{x}}^n) + 0,5\tau \cdot w_{\bar{x}t}^n) + 0,5 \cdot (1 - \sigma)[(w_{\bar{x}}^{n+1} + w_{\bar{x}}^n) - \tau w_{\bar{x}t}^n] = 0, \quad (44)$$

$$w_t^n + (\sigma - 0,5)\tau \cdot w_{\bar{x}t}^n + 0,5(w_{\bar{x}}^{n+1} + w_{\bar{x}}^n) = 0.$$

Умножим это уравнение на $2\tau w_{\bar{x}t}^n = 2(w_{\bar{x}}^{n+1} - w_{\bar{x}}^n)$

$$2\tau w_t^n \cdot w_{\bar{x}t}^n + 2\tau^2(\sigma - 0,5)(w_{\bar{x}t}^n)^2 + (w_{\bar{x}}^{n+1})^2 - (w_{\bar{x}}^n)^2 = 0$$

первое слагаемое преобразуем так

$$2w_t^n \cdot w_{\bar{x}t}^n = (w_{\bar{x}t}^2) + h(w_{\bar{x}t}^n)^2.$$

Тогда

$$\tau \cdot (w_{\bar{x}t}^2) + h\tau(w_{\bar{x}t}^n)^2 + 2\tau^2(\sigma - 0,5)(w_{\bar{x}t}^n)^2 + (w_{\bar{x}}^{n+1})^2 - (w_{\bar{x}}^n)^2 = 0$$

если объединить второе и третье слагаемое, то получится

$$\tau \cdot (w_{\bar{x}t}^2) + 2\tau^2((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h)(w_{\bar{x}t}^n)^2 + (w_{\bar{x}}^{n+1})^2 - (w_{\bar{x}}^n)^2 = 0.$$

Умножаем на h и суммируем по всем узлам сетки $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N$, получаем

$$\tau \sum_{i=1}^N (w_{\bar{x}t}^2)_{\bar{x},i} h + 2\tau^2((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h) \cdot \|w_{\bar{x}t}^n\|^2 + \|w_{\bar{x}}^{n+1}\|^2 = \|w_{\bar{x}}^n\|^2$$

распишем в первом слагаемом разностную производную по x , тогда

$$\tau \sum_{i=1}^N [(w_t^n)_i^2 - (w_t^n)_{i-1}^2] + 2\tau((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h) \cdot \|w_{xt}^n\|^2 + \|w_x^{n+1}\|^2 = \|w_x^n\|^2.$$

Раскрываем сумму, сокращаем слагаемые и получим

$$\tau \sum_{i=1}^N [(w_t^n)_N^2 - (w_t^n)_0^2] + 2\tau((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h) \cdot \|w_{xt}^n\|^2 + \|w_x^{n+1}\|^2 = \|w_x^n\|^2.$$

здесь $w_{t,0}^n = w_t(t, 0) = 0$, т.к. $w_t(t, 0) \equiv 0$.

Окончательно получим тождество

$$\tau \cdot (w_t^n)_N^2 + 2\tau((\sigma - 0,5)\tau + 0,5h) \cdot \|w_{xt}^n\|^2 + \|w_x^{n+1}\|^2 = \|w_x^n\|^2. \quad (45)$$

Из тождества (45) видно, что если

$$(\sigma - 0,5)\tau + 0,5h \geq 0,$$

то есть $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau} = \sigma_0$, тогда

$$\|w_x^{j+1}\| \leq \|w_x^j\| \leq \dots \leq \|w_x^0\|. \quad (46)$$

Это неравенство доказывает, что схема (43) устойчива по начальным данным в энергетической норме

$$\|w\|_{(1)} = \|w_x\|.$$

4. *Постановка обратной задачи.* Для формулировки обратной к (1) - (5) задаче, ставятся следующие дополнительные условия

$$P(T, x) = P^1(x), Q(T, x) = Q^1(x) \quad \text{при} \quad t = T \quad (47)$$

для давления и объемного расхода газа.

В обратной задаче надо найти $P^0(x)$ и $Q^0(x)$ из уравнении (1) - (2), условия (4) - (5) и дополнительным условиям (47).

5. *Постановка вариационной задачи.* Одним из достаточно распространенных методов решения обратных задач математической физики является сведение задачи (1), (2), (4), - (5), (47) к задаче оптимального управления.

Необходимо минимизировать целевой функционал:

$$J(P^0, Q^0) = \int_0^{2l} [P(T, x; P^0(x)) - P^1(x)]^2 dx + \int_0^{2l} [Q(T, x; Q^0) - Q^1(x)]^2 dx \rightarrow \min \quad (48)$$

Минимизируем функционал (48) градиентным итерационным методом

$$P_{n+1}^0 = P_n^0 - \alpha \cdot J'(P_n^0), \quad Q_{n+1}^0 = Q_n^0 - \alpha \cdot J'(Q_n^0). \quad (49)$$

где α - итерационный параметр, n - номер итерации.

