ҒТАХР 27.23.21

10.51889/2959-5894.2026.93.1.003

Б.Ж. Сағындықов[1], Ж. Бимұрат[2*]

[1]Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2] Д.А. Қонаев атындағы Тау-кен ісі институты, Алматы қ., Қазақстан
[*]*e-mail: bimuratzhanar@gmail.com*

ЭЛЬЗАКИ ТҮРЛЕНДІРУІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

Аңдатпа

Мақалада Лаплас түрлендіруіне ұқсас интегралдық түрлендірулердің бірі болып табылатын Эльзаки түрлендіруінің теориялық негіздері және оны дифференциалдық теңдеулерді шешуде қолдану мүмкіндіктері қарастырылады. Зерттеу тақырыбы қазіргі қолданбалы математикадағы интегралдық түрлендірулер әдісінің маңыздылығымен байланысты, себебі мұндай түрлендірулер инженерлік және физикалық есептерді тиімді талдауға мүмкіндік береді. Жұмыстың негізгі мақсаты Эльзаки түрлендіруінің негізгі қасиеттері мен теоремаларын жүйелеп, олардың көмегімен тұрақты және айнымалы коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешу жолдарын көрсету болып табылады. Сонымен қатар зерттеуде түпнұсқалар мен кескіндер арасындағы сәйкестіктерді анықтау, жалпылама ығысу теоремаларын тұжырымдау және Эльзаки, Лаплас, Сумуду түрлендірулерінің өзара байланысын салыстырмалы тұрғыда талдау міндеттері қойылған. Зерттеудің ғылыми және практикалық маңыздылығы Эльзаки түрлендіруінің қазақ тіліндегі ғылыми айналымда әлі де жеткілікті деңгейде таныстырылмағанына қарамастан, оның математикалық аппарат ретінде кең мүмкіндіктерге ие екендігін ашып көрсетуінде жатыр. Жұмыста теориялық талдау, салыстыру, жалпылау және математикалық түрлендіру әдістері қолданылды. Зерттеу барысында Эльзаки түрлендіруінің негізгі қасиеттері жүйеленіп, функциялар мен олардың кескіндерінің сәйкестік кестесі жасалды, сондай-ақ бұл түрлендіруді дифференциалдық теңдеулерді шешуге қолданудың тиімділігі көрсетілді. Нәтижелер Эльзаки түрлендіруінің жаңа жиілік аймағына көшпей-ақ есептерді шешуге мүмкіндік беретінін көрсетті. Зерттеудің құндылығы оның интегралдық түрлендірулер теориясын толықтыра отырып, осы бағыттағы білім қорын кеңейтуінде және Эльзаки түрлендіруінің қолданылу аясын нақтылауында көрінеді. Алынған нәтижелер жоғары оқу орындарында қолданбалы математика, математикалық физика және дифференциалдық теңдеулер курстарында, сондай-ақ инженерлік және физикалық есептерді шешуде практикалық құрал ретінде пайдаланылуы мүмкін.

Түйін сөздер: Лаплас түрлендіруі, Сумуду түрлендіруі, Эльзаки түрлендіруі, дифференциалдық теңдеу, дуалдық қатынастар, түпнұсқа функция, кескін.

Б.Ж. Сагиндыков[1], Ж. Бимурат[2*]
[1]Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И. Сатпаева, г. Алматы, Казахстан
[2]Институт горного дела имени Д.А. Кунаева, г. Алматы, Казахстан

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЬЗАКИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Аннотация

В статье рассматриваются теоретические основы преобразования Эльзаки, являющегося одним из интегральных преобразований, сходных с преобразованием Лапласа, а также возможности его применения при решении дифференциальных уравнений. Актуальность темы исследования связана с важной ролью методов интегральных преобразований в современной прикладной математике, поскольку такие преобразования позволяют эффективно анализировать инженерные и физические задачи. Основной целью работы является изложение основных свойств и теорем преобразования Эльзаки, а также демонстрация способов его применения для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами. Наряду с этим в исследовании ставятся задачи установления соответствий между оригиналами и их изображениями, формулирования обобщенных теорем сдвига и сравнительного анализа взаимосвязей преобразований Эльзаки, Лапласа и Сумуду. Научная и практическая значимость исследования заключается в раскрытии широких возможностей преобразования Эльзаки как математического аппарата, несмотря на то, что в казахскоязычном научном пространстве оно пока недостаточно широко представлено. В работе использованы методы теоретического анализа, сравнения, обобщения и математического преобразования. В ходе исследования систематизированы основные свойства преобразования Эльзаки, составлена таблица соответствий между функциями и их изображениями, а также показана эффективность применения данного преобразования при решении дифференциальных уравнений. Полученные результаты показали, что преобразование Эльзаки позволяет решать задачи без перехода к новой частотной области. Ценность исследования состоит в дополнении теории интегральных преобразований, расширении базы знаний в данном направлении и уточнении области применения преобразования Эльзаки. Полученные результаты могут быть использованы в курсах прикладной математики, математической физики и дифференциальных уравнений в высших учебных заведениях, а также в качестве практического инструмента при решении инженерных и физических задач.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, преобразование Сумуду, преобразование Эльзаки, дифференциальное уравнение, соотношения дуальности, оригинал-функция, изображение.