Первая вариация целевого функционала (48)

$$\begin{aligned} \delta J(P^0, Q^0) &= J(P^0 + \delta P^0, Q^0 + \delta Q^0) - J(P^0, Q^0) = \\ &= \int_0^{2l} [P(T, x; P^0 + \delta P^0) - P^1(x)]^2 dx + \int_0^{2l} [Q(T, x; Q^0 + \delta Q^0) - Q^1(x)]^2 dx - \end{aligned}$$

$$- \int_0^{2l} [P(T, x; P^0) - P^1(x)]^2 dx - \int_0^{2l} [Q(T, x; Q^0) - Q^1(x)]^2 dx,$$

Так как

$$P(T, x; P^0 + \delta P^0) = P(T, x; P^0) + \delta P(T, x; \delta P^0),$$

$$Q(T, x; Q^0 + \delta Q^0) = Q(T, x; Q^0) + \delta Q(T, x; \delta Q^0),$$

имеем

$$\begin{aligned} \delta J(P^0, Q^0) &= \int_0^{2l} \delta P(T, x; \delta P^0) \cdot 2[P(T, x; P^0) - P^1(x)] dx + \\ &+ \int_0^{2l} \delta Q(T, x; \delta Q^0) \cdot 2[Q(T, x; Q^0) - Q^1(x)] dx. \end{aligned}$$

С другой стороны по определению производной Фреше

$$\delta J(P^0, Q^0) = \langle J'P^0, \delta P^0 \rangle + \langle J'Q^0, \delta Q^0 \rangle. \quad (50)$$

Введем обозначения

$$\tilde{Q} = Q(t, x; Q^0 + \delta Q^0) \quad \tilde{P} = P(t, x; P^0 + \delta P^0),$$

$$Q = Q(t, x; Q^0), \quad P = P(t, x; P^0), \quad \delta Q = \tilde{Q} - Q, \quad \delta P = \tilde{P} - P.$$

Рассмотрим возмущенную к (1) - (5) задачу

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = -\frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}, \quad (51)$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} = -\bar{F} \cdot \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} - 2a \cdot \tilde{Q}, \quad (52)$$

начальные условия

$$\tilde{P}(0, x) = P^0(x) + \delta P^0(x), \quad \tilde{Q}(0, x) = Q^0(x) + \delta Q^0(x) \quad (53)$$

и граничные условия

$$\tilde{P}(t, 0) = P_0(t), \quad \tilde{Q}(t, 0) = Q_0(t), \quad (54)$$

$$\tilde{P}(t, l+0) = \tilde{P}(t, l-0) + P_{pl}(t), \quad \tilde{Q}(t, l+0) = \tilde{Q}(t, l-0) + Q_{pl}(t), \quad (55)$$

Для получения задачи для возмущении $\delta P(T, x; \delta P^0)$ и $\delta Q(T, x; \delta Q^0)$ из задачи (51) - (55) вычтем задачу (1) - (5) в силу линейности уравнений имеем

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} = -\frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \delta Q}{\partial x}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial \delta Q}{\partial t} = -\bar{F} \cdot \frac{\partial \delta P}{\partial x} - 2a \cdot \delta Q, \quad (57)$$

начальные условия примут вид

$$\delta P(0, x) = \delta P^0, \quad \delta Q(0, x) = \delta Q^0 \quad (58)$$

и граничные условия

$$\delta P(t, 0) = 0, \quad \delta Q(t, 0) = 0 \quad (59)$$

$$\delta P(t, l+0) = \delta P(t, l-0), \quad \delta Q(t, l+0) = \delta Q(t, l-0). \quad (60)$$

Умножаем (56) на пока еще неизвестную функцию $P^*(t, x)$, (57) на $Q^*(t, x)$ и интегрируем по t от 0 до T , по x от 0 до $2l$ и суммируем. В результате тождественно равно нулю выражение

$$(A\delta P, P^*) + (B\delta Q, Q^*) = \\ = \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial \delta P}{\partial t} + \frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial \delta Q}{\partial x} \right] \cdot P^* dx dt + \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial \delta Q}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial \delta P}{\partial x} + 2a \cdot \delta Q \right] \cdot Q^* dx dt \equiv 0,$$

где

$$AP = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ BQ = \frac{\partial Q}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + 2aQ.$$

Интегрируем по частям это выражение

$$(A\delta P, P^*) + (B\delta Q, Q^*) = \\ = \int_0^{2l} \left[\delta P \cdot P^* \Big|_0^T - \int_0^T \delta P \cdot \frac{\partial P^*}{\partial t} dt \right] dx + \frac{c^2}{\bar{F}} \int_0^T \left[\delta Q \cdot P^* \Big|_0^{2l} - \int_0^{2l} \delta Q \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} dx \right] dt + \\ + \int_0^{2l} \left[\delta Q \cdot Q^* \Big|_0^T - \int_0^T \delta Q \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial t} dt \right] dx + \bar{F} \int_0^T \left[\delta P \cdot Q^* \Big|_0^{2l} - \int_0^{2l} \delta P \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x} dx \right] dt + \\ + 2a \int_0^T \int_0^{2l} \delta Q \cdot Q^* dt dx = - \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial P^*}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x} \right] \delta P dx dt - \\ - \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} - 2a \cdot \delta Q^* \right] \delta Q dx dt + \\ + \int_0^{2l} [\delta P(T, x) \cdot P^*(T, x) - \delta P(0, x) \cdot P^*(0, x)] dx + \\ + \frac{c^2}{\bar{F}} \int_0^T [\delta Q \cdot P^* \Big|_0^l + \delta Q \cdot P^* \Big|_l^{2l}] dt + \int_0^{2l} [\delta Q(T, x) \cdot Q^*(T, x) - \delta Q(0, x) \cdot Q^*(0, x)] dx + \\ + \bar{F} \int_0^T [\delta P \cdot Q^* \Big|_0^l + \delta P \cdot Q^* \Big|_l^{2l}] dt.$$