*B. Sagindykov[1], Zh. Bimurat[2]**

[1]Kazakh National Research Technical University named after K.I. Satpayev (Satbayev University), Almaty, Kazakhstan,

[2]Institute of Mining named after D.A. Kunaev, Almaty, Kazakhstan

ELZAKI TRANSFORM AND ITS APPLICATIONS

Abstract

This article examines the theoretical foundations of the Elzaki transform, which is one of the integral transforms similar to the Laplace transform, as well as its applications to solving differential equations. The relevance of the research topic is associated with the important role of integral transform methods in modern applied mathematics, since such transforms make it possible to analyze engineering and physical problems effectively. The main purpose of the study is to present the principal properties and theorems of the Elzaki transform and to demonstrate its use in solving linear differential equations with constant and variable coefficients. In addition, the study aims to establish correspondences between original functions and their images, formulate generalized shifting theorems, and carry out a comparative analysis of the relationships among the Elzaki, Laplace, and Sumudu transforms. The scientific and practical significance of the study lies in revealing the broad capabilities of the Elzaki transform as a mathematical tool, although it has not yet been widely introduced in the Kazakh-language scientific community. The work employs methods of theoretical analysis, comparison, generalization, and mathematical transformation. During the study, the main properties of the Elzaki transform were systematized, a correspondence table between functions and their images was compiled, and the effectiveness of applying this transform to the solution of differential equations was demonstrated. The obtained results showed that the Elzaki transform makes it possible to solve problems without introducing a new frequency domain. The value of the research lies in supplementing the theory of integral transforms, expanding the knowledge base in this field, and clarifying the scope of application of the Elzaki transform. The results obtained can be used in university courses on applied mathematics, mathematical physics, and differential equations, as well as a practical tool for solving engineering and physical problems.

Keywords: Laplace transform, Sumudu transform, Elzaki transform, differential equation, duality relations, original function, image.

Кіріспе

Эльзаки түрлендіруі Лаплас және Сумуду түрлендірулерімен тығыз байланысты интегралдық түрлендірулердің бірі болып табылады. Оны алғаш рет 2011 жылы Tarig M. Elzaki енгізіп, сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешуде тиімді құрал ретінде ұсынды [1, 57-64 бб.].

Эльзаки түрлендіруінің негізгі қасиеттері мен теоремалары кейінгі еңбектерде кеңінен қарастырылды. Tarig M. Elzaki және Salih M. Elzaki [2, 65-70 бб.] бұл түрлендіруді кейбір қарапайым және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешуге қолданды. Ал [3, 1-11 бб.] жұмысында Лаплас және Эльзаки түрлендірулерінің байланыстары зерттеліп, олардың арасындағы дуалдық қатынастар көрсетілді. Сонымен қатар [4, 13-18 бб.] еңбегінде айнымалы коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешу мәселелері қарастырылды, ал [5, 113-119 бб.] жұмысында Эльзаки түрлендіруі қарапайым дифференциалық теңдеулер жүйелерін шешуге қолданылды.

Қазіргі таңда Эльзаки түрлендіруі қолданбалы математиканың әртүрлі салаларында зерттеліп келеді. Әсіресе айнымалы коэффициентті және кейбір сызықтық емес теңдеулерді талдауда оның тиімділігі артып отыр. Осыған байланысты мақалада Эльзаки түрлендіруінің теориялық аппараты жүйеленіп, оның Лаплас және Сумуду түрлендірулерімен салыстырғанда ерекшеліктері қарастырылады.

Лаплас түрлендіруі дифференциалдық теңдеулерді алгебралық теңдеулерге келтіру арқылы олардың шешімін табуды жеңілдетеді [6, 182441-182450 бб.; 7, 5-72 бб.]. сонымен бірге ол динамикалық жүйелерді талдауда кеңінен қолданылады [8, 2083-2095 бб.]. Сумуду түрлендіруін алғаш рет G.K. Watugala ұсынған [9, 319-329 бб.]. Кейбір айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер үшін Эльзаки түрлендіруінің артықшылықтары Bulut пен Evans, сондай-ақ Mohamed пен Elzaki еңбектерінде қарастырылған [10, 103-109 бб.; 11, 27-33 бб.]. Осыған байланысты мақалада Эльзаки түрлендіруінің анықтамасы, негізгі қасиеттері, бірнеше маңызды теоремалары және оларды дифференциалдық теңдеулерді шешуге қолдану жолдары қарастырылды.

Зерттеу әдіснамасы

Дифференциалдық теңдеулер қолданбалы математиканың барлық салаларында маңызды рөл атқарады. Компьютерлік технологиялардың дамуы бұл теңдеулерді зерттеудің маңызын одан әрі арттырды. Дәстүрлі әдістер кейбір сызықтық емес және айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулерді шешуде күрделі есептеулерді талап етеді. Осы тұрғыдан алғанда, Эльзаки түрлендіруі зерттеушілер назарын аударған тиімді аналитикалық әдістердің бірі болып табылады. Бұл жұмыста теориялық талдау, салыстыру, жалпылау және интегралдық түрлендірулер әдістері қолданылды. Зерттеудің негізін Эльзаки түрлендіруінің анықтамасы, оның негізгі қасиеттері, Лаплас және Сумуду түрлендірулерімен байланысы, сондай-ақ оларды дифференциалдық теңдеулерді шешуде пайдалану құрайды.

Эльзаки түрлендіруінің анықтамасы

Қайсыбір

$$A=\left\{f(t):\exists M,k_1,k_2>0,|f(t)|<M^{|t|/k_j},t\in(-1)^j\times[0,\infty)\right\} \tag{1.1}$$

жиыны берілсін. Бұл жиынға экспоненциалдық ретті функциялар жатады. Онда A жиынына тиесілі $f(t)$ функциясы үшін Эльзаки түрлендіруі

$$\mathrm{E}[f(t)]=T(v)=v\int_0^\infty f(t)e^{-t/v}dt,\ t\geq 0,\ k_1\leq v\leq k_2 \tag{1.2}$$

интегралдық қатынасы арқылы анықталады [1; 12].