$$(A\delta P, P^*) + (B\delta Q, Q^*) = \\ = - \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial P^*}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x} \right] \delta P dx dt - \int_0^T \int_0^{2l} \left[\frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} - 2a \cdot Q^* \right] \delta Q dx dt +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{2l} [\delta P(T, x) \cdot P^*(T, x) - \delta P^0 \cdot P^*(0, x)] dx + \\
 & + \frac{c^2}{F} \int_0^T [\delta Q(t, l-0) \cdot P^*(t, l-0) - \delta Q(t, 0) \cdot P^*(t, 0) + \\
 & + \delta Q(t, 2l) \cdot P^*(t, 2l) - \delta Q(t, l+0) \cdot P^*(t, l+0)] dt + \\
 & + \int_0^{2l} [\delta Q(T, x) \cdot Q^*(T, x) - \delta Q^0 \cdot Q^*(0, x)] dx + \\
 & + \bar{F} \int_0^T [\delta P(t, l-0) \cdot Q^*(t, l-0) - \delta P(t, 0) \cdot Q^*(t, 0) + \\
 & + \delta P(t, 2l) \cdot Q^*(t, 2l) - \delta P(t, l+0) \cdot Q^*(t, l+0)] dt.
 \end{aligned} \tag{61}$$

В последнем выражении (61) члены вне двойного интеграла с множителями $\delta P(t, 0)$ и $\delta Q(t, 0)$ равны нулю, согласно условиям (59). В силу выполнения условия согласования (60) и требуемого дополнительного условия при $x = l$ (в забое)

$$P^*(t, l-0) = P^*(t, l+0), \quad Q^*(t, l-0) = Q^*(t, l+0) \tag{62}$$

получается, что

$$\delta Q(t, l-0) \cdot P^*(t, l-0) = \delta Q(t, l+0) \cdot P^*(t, l+0), \tag{63}$$

$$\delta P(t, l-0) \cdot Q^*(t, l-0) = \delta P(t, l+0) \cdot Q^*(t, l+0). \tag{64}$$

Из физических соображений, считаем что в устье скважины возмущения давления $\delta P(t, 2l)$ и объемного расхода газа $\delta Q(t, 2l)$ пренебрежимо малы.

Теперь остались слагаемые содержащиеся под интегралом по x .

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2l} \delta P(T, x) \cdot P^*(T, x) dx + \int_0^{2l} \delta Q(T, x) \cdot Q^*(T, x) dx - \\
 & - \int_0^{2l} \delta P^0 \cdot P^*(0, x) dx + \int_0^{2l} \delta Q^0 \cdot Q^*(0, x) dx = 0.
 \end{aligned}$$

Введем обозначения операторов

$$A^*P^* = \frac{\partial P^*}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x}, \tag{65}$$

$$B^*Q^* = \frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{c^2}{F} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} - 2a \cdot Q^*.$$

Выполнения этого равенства приводит к следующей лемме.

Лемма 1 Пусть $P^0, P + \delta P^0 \in P_{ad}, Q^0, Q^0 + \delta Q^0 \in Q_{ad}$ элементы принадлежащие области возможных решений. Если $P(t, x; P^0(x)), Q(t, x; Q^0(x))$ решение задачи (1) - (5) и выполняется интегральное тождество Лагранжа

$$(AP, P^*) + (BQ, Q^*) = (P, A^*P^*) + (Q, B^*Q^*)$$

то имеет место

$$\begin{aligned} & \int_0^{2l} \delta P(T, x) \cdot P^*(T, x) dx + \int_0^{2l} \delta Q(T, x) \cdot Q^*(T, x) dx = \\ & = \int_0^{2l} \delta P^0 \cdot P^*(0, x) dx + \int_0^{2l} \delta Q^0 \cdot Q^*(0, x) dx. \end{aligned} \quad (66)$$

Условие (66) с учетом граничных условия (58), первой вариации функционала $\delta J(P^0, Q^0)$ и по определению производной Фреше (50) примет вид

$$\begin{aligned} & \langle \delta P(T, x), 2[P(T, x; P^0) - P^1(x)] \rangle + \\ & + \langle \delta Q(T, x), 2[Q(T, x; Q^0) - Q^1(x)] \rangle = \\ & = \langle J'P^0, \delta P^0 \rangle + \langle J'Q^0, \delta Q^0 \rangle. \end{aligned} \quad (67)$$

Эти условия вытекают из требований выполнения тождества Лагранжа.

6. *Постановка сопряженной задачи.* Выполнения тождества Лагранжа, требования равенства нулю всех внеинтегральных членов и условий Леммы 1 приводят к следующей сопряженной задаче

$$\frac{\partial P^*}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x} = 0, \quad (68)$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} - 2a \cdot Q^* = 0, \quad (69)$$

$$P^*(t, 0) = 0, Q^*(t, 0) = 0, \quad (70)$$

$$P^*(T, x) = 2[P(T, x; P^0) - P^1], \quad (71)$$

$$Q^*(T, x) = 2[Q(T, x; Q^0) - Q^1].$$

7. *Алгоритм решения вариационной задачи*

1. Задаем начальное приближение P^0, Q^0 .

2. Предположим, что P_n^0, Q_n^0 уже известно, тогда решаем прямую задачу:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad t \geq 0, x \in (0, 2l), \\ & \frac{\partial Q}{\partial t} = -\bar{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - 2a \cdot Q, \quad t \geq 0, x \in (0, 2l), \\ & P(0, x) = P^0(x), \quad Q(0, x) = Q^0(x), \\ & P(t, 0) = P_0(t), \quad P(t, l) = P_0(t), \end{aligned} \quad (72)$$

$$P(t, l+0) = P_0(t, l-0) + P_{pl}(t), Q(t, l+0) = Q_0(t, l-0) + Q_{pl}(t).$$

3. Вычисляем приближенное значение функционала используя квадратурную формулу

$$J(P_n^0, Q_n^0) = \int_0^{2l} [P(T, x; P_n^0) - P^1(x)]^2 dx +$$

$$+ \int_0^{2l} [P(T, x; Q_n^0) - Q^1(x)]^2 dx \quad (73)$$

4. Если текущее значение нормы функционала $J(P_n^0, Q_n^0)$ – недостаточно мало, то решаем сопряженную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^*}{\partial t} + \bar{F} \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q^*}{\partial t} + \frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} + 2a \cdot Q^* &= 0, \\ P^*(t, 0) = 0, Q^*(t, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (74)$$

$$P^*(T, x) = 2[P(T, x; P^0) - P^1],$$

$$Q^*(T, x) = 2[Q(T, x; Q^0) - Q^1].$$

5. Из решения P^*, Q^* сопряженной задачи (74) по P и Q определяем градиент функционала

$$\begin{cases} J'(P_n) = -P^*(0, x), \\ J'(Q_n) = -Q^*(0, x). \end{cases} \quad (75)$$

6. Следующие приближения начальных условий для $P(0, x)$ и $Q(0, x)$ находятся по формулам

$$P_{n+1}^0(x) = P_n^0(x) - \alpha \cdot J'(P_n), \quad (76)$$

$$Q_{n+1}^0(x) = Q_n^0(x) - \alpha \cdot J'(Q_n),$$

7. Переходим к пункту 2.

8. Численная реализация алгоритма решения вариационной задачи.

8.1 Разностная схема решения прямой задачи. Аппроксимируем прямую задачу (1) – (5).

Пусть N_t – количество узлов равномерной сетки на интервале $[0, T]$, а N_x – количество узлов равномерной сетки на интервале $[0, 2l]$. Построим в области $\Omega = ((0, 2l) \times (0, T))$ сетку ω_h с шагом $h = \frac{2l}{N_x}$, $\tau = \frac{T}{N_t}$, где N_x, N_t – положительные целые числа.

Тогда в сетке $\omega_h = \{x = ih, t = k\tau, i = 0, 1, \dots, N_x, k = 0, 1, \dots, N_t\}$ запишем соответствующую разностную прямую задачу. Таким образом задача (1) – (5) имеет следующий вид:

$$\frac{P_i^{k+1} - P_i^k}{\tau} = -\frac{c^2}{\bar{F}} \cdot \frac{Q_i^k - Q_{i-1}^k}{h}, \quad (77)$$

$$\frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\tau} = -\bar{F} \cdot \frac{P_i^k - P_{i-1}^k}{h} - 2a \cdot Q_i^{k+1}, \quad (78)$$

$$i = 0, 1, \dots, N_x, \quad k = 0, 1, \dots, N_t,$$

начальные условия

$$P_i^0 = P^0(x_i), \quad Q_i^0 = Q^0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad (79)$$

и граничные условия соответственно

$$P_0^k = P_0, \quad Q_0^k = Q_0, \quad k = 0, 1, \dots, N_t, \quad (80)$$

$$P_{\frac{N_x}{2}}^k = P_{\frac{N_x}{2}-1}^k + P_{pl}, \quad Q_{\frac{N_x}{2}}^k = Q_{\frac{N_x}{2}-1}^k + Q_{pl}, \quad k = 0, 1, \dots, N_t. \quad (81)$$