Эльзаки түрлендіруі дифференциалдық және интегралдық теңдеулерді шешуді жеңілдету үшін қолданылады және Лаплас, Сумуду, Фурье түрлендірулерімен терең байланыста болады.

Қарапайым функциялардың Эльзаки түрлендіруі

1. Егер $f(t)=1$ болса, онда

$$\mathrm{E}[1]=v\int_0^\infty e^{-t/v}dt=v^2. \tag{1.3}$$

2. Егер $f(t)=t$ болса, онда

$$\mathrm{E}[t]=v\int_0^\infty te^{-t/v}dt=v^3. \tag{1.4}$$

3. Жалпы жағдайда, егер $n \geq 0$ бүтін сан болса, онда

$$\mathrm{E}[t^n] = n!\, v^{n+2}. \tag{1.5}$$

4. Көрсеткіштік функция үшін

$$\mathrm{E}[e^{at}] = v\int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-t/v} dt = \frac{v^2}{1-av}, \, av < 1. \tag{1.6}$$

5. Комплекстік параметрді пайдаланып,

$$a = \alpha + i\beta, \, i^2 = -1,$$

деп алсақ, онда

$$\mathrm{E}\left[e^{(\alpha+i\beta)t}\right] = \frac{v^2}{1-(\alpha+i\beta)v}.$$

Осыдан

$$\mathrm{E}[e^{\alpha t}\cos\beta t] = \frac{v^2(1-\alpha v)}{(1-av)^2+\beta^2 v^2}, \tag{1.7}$$

$$\mathrm{E}[e^{\alpha t}\sin\beta t] = \frac{\beta v^3}{(1-av)^2+\beta^2 v^2}. \tag{1.8}$$

Дербес жағдайда $\alpha = 0$, $\beta = \omega$ болса,

$$\mathrm{E}[\cos\omega t] = \frac{v^2}{1+\omega^2 v^2}, \, \mathrm{E}[\sin\omega t] = \frac{\omega v^3}{1+\omega^2 v^2}. \tag{1.9}$$

Ал $\omega \mapsto i\omega$ алмастыруы арқылы

$$\mathrm{E}[\cosh\omega t] = \frac{v^2}{1-\omega^2 v^2}, \, \mathrm{E}[\sinh\omega t] = \frac{\omega v^3}{1-\omega^2 v^2}. \tag{1.10}$$

Эльзаки түрлендіруінің негізгі қасиеттері және теоремалары

Жалғыздық теоремасы

Егер $f(t)$ және $g(t)$ түпнұсқа функциялары үшін

$$\mathrm{E}[f(t)] = \mathrm{E}[g(t)]$$

теңдігі орындалса, онда

$$f(t) \equiv g(t)$$

теңдігі де орындалады.

Дәлелдеуі. Эльзаки және Лаплас түрлендірулерінің арасындағы байланыс бойынша [12]:

$$\mathrm{E}[f(t)](\nu) = \nu L[f(t)]\left(\frac{1}{\nu}\right), \mathrm{E}[g(t)](\nu) = \nu L[g(t)]\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Егер

$$\mathrm{E}[f(t)](\nu) = \mathrm{E}[g(t)](\nu)$$

болса, онда

$$\nu L[f(t)]\left(\frac{1}{\nu}\right) = \nu L[g(t)]\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

$\nu \neq 0$ болғандықтан,

$$L[f(t)]\left(\frac{1}{\nu}\right) = L[g(t)]\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

$s = 1/\nu$ деп белгілесек,

$$L[f(t)](s) = L[g(t)](s).$$

Лаплас түрлендіруінің жалғыздық теоремасы бойынша [13, 276-324 бб.; 14, 20-25 бб.]

$$f(t) \equiv g(t).$$

Теорема дәлелденді

Сызықтық қасиет

Егер $f(t)$ және $g(t)$ түпнұсқалары берілсе, онда кез келген $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ үшін

$$\mathrm{E}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathrm{E}[f(t)] + \beta \mathrm{E}[g(t)].$$

Ұқсастық теоремасы

Егер

$$\mathrm{E}[f(t)](v) = T(v)$$

болса, онда $a > 0$ үшін

$$\mathrm{E}[f(at)](v) = \frac{1}{a^2} T(av) \tag{1.11}$$

теңдігі орындалады [1; 12].

Дәлелдеуі. Эльзаки түрлендіруінің анықтамасы бойынша

$$\mathrm{E}[f(t)](v) = v \int_0^\infty f(t) e^{-1/v} dt.$$

Осыдан

$$\mathrm{E}[f(at)](v) = v \int_0^\infty f(at) e^{-1/v} dt.$$

$x = at$ деп алмастырайық. Онда

$$t = \frac{x}{a}, dt = \frac{dx}{a}.$$

Бұдан

$$\mathrm{E}[f(at)](v) = \frac{v}{a} \int_0^\infty f(x) e^{-x/(av)} dx.$$

Ал анықтама бойынша

$$T(av) = av \int_0^\infty f(x) e^{-x/(av)} dx.$$

Демек,

$$\int_0^\infty f(x) e^{-x/(av)} dx = \frac{T(av)}{av}.$$

Осыны алдыңғы теңдікке қойсақ,

$$\mathrm{E}[f(at)](v) = \frac{1}{a^2} T(av).$$

Теорема дәлелденді.