8.2 Разностная схема решения сопряженной задачи. В той же сеточной области запишем соответствующую разностную сопряженную задачу. Таким образом, разностный аналог задачи (68) – (71) имеет следующий вид:

$$\frac{P_i^{*k+1} - P_i^{*k}}{\tau} + \bar{F}_i \frac{Q_i^{*k+1} - Q_{i-1}^{*k+1}}{h} = 0, \quad (82)$$

$$\frac{Q_i^{*k+1} - Q_i^{*k}}{\tau} + \frac{c_i^2}{\bar{F}_i} \cdot \frac{P_i^{*k+1} - P_{i-1}^{*k+1}}{h} + 2a \cdot Q_i^{*k+1} = 0, \quad (83)$$

$$i = 0, 1, \dots, N_x, \quad k = N_t, \dots, 1, 0,$$

$$P_0^{*k} = 0, \quad Q_0^{*k} = 0, \quad k = N_t, N_t - 1, \dots, 0, \quad (84)$$

$$P_i^{*N_t} = 2 \cdot [P_i^{N_t} - P^{(1)}], \quad Q_i^{*N_t} = 2 \cdot [Q_i^{N_t} - Q^{(1)}], \quad i = 0, 1, \dots, N_x - 1 \quad (85)$$

Результаты исследования

Численные по разработанному выше алгоритму проводились с исходными данными из работы [1]. Объемный расход закачиваемого газа был выбран равным $Q^0 = 0.21 \text{ м}^3/\text{с}$, а начальное давление $P^0 = 5177500 \text{ Па}$, глубина скважины $l = 1485 \text{ м}$, скорость звука в кольцевом пространстве $c_1 = 331 \text{ м/с}$, скорость звука в добывающей скважине $c_2 = 850 \text{ м/с}$. Площадь поперечного сечения кольцевого пространства скважины $F_1 = \pi r_1^2 \text{ м}^2$, площадь поперечного сечения внутренней скважины $F_2 = \pi r_2^2 \text{ м}^2$, $r_1 = 0.06765 \text{ м}$, $r_2 = 0.0365 \text{ м}$. Гидравлическое сопротивление в кольце $\lambda_1 = 0.01$, гидравлическое сопротивление в скважине $\lambda_2 = 0.23$. Плотность газа $\rho_1 = 0.75 \text{ кг/м}^3$, плотность нефти $\rho_2 = 700 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

Осредненная по сечению скорость движения смеси в кольце $w_1 = \frac{Q_0(x)}{F_1 \rho_1} \text{ м/с}$, осредненная по сечению скорость движения в скважине $w_2 = \frac{Q_0(x)}{F_2 \rho_2} \text{ м/с}$.

Особенностью решаемой задачи является то, что коэффициенты $c(x)$, $\bar{F}(x)$, $a(x)$ имеют разрывы в точке $x = l$ и значения большие числа. Поэтому в расчетах начальное давление и начальный объем закачиваемого газа задавались в виде линейной функций

$$Q_i^0 = Q^0 + 0.5 \cdot (Q_{\text{вых}} - Q^0) \cdot x_i / l,$$

$$P_i^0 = P^0 + 0.5 \cdot (P_{\text{вых}} - P^0) \cdot x_i / l.$$

где $Q_{\text{вых}}$, $P_{\text{вых}}$ - значения выходного объема смеси и давления.

Коэффициенты $c(x_i)$, $\bar{F}(x_i)$, $a(x_i)$ имеют большой разброс значений, поэтому для обеспечения устойчивого расчета были нормированы следующим образом

$$a(x_i) = 0.5 \cdot (a(x_i) + a(x_{N_x}) - 2 \cdot a(x_0)) / (a(x_{N_x}) - a(x_0))$$

где

$$a(x_i) = \begin{cases} \frac{g}{2w_1} + \frac{\lambda_1 w_1}{4d_1}, & i = 0, 1, \dots, N_x/2, \\ \frac{g}{2w_2} + \frac{\lambda_2 w_2}{4d_2}, & i = N_x/2 + 1, \dots, N_x. \end{cases}$$

Графики функций $a(x)$, $c(x)$, $\bar{F}(x)$, приведены на рисунке 1.

Используя разработанный алгоритм проведены численные расчеты в широком диапазоне входных параметров. Использовались разностные схемы на сетках размером 50×50 , 100×100 . Итерационный параметр $\alpha = 0.009$.

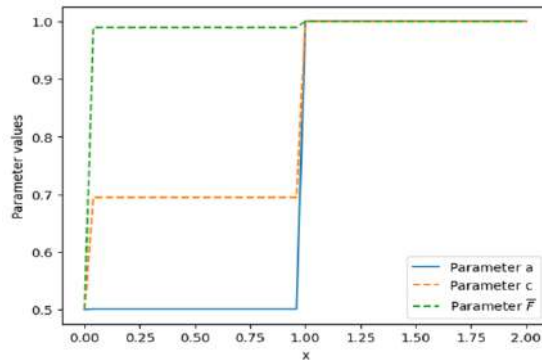


Рисунок 1. Графики функций a , c , и \bar{F}

Дополнительные условия для $P^1(x)$, $Q^1(x)$ задавались в виде параболических функции

$$Q^1(T, x) = -x^2 + b_q \cdot x + c_q,$$

$$P^1(T, x) = -x^2 + b_p \cdot x + c_p,$$

где $c_q = Q^0$, $c_p = P^0$, $b_q = \frac{Q_{\text{ВЫХ}} - Q^0 + 4l^2}{2l}$, $b_p = \frac{P_{\text{ВЫХ}} - P^0 + 4l^2}{2l}$.

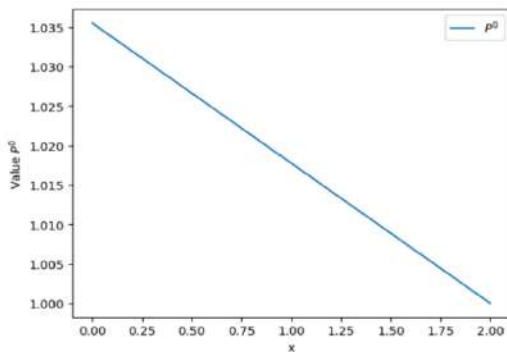


Рисунок 2. График функций $P^0(x)$

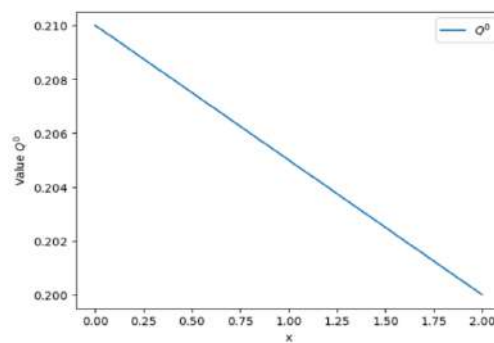


Рисунок 3. График функций $Q^0(x)$

На рисунках 2, 3 приведены графики функции $P^0(x)$, $Q^0(x)$. Это начальные данные в процессе итерации они будут изменяться в зависимости от дополнительных условий $P^1(x)$, $Q^1(x)$. Графики $P^1(x)$, $Q^1(x)$ приведены на рисунках 4, 5.

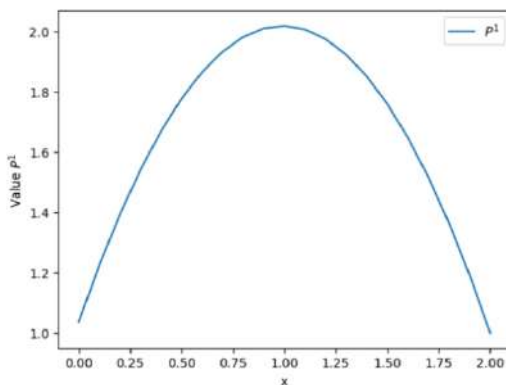


Рисунок 4. График функций $P^1(x)$

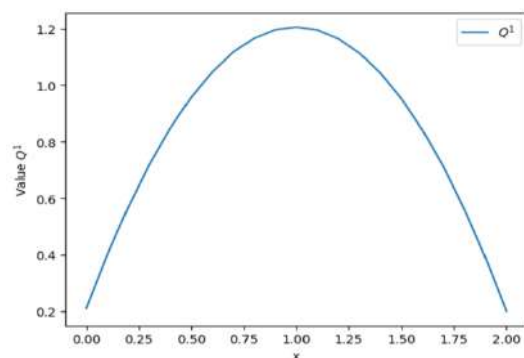


Рисунок 5. График функций $Q^1(x)$

В проведенном итерационном процессе значение функционала J монотонно убывает и достигает значения $\|J\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon = 0.001$ при $n = 164$ итерации. График убывания значения функционала показано на рисунке 6.

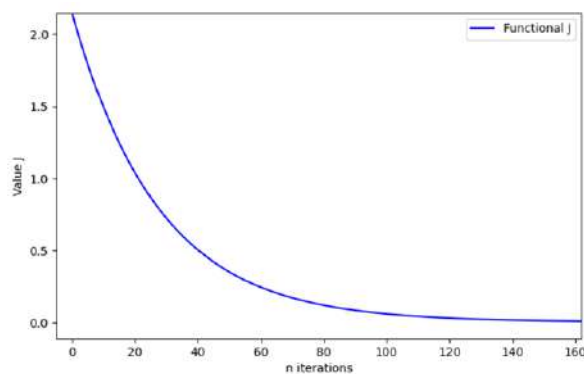


Рисунок 6. График убывание функционала J

Численные расчеты показывают что используемый итерационный процесс для нахождения значения давления P_n^0 и объемного расхода газа Q_n^0 при $t = 0$ сходится. Численные значения нормы функционала J монотонно убывают и ограничены, по этому вычисленные значения P_n^0 и Q_n^0 стремятся к параболической функции (рисунок 7, 8). Это правдоподобно, так как заданные нами дополнительные условия $P^1(x)$, $Q^1(x)$ являются параболическими функциями.