Кешігу теоремасы

Кешігу теоремасы функция белгілі бір уақытқа кешіктірілгенде оның Эльзаки кескінінің қалай өзгеретінін сипаттайды. Төменде берілген дәлелдеуде Эльзаки түрлендіруінің Лаплас-типтес жазылымы әдейі қолданылды, себебі бұл нәтиже Лаплас түрлендіруінің ығысу теоремасымен тікелей байланысты [3; 13; 14].

Егер $f(t)$ функциясының

$$\mathrm{E}[f(t)](v) = T(v)$$

түріндегі Эльзаки түрлендіруі белгілі болса, онда $\tau > 0$ үшін $f(t-\tau)\eta(t-\tau)$ функциясының түрлендіруі

$$\mathrm{E}[f(t-\tau)\eta(t-\tau)](v) = e^{-v\tau} T(v) \tag{1.12}$$

формуласы арқылы анықталады. Мұндағы $\eta(t-\tau)$ – Хевисайдтың бірлік функциясы.

Дәлелдеуі. Қарастырылып отырған жағдайда Эльзаки түрлендіруі

$$\mathrm{E}[f(t)](v) = \int_0^\infty f(t) e^{-vt} dt$$

түрінде анықталады [3; 13; 14]. Сондықтан

$$\mathrm{E}[f(t-\tau)\eta(t-\tau)](v) = \int_0^\infty f(t-\tau)\eta(t-\tau) e^{-vt} dt.$$

Хевисайд функциясының қасиеті бойынша:

– егер $t < \tau$ болса, онда $\eta(t-\tau) = 0$,
– егер $t \geq \tau$ болса, онда $\eta(t-\tau) = 1$.

Осыған байланысты интегралды

$$\mathrm{E}[f(t-\tau)\eta(t-\tau)](v) = \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-vt}dt.$$

түрінде жазуға болады. Енді

$$x = t-\tau, t = x+\tau, dt = dx$$

деп алмастыру енгіземіз. Сонда

$$\mathrm{E}[f(t-\tau)\eta(t-\tau)](v) = \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-v(x+\tau)}dx.$$

Экспонентаны жіктесек,

$$\mathrm{E}[f(t-\tau)\eta(t-\tau)](v) = e^{-v\tau}\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-vx}dx.$$

Соңғы интеграл анықтама бойынша $T(v)$-ге тең. Демек,

$$\mathrm{E}[f(t-\tau)\eta(t-\tau)](v) = e^{-v\tau}T(v)$$

Теорема дәлелденді.

Ескерту. Бұл теорема дифференциалдық теңдеулерде бастапқы шарттарды есептеу үшін маңызды, өйткені уақыт бойынша жылжу жүйенің жауаптарына әсер етеді.

Ілгерілеу теоремасы

Ілгерілеу теоремасы функция уақыт бойынша алға жылжытылғанда оның Эльзаки кескінінің қалай өзгеретінін сипаттайды.

Егер $f(t)$ функциясының

$$\mathrm{E}[f(t)](v) = T(v)$$

түріндегі Эльзаки түрлендіруі белгілі болса, онда $\tau > 0$ үшін $f(t+\tau)$ функциясының түрлендіруі

$$\mathrm{E}[f(t+\tau)](v) = e^{\tau/v}\left[T(v) - v\int_{0}^{\tau} f(t)e^{-t/v}dt\right] \tag{1.13}$$

формуласымен анықталады [1; 12].

Дәлелдеуі. Эльзаки түрлендіруінің анықтамасы бойынша

$$\mathrm{E}[f(t)](v) = v\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-t/v}dt$$

болады [1; 12]. Сондықтан

$$\mathrm{E}[f(t+\tau)](v) = v\int_{0}^{\infty} f(t+\tau)e^{-t/v}dt.$$

Енді

$$x = t+\tau, t = x-\tau, dt = dx$$

деп алмастыру енгіземіз. Онда $t = 0$ болғанда $x = \tau$, ал $t \to \infty$ ұмтылғанда $x \to \infty$. Осыдан

$$\mathrm{E}[f(t+\tau)](v) = v\int_{\tau}^{\infty} f(x)e^{-(x-\tau)/v}dx.$$

Экспонентаны жіктесек,

$$\mathrm{E}[f(t+\tau)](v) = e^{\tau/v}v\int_{\tau}^{\infty} f(x)e^{-x/v}dx.$$

Соңғы итегралды

$$\int_{\tau}^{\infty} f(x)e^{-x/v}dx = \int_{0}^{\infty} f(x)e^{-x/v}dx - \int_{0}^{\tau} f(x)e^{-x/v}dx$$

түрінде жазамыз. Сонда

$$\mathrm{E}[f(t+\tau)](v) = e^{\tau/v}\left[v\int_0^\infty f(x)e^{-x/v}dx - v\int_0^\tau f(x)e^{-x/v}dx\right].$$

Анықтама бойынша

$$v\int_0^\infty f(x)e^{-x/v}dx = T(v).$$

Демек,

$$\mathrm{E}[f(t+\tau)](v) = e^{\tau/v}\left[T(v) - v\int_0^\tau f(t)e^{-t/v}dt\right].$$

Теорема дәлелденді.

Ескерту. Интегралдық мүше τ-ға тәуелді. Сондықтан ілгерілеу амалы кешігуге қарағанда күрделірек.