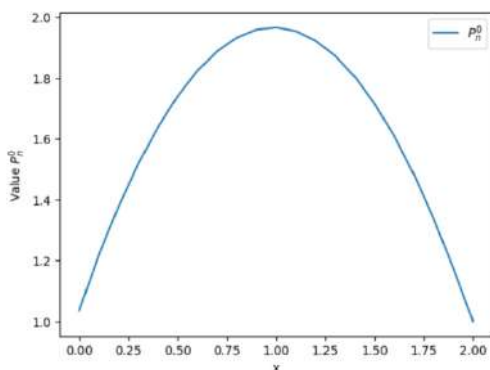


Рисунок 7. График P_n^0

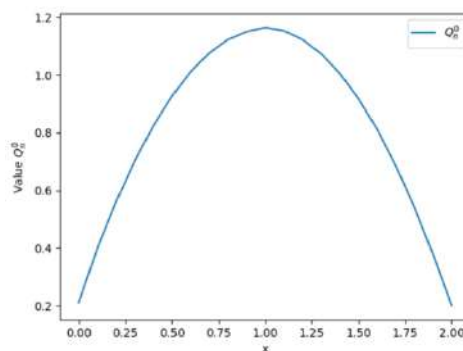


Рисунок 8. График Q_n^0

Известно что сопряженная задача носит с собой ценную информацию о решении прямой задачи. Это свойство подтверждается численными расчетами, так как градиенты функционала для определения начальных условий прямой задачи на каждой итерации выбирались как решение сопряженной задачи при $t = 0$, т. е.

$$J'(P_n^0) = P^*(0, x), \quad J'(Q_n^0) = Q^*(0, x).$$

Проведенные численные расчеты подтверждают эффективность предложенного алгоритма для моделирования газлифтного процесса добычи нефти.

Дискуссия

В результате проведённого исследования:

1. Разработан численный алгоритм решения прямой и обратной задачи газлифтного процесса, основанный на вариационной постановке и методе сопряжённых уравнений. Алгоритм реализован с использованием конечно-разностных схем и градиентного метода минимизации функционала.

2. Построены разностные схемы (явная, неявная и с весами) для прямой задачи, проведён их анализ на аппроксимацию и устойчивость. Показано, что схема с весами обладает вторым порядком точности при выполнении условия $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h}{2\tau}$.

3. Сформулирована сопряжённая задача и доказано, что её решение содержит градиент целевого функционала. Это позволяет применять эффективные итерационные методы

оптимизации для восстановления начальных данных по измерениям в финальный момент времени.

4. Разработан численный алгоритм восстановления начального давления и объемного расхода газа с помощью итерационного градиентного метода. На каждом шаге градиент функционала вычисляется как решение сопряжённой задачи, что подтверждает корректность применения тождества Лагранжа и интегральных условий.

5. Проведены численные эксперименты, подтверждающие сходимость предложенного метода. Для заданных параболических дополнительных условий $P^1(x)$, $Q^1(x)$, решение обратной задачи сходится к аналогичным по форме начальным условиям $P^0(x)$, $Q^0(x)$, что говорит о корректности восстановления.

6. Получен график убывания функционала, демонстрирующий устойчивую и монотонную сходимость итерационного метода. За 164 итерации достигнуто значение невязки $\|J\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon = 0$, что свидетельствует о высокой точности восстановления начальных параметров.

7. Показано, что сопряжённая задача несёт ключевую информацию о решении прямой задачи и может быть эффективно использована для управления газлифтным процессом.

Научная новизна исследования заключается в:

- применении ретроспективной сопряжённой задачи для восстановления недоступных начальных параметров газлифтного процесса;
- построении схем с гарантированной устойчивостью и доказанной аппроксимацией второго порядка;
- объединении методов математической физики и оптимального управления в контексте моделирования добычи нефти.

Практическая значимость разработанного алгоритма заключается в возможности:

- численного восстановления забойного давления и расхода газа на начальном этапе;
- применения к инженерным задачам построения кривых производительности скважины;
- внедрения в программные комплексы оптимального управления газлифтной добычей.

Заключение

В данной работе рассмотрен численный метод к моделированию газлифтного процесса добычи нефти на основе одномерной нестационарной модели Навье–Стокса для сжимаемого газа. Основной акцент сделан на решение обратной задачи определения начального давления и расхода газа с использованием метода сопряжённых уравнений. Предложенный численный алгоритм включает в себя построение прямой задачи, формулировку сопряжённой ретроспективной задачи и применение градиентного метода для минимизации целевого функционала. Сформулированы и проанализированы разностные схемы, проведено исследование аппроксимации и устойчивости. Разработанный метод продемонстрировал устойчивую и точную сходимость к заданным данным, что подтверждено численным экспериментом. На практике данный подход позволяет восстанавливать параметры, недоступные для прямого измерения, и использовать его для построения кривых производительности газлифтной скважины. Полученные результаты имеют как теоретическую, так и прикладную значимость и могут быть использованы при построении цифровых двойников и управлении режимами эксплуатации нефтяных скважин.