Ығысу теоремасы

Бұл теорема $f(t)$ функциясы экспоненциалды көбейткіш арқылы өзгерген кезде оның Эльзаки кескіні қалай түрленетінін сипаттайды. Төменде берілген дәлелдеуде Эльзаки түрлендіруінің Лаплас-типтес жазылымы әдейі қолданылды. Мұндай тәсіл Лаплас түрлендіруіндегі параметрлік ығысу қасиеті мен Эльзаки түрлендіруі арасындағы байланысты айқынырақ көрсетуге мүмкіндік береді [3; 13; 14].

Егер $f(t)$ функциясының

$$\mathrm{E}[f(t)](v) = T(v)$$

түріндегі Эльзаки түрлендіруі белгілі болса, онда $a > 0$ үшін $e^{-at}f(t)$ функциясының Эльзаки түрлендіруі

$$\mathrm{E}[e^{-at}f(t)](v) = T(v+a) \tag{1.14}$$

теңдігі арқылы анықталады [3; 13; 14]. Бұл қасиет дифференциалдық теңдеулерді шешуде, әсіресе коэффициенттері экспоненциалды өзгеретін теңдеулерді зерттеуде маңызды қолданысқа ие.

Дәлелдеуі. Қарастырылып отырған жағдайда Эльзаки түрлендіруі

$$\mathrm{E}[f(t)](v) = \int_0^\infty f(t)e^{-vt}dt$$

түрінде анықталады [3; 13; 14]. Сондықтан

$$\mathrm{E}[e^{-at}f(t)](v) = \int_0^\infty e^{-at}f(t)e^{-vt}dt.$$

Экспоненталық көбейткіштерді біріктірсек,

$$\mathrm{E}[e^{-at}f(t)](v) = \int_0^\infty f(t)e^{-(v+a)t}dt.$$

Түрлендіру анықтамасы бойынша

$$T(v+a) = \int_0^\infty f(t)e^{-(v+a)t}dt.$$

Сондықтан

$$\mathrm{E}[e^{-at}f(t)](v) = T(v+a).$$

Теорема дәлелденді.

Ескерту. Егер $a = \alpha + i\beta$ түріндегі комплекс сан болса, онда Эльзаки кескініндегі v айнымалысы да комплекс сандар жазықтығында ығысады.

Параметр бойынша дифференциалдау туралы теорема

Егер *x*-тің кез келген мәнінде *A* жиынына тиесілі $f(t,x)$ түпнұсқа функциясының Эльзаки түрлендіруі

$$\mathrm{E}[f(t,x)](v) = T(v,x)$$

түрінде анықталса және $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ туындысы бар болып, параметр бойынша дифференциалдауды интеграл таңбасы астына енгізу шарттары орындалса, онда

$$\mathrm{E}\left[\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right](v) = \frac{\partial T(v,x)}{\partial x} \tag{1.15}$$

теңдігі орындалады [1; 12].

Дәлелдеуі.

$$T(v,x) = v\int_0^\infty f(t,x)e^{-t/v}dt.$$

Параметр бойынша дифференциалдауды интеграл таңбасы астына енгізсек,

$$\frac{\partial T(v,x)}{\partial x} = v\int_0^\infty \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}e^{-t/v}dt.$$

Соңғы өрнек анықтама бойынша

$$\mathrm{E}\left[\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right](v)$$

түріне тең. Теорема дәлелденді.

Көрсеткіштік функция үшін

$$\mathrm{E}[e^{at}](v) = \frac{v^2}{1-av}.$$

Осы теңдіктің екі жағын да *a* параметрі бойынша дифференциалдау арқылы

$$\mathrm{E}[te^{at}](v) = \frac{v^3}{(1-av)^2}$$

теңдігі алынады. Жалпы жағдайда

$$\mathrm{E}[t^n e^{at}] = \frac{n!\,v^{n+2}}{(1-av)^{n+1}} \tag{1.16}$$

болады. Ал $a = 0$ болса,

$$\mathrm{E}[t^n](v) = n!\,v^{n+2} \tag{1.17}$$

Түпнұсқаны дифференциалдау туралы теорема

$\mathrm{E}[f(t)] = T(v)$ болса, онда

$$\mathrm{E}[f'(t)] = \frac{T(v)}{v} - vf(0) \tag{1.18}$$

$$\mathrm{E}[f''(t)] = \frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0). \tag{1.19}$$

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша

$$\mathrm{E}[f'(t)] = v\int_0^\infty f'(t)e^{-t/v}dt = v\int_0^\infty e^{-t/v}d[f(t)] = \frac{T(v)}{v} - vf(0).$$

(1.19) теңдікті дәлелдеу үшін $g(t) = f'(t)$ функциясын енгізейік. Сонда

$$\mathrm{E}\big[g'^{(t)}\big] = \frac{1}{v}\mathrm{E}[g(t)] - vg(0) = \frac{1}{v}[f'(t)] - vf'(0) =$$

$$= \frac{1}{v}\left(\frac{T(v)}{v} - vf(0)\right) - vf'(0) = \frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0).$$

Теорема дәлелденді. Жалпы жағдайда

$$\mathrm{E}\left[f^{(n)}(t)\right] = \frac{T(v)}{v^n} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{2-n+k} f^{(k)}(0) \tag{1.20}$$

Түпнұсқаны интегралдау туралы теорема

Егер $\mathrm{E}[f(t)] = T(v)$ болса, онда

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = vT(v). \tag{1.21}$$

Дәлелдеуі.

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = g(t)$$

болса, онда

$$g'(t) = f(t)$$

және

$$\mathrm{E}[g'(t)] = \frac{1}{v}\mathrm{E}[g(t)] - vg(0) = \frac{1}{v}\mathrm{E}[g(t)],$$

өйткені $g(0) = 0$. Демек,

$$\mathrm{E}[g(t)] = v\mathrm{E}[g'(t)]$$

немесе

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = vT(v).$$

Теорема дәлелденді. Жалпы жағдайда *n* рет интегралдау үшін

$$\mathrm{E}\left[\underbrace{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(\tau)d\tau}_{n}\right] = v^n T(v). \tag{1.22}$$

Кескінді дифференциалдау теоремасы

Егер $\mathrm{E}[f(t)] = T(v)$ болса, онда

$$\mathrm{E}[tf(t)] = v^2 \frac{dT(v)}{dv} - vT(v). \tag{1.23}$$

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша

$$T(v) = v\int_0^\infty f(t)e^{-t/v}dt.$$

Бұдан

$$\frac{dT(v)}{dv} = \int_0^\infty f(t)e^{-t/v}dt + \frac{v}{v^2}\int_0^\infty tf(t)e^{-t/v}dt \tag{1.24}$$

немесе

$$\frac{dT(v)}{dv} = \frac{1}{v}T(v) + \frac{1}{v^2}\mathrm{E}[tf(t)].$$

Соңғы теңдіктен (1.22) қасиеттің дәлелдеуі шығады.

Осы үрдісті жалғастыра отырып, $t^2 f(t)$ түпнұсқа функцияның Эльзаки кескінін табайық. Ол үшін (1.24) теңдікті

$$\frac{dT(v)}{dv} = \frac{1}{v}T(v) + \frac{1}{v}\int_0^\infty tf(t)e^{-t/v}dt \tag{1.25}$$

түрде алып, теңдіктің екі жағын бірдей v бойынша дифференциалдаймыз.

$$\frac{d^2T(v)}{dv^2} = -\frac{1}{v^2}T(v) + \frac{1}{v}\frac{dT(v)}{dv} - \frac{1}{v^3}\mathrm{E}[tf(t)] + \frac{1}{v^4}\mathrm{E}[t^2f(t)].$$

Бұдан

$$\mathrm{E}[t^2f(t)] = v^4\frac{d^2T(v)}{dv^2} \tag{1.26}$$

теңдігі алынады. (1.23) және (1.26) теңдіктер дифференциалдық теңдеулерді ықшамдап шешуге және аналитикалық есептеулерді оңайлатуға көмектеседі.

Сәйкес салдар:

1) $$\mathrm{E}[tf'(t)] = v^2\frac{d}{dv}\left[\frac{T(v)}{v} - vf(0)\right] - v\left[\frac{T(v)}{v} - vf(0)\right], \tag{1.27}$$

2) $$\mathrm{E}[t^2f'(t)] = v^4\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{T(v)}{v} - vf(0)\right], \tag{1.28}$$

3) $$\mathrm{E}[tf''(t)] = v^2\frac{d}{dv}\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right] - v\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right], \tag{1.29}$$

4) $$\mathrm{E}[t^2f''(t)] = v^4\frac{d^2}{dv^2}\left[\frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0)\right]. \tag{1.30}$$

Кескінді интегралдау теоремасы

Егер $\mathrm{E}[f(t)] = T(v)$ болса, онда

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_v^\infty \frac{T(u)}{u^2}du. \tag{1.31}$$

Үйірткі және Борель теоремасы

Егер

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

болса және

$$\mathrm{E}[f(t)] = F(v), \mathrm{E}[g(t)] = G(v),$$

онда

$$\mathrm{E}[(f * g)(t)] = \frac{1}{v}F(v)G(v). \tag{1.32}$$

Зерттеу нәтижелері

Эльзаки түрлендіруінің қолданылуы. Эльзаки түрлендіруі дифференциалдық және интегралдық теңдеулерді шешуде маңызды орын алады. Бұл түрлендіру теңдеуді кескін аймағында қарапайым алгебралық немесе функционалдық қатынасқа келтіруге мүмкіндік береді. Төменде Эльзаки түрлендіруінің қолданылуын сипаттайтын бірнеше мысал қарастырылады.

1-мысал. Эйлер теңдеуі.

$$x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 12x^2, y(1) = 0, y'(1) = 0. \tag{2.1}$$

Алдымен теңдеудің аналитикалық шешімін табайық. Ол үшін

$$x = e^t, t = \ln x, x > 0$$

алмастыруын енгізіп, ізделінді функцияны $y(x) \equiv Y(t(x))$ түрінде қарастырамыз. Сонда

$$y'(x) = \frac{Y_t'}{x}, y''(x) = \frac{Y''(t) - Y'(t)}{x^2}.$$

Осы өрнектерді (2.1) теңдеуге қойсақ,

$$Y''(t) + 3Y'(t) + 2Y(t) = 12e^{2t} \quad (2.2)$$

түрдегі тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеу аламыз. Бастапқы шарттар да жаңа айнымалыда

$$Y(0) = y(1) = 0, Y'(0) = y'(1) = 0$$

түріне келеді.