Благодарность

Данное исследование было профинансировано Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ПЦФ BR27100483 “Разработка прогнозно-поисковых технологий выделения рудоперспективных территории на основе анализа данных единой платформы недропользователей “Minerals.gov.kz” с применением искусственного интеллекта и методов дистанционного зондирования Земли”)

Список использованных источников

- [1] Aliev F.A., Mutalimov M.M. (2009) *Algorithm dlya resheniya zadachi postroeniya traektoriy i upravleniya pri dobyche nefi gazliftnym [Algorithm for solving the problem of trajectory construction and control in oil production by gas lift]*. Doklad NAN Azerb., No. 4. (in Russian)
- [2] Mohammad Reza Mehregan¹, Ali Mohaghar² “Abbas Esmaeili³ Developing a mathematical model for optimizing oil production Using Gas-Lift Technology”. Year: 2016, Volume: 9, Issue: 5, Pages: 1-9. <http://dx.doi.org/10.17485/ijst/2016/v9i5/74370>
- [3] Sun-Young Jung and Jong-Se Lim (2016) Optimization of gas lift allocation for improved oil production under facilities constraints, *Geosystem Engineering*, 19:1, 39-47, DOI: 10.1080/12269328.2015.1084895
- [4] Deni Saepudin, Edy Soewono, Kuntjoro Adji Sidarto, Agus Yodi Gunawan, Septorarno Siregar, Pudjo Sukarno. An Investigation on Gas Lift Performance Curve in an Oil-Producing Well. Hindawi Publishing Corporation. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. Volume 2007, Article ID 81519, 15 pages. <https://doi.org/10.1155/2007/81519>
- [5] N. Nishikiori, “Gas allocation optimization for cotinous flow gas lift systems”, M.S. thesis, University of Tulsa, Tulsa, Okla, USA, 1989
- [6] K.E. Brown, *The Technology of Artificial Lift Methods*, Vol.4, Pennwell Books, Tulsa, Okla, USA, 1984
- [7] G.A. Alarcon, C.F. Torres, and Luis E. Gomez, Global optimization of gas allocation to a group of wells in artificial lift using nonlinear constrained programming, *Journal of Energy Resources Technology, Transactionsof theASME*, Vol 124, no.4, pp. 262-268, 2002. <https://doi.org/10.1115/1.1488172>
- [8] P. Sukarno, K.A. Sidarto, S. Dewi, et al., “New Approach on Gas Lift Wells Optimization with Limited Awaiting Available Gas Injected”, *Prosiding IATMI 20036-09, Jakarta, Indonesia*, 2006.
- [9] S. Guet and G. Oams, “Fluid mechanical aspects of the gas-lift technique”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 38, pp. 225-249, 2006
- [10] S. Guet, G. Oams, and R. V. A. Oliemans, “Simplified two-fluid model for gas-lift efficiency predictions”, *AIChE Journal*, Vol. 51, no. 7, pp. 1885-1896, 2005
- [11] Lions, J.L. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer, Berlin, 1971.
- [12] Lions, J.L.; Magenes, E. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Vol. II, Springer, Berlin, 1972.
- [13] Agoshkov, V.I. *Optimal Control Methods and the Method of Conjugate Equations in Problems of Mathematical Physics*. Moscow: Institute of Higher Mathematics RAS, 2003, 256 p.
- [14] Il'in, V.A.; Moiseev, E.I. Optimization of boundary controls by displacements at two ends of a string during an arbitrary sufficiently large time interval. *Doklady Mathematics*, 2007, Vol. 76, No. 3, pp. 828–834.
- [15] Marchuk, G.I. *Conjugate Equations and Their Applications*. *Proceedings of the IMM URO RAS*, 2006, Vol. 12, No. 1, pp. 184–195.
- [16] Temirbekov A.N.; Temirbekova L.N.; Zhumagulov B.T. Fictitious domain method with the idea of conjugate optimization for non-linear Navier-Stokes equations. *Applied and Computational Mathematics*. 2023, V22, Issue 2.-P.172–188. <https://doi.org/10.30546/1683-6154.22.2.2023.172>
- [17] Arguchintsev, A.V.; Poplevko, V.P. An optimal control problem by hyperbolic system with boundary delay. *Bulletin of Irkutsk State University. Mathematics*, 2021, 35, pp. 3–17. DOI: 10.26516/1997-7670.2021.35.3.
- [18] Arguchintsev, A.V.; Krutikova, O.A. Optimization of semilinear hyperbolic systems with smooth boundary controls. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ)*, 2021, 45(2), pp. 1–9. DOI: 10.1134/S0016266321020010.
- [19] Shishlenin, M.; Kozelkov, A.; Novikov, N. Nonlinear medical ultrasound tomography: 3D modeling of sound wave propagation in human tissues. *Mathematics*, 2024, Vol. 12, No. 2, pp. 212. DOI: 10.3390/math12020212.
- [20] Klyuchinskiy, D.; Novikov, N.; Shishlenin, M. Recovering density and speed of sound coefficients in the 2D hyperbolic system of acoustic equations of the first order by a finite number of observations. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, No. 2, pp. 199–211. DOI: 10.3390/math9020199.
- [21] Temirbekov N., Temirbekova L., Nurmangaliyeva M. Numerical solution of the first kind of Fredholm integral equations by projection methods with wavelets as the basis functions. *TWMS J. Pure Appl. Math.*, V.13, N.1, 2022, pp. 105-118. <https://twmsj.az/Files/V.13%20N.1%202022/105-118.pdf>