Біртекті теңдеудің сипаттамалық теңдеуі

$$k^2 + 3k + 2 = 0$$

түрде жазылады және оның түбірлері $k_1 = -2, k_2 = -1$. Сондықтан біртекті теңдеудің жалпы шешімі

$$Y_O(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}.$$

Дербес шешімді $Y_*(t) = Ae^{2t}$ түрінде іздейміз. Оны (2.2)-ге қойсақ,

$$(4A + 6A + 2A)e^{2t} = 12e^{2t},$$

бұдан $A = 1$. Демек,

$$Y(t) = Y_O(t) + Y_*(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t} + e^{2t}.$$

Бастапқы айнымалыға қайта оралсақ,

$$y(x) = \frac{C_1}{x^2} + \frac{C_2}{x} + x^2. \quad (2.3)$$

Бастапқы шарттардан

$$C_1 + C_2 + 1 = 0, -2C_1 - C_2 + 2 = 0$$

жүйесін аламыз. Бұдан

$$C_1 = 3, C_2 = -4.$$

Олай болса, бастапқы есептің шешімі

$$y(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + x^2.$$

Бұл есепті Сумуду түрлендіруін қолданып шығарып көрейік. Сумуду түрлендіруі.

$$\mathbb{S}[f(t)] = G(u) = \int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt, u \in (-\tau_1, \tau_2)$$

теңдігімен беріледі. Сонда (2.1) теңдеудің Сумуду кескін теңдеуі

$$u^2G''(u) + 4uG'(u) + 2G(u) = 24u^2$$

түрде анықталады. Алынған кескін теңдеуі (2.1) теңдеуімен бірдей. Демек, Сумуду түрлендіруі (2.1) теңдеуді шеше алмайды. Ал Эльзаки түрлендіруін пайдалану үшін алдымен $x = e^t$ алмастыруы жасалып, (2.2) теңдеуге түрлендіру қолданылғаны дұрыс.

(2.2) теңдеуге Эльзаки түрлендіруін қолданамыз. Егер

$$\mathrm{E}[Y(t)](v) = T(v)$$

деп белгілесек, онда Эльзаки түрлендіруінің қасиеттері бойынша [1; 12]

$$\mathrm{E}[Y''(t)](v) = \frac{T(v)}{v^2} - Y(0) - vY'(0) = \frac{T(v)}{v^2},$$

$$\mathrm{E}[Y'(t)](v) = \frac{T(v)}{v} - vY(0) = \frac{T(v)}{v},$$

ал

$$\mathrm{E}[e^{2t}](v) = \frac{v^2}{1-2v}.$$

Сондықтан (2.2) теңдеудің кескін теңдеуі

$$\frac{T(v)}{v^2} + 3\frac{T(v)}{v} + 2T(v) = 12\frac{v^2}{1-2v}$$

түрінде жазылады. Бұдан

$$T(v)\left(\frac{1}{v^2} + 3\frac{1}{v} + 2\right) = 12\frac{v^2}{1-2v}.$$

Осыдан

$$T(v) = \frac{12v^4}{(1-2v)(1+v)(1+2v)}.$$

Табылған өрнекті қарапайым бөлшектерге жіктейміз:

$$T(v) = \frac{v^2}{1-2v} - \frac{4v^2}{1+v} + \frac{3v^2}{1+2v}.$$

Кері Эльзаки түрлендіруінің кестесін пайдалансақ,

$$\mathrm{E}^{-1}\left[\frac{v^2}{1-2v}\right] = e^{2t},\ \mathrm{E}^{-1}\left[\frac{v^2}{1+v}\right] = e^{-t},\ \mathrm{E}^{-1}\left[\frac{v^2}{1+2v}\right] = e^{-2t}.$$

Бұдан

$$Y(t) = e^{2t} - 4e^{-t} + 3e^{-2t}.$$

Бастапқы айнымалыға қайта оралсақ $(t = \ln x)$, бастапқы аналитикалық әдіспен табылған шешімге сәйкес шешімді аламыз:

$$y(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + x^2.$$

2-мысал. Тұрақты коэффициентті біртекті емес теңдеу.

Келесі бастапқы есепті қарастырайық:

$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x},\ y(0) = y'(0) = 0. \tag{2.5}$$

Эльзаки түрлендіруін қолдансақ,

$$\mathrm{E}[y''(x)] + 2\mathrm{E}[y'(x)] + 2\mathrm{E}[y(x)] = \mathrm{E}[xe^{-x}].$$

Бастапқы шарттарды ескерсек,

$$\frac{T(v)}{v^2} + 2\frac{T(v)}{v} + 2T(v) = \frac{v^3}{(1+v)^2}.$$

Осыдан

$$T(v) = \frac{v^5}{(2v^2+2v+1)(1+v)^2} = \frac{v^3}{(1+v)^2} - \frac{v^3}{(1+v)^2+v^2}.$$

Кері Эльзаки түрлендіруін қолдансақ,

$$y(x) = xe^{-x} - e^{-x}\sin x = e^{-x}(x - \sin x).$$

Бұл шешім бастапқы шарттарды қанағаттандырады.

3-мысал. Вольтеррдің екінші текті интегралдық теңдеуі.

Келесі теңдеу берілсін:

$$y(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-t)\, y(t)dt. \tag{2.6}$$

Бұл Вольтеррдің екінші текті сызықтық интегралдық теңдеуі.

Үйірткі теоремасын қолдансақ,

$$\mathrm{E}[y(x)] = \mathrm{E}[\sin x] + \mathrm{E}\left[\int_0^x \sin(x-t)\, y(t)dt\right].$$

Яғни

$$T(v) = \frac{v^3}{1+v^2} + \frac{1}{v}\cdot\frac{v^3}{1+v^2}T(v).$$

Осыдан

$$T(v) = v^3.$$

Кері Эльзаки түрлендіруі бойынша

$$y(x) = x.$$

Шынында да, бұл функция берілген интегралдық теңдеуді қанағаттандырады.

4-мысал. Интегралдық теңдеу.

Келесі теңдеуді қарастырайық:

$$y(x) = \int_0^x (x-t)y(t)dt + x^2.$$

Үйірткі теоремасы бойынша

$$\mathrm{E}[y(x)] = \mathrm{E}\left[\int_0^x (x-t)y(t)dt\right] + \mathrm{E}[x^2].$$

Осыдан

$$T(v) = \frac{1}{v}v^3T(v) + 2v^4.$$

Яғни

$$T(v) = v^2T(v) + 2v^4, T(v) = \frac{2v^4}{1-v^2}.$$

Мұны

$$T(v) = 2\left(\frac{v^2}{1-v^2} - v^2\right)$$

түрінде жазуға болады. Кері Эльзаки түрлендіруін қолдансақ,

$$y(x) = 2(chx - 1).$$

Демек, интегралдық теңдеудің шешімі осы функция болады.

5-мысал. Лагерр көпмүшесі бар теңдеу.

Келесі бастапқы есеп берілсін:

$$y'' + 4y = L_2(x), y(0) = 0, y'(0) = 1, \tag{2.7}$$

мұндағы $L_2(x)$ – екінші ретті Лагерр көпмүшесі.

Математикада Лагерр көпмүшелері

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

түрде берілген екінші ретті сызықтық Лагерр дифференциалдық теңдеуінің канондық шешімдері болып табылады. Лагерр көпмүшелері L_0, L_1, … таңбаларымен белгіленеді және Родриг формуласымен анықталады:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}C_n^k x^k.$$

Анықтама бойынша

$$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}.$$

Эльзаки түрлендіруінің сызықтық қасиеті мен $\mathrm{E}[x^n] = n!\, v^{n+2}$ формуласын пайдалансақ, онда

$$\mathrm{E}[L_n(x)] = v^2(1-v)^n.$$

Сонда

$$\mathrm{E}[L_2(x)] = v^2(1-v)^2.$$

Енді (2.7) теңдеуге Эльзаки түрлендіруін қолданамыз:

$$\mathrm{E}[y''(x)] + 4\mathrm{E}[y(x)] = \mathrm{E}[L_2(x)].$$

Бастапқы шарттарды ескерсек,

$$\frac{T(v)}{v^2} - v + 4T(v) = v^2(1-v)^2.$$

Осыдан

$$T(v) = \frac{1}{4}v^4 - \frac{1}{2}v^3 + \frac{3}{16}v^2 + \frac{\frac{3}{2}v^3 - \frac{3}{16}v^2}{1+4v^2}.$$

Кері Эльзаки түрлендіруін қолдансақ, ізделінді шешім

$$y(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} + \frac{3}{16} - \frac{3}{16}\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x \tag{2.8}$$

түрінде табылады.

Дискуссия

Мақалада Эльзаки түрлендіруінің математикалық негіздері мен қолданбалы есептерді шешудегі рөлі талданды. Зерттеу интегралдық түрлендірулер теориясын, әсіресе дифференциалдық теңдеулерді шешудің аналитикалық әдістерін дамытуға бағытталған.

Эльзаки түрлендіруінің қасиеттерін жүйелеу оның Лаплас және Сумуду түрлендірулерімен салыстырғандағы ерекшеліктерін айқындауға мүмкіндік береді. Эльзаки түрлендіруінің басты артықшылықтарының бірі кейбір есептерді жаңа жиілік аймағына толық көшірмей-ақ талдауға мүмкіндік беруінде. Сонымен қатар көрсеткіштік, тригонометриялық және гиперболалық функциялар үшін алынған кескіндер кестесі қолданбалы есептерді шешуде тиімді құрал бола алады. Мақала нәтижелері Elzaki және оның әріптестерінің еңбектерімен [1-5] үйлеседі. Сонымен бірге Эльзаки түрлендіруін инженерлік есептерде, соның ішінде энергетикалық жүйелерді модельдеу мен қорғаныс алгоритмдерін зерттеуде қолданудың болашағы бар [6; 8]. Осыған байланысты болашақ зерттеулерде оны фракталдық және бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулерге, сондай-ақ сандық әдістермен біріктірілген гибридтік тәсілдерге қолдану өзекті болып табылады.

Қорытынды

Эльзаки түрлендіруі интегралдық түрлендірулердің тиімді аналитикалық әдістерінің бірі болып табылады. Оның Лаплас және Сумуду түрлендірулерімен байланысы айқын, әрі ол дифференциалдық және интегро-дифференциалдық теңдеулерді шешуде жаңа мүмкіндіктер береді. Жұмыста Эльзаки түрлендіруінің негізгі қасиеттері мен теоремалары жүйеленіп, қарапайым функциялардың кескіндері анықталды. Сонымен қатар оның көмегімен тұрақты және айнымалы коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешуге қолдану мүмкіндіктері көрсетілді. Әдістің маңызды артықшылығы оның аналитикалық сипатында. Осыған байланысты Эльзаки түрлендіруі математикалық физикада, тербелістер теориясында, автоматты басқаруда және басқа да қолданбалы салаларда болашағы зор құрал болып табылады. Жалпы алғанда, мақаланың мақсаты Эльзаки түрлендіруінің қолданылу аясын кеңейту және оны жаңа математикалық әрі инженерлік есептерде пайдаланудың мүмкіндіктерін көрсету болып табылады.

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

[1] Elzaki T.M. The New Integral Transform "Elzaki Transform" // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2011. – № 1. – P. 57–64. – ISSN 0973-1768.

[2] Elzaki T.M., Elzaki S.M. Application of New Transform "Elzaki Transform" to Partial Differential Equations // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2011. – № 1. – P. 65–70. – ISSN 0973-1768.

[3] Elzaki T.M., Elzaki S.M. On the Connections Between Laplace and Elzaki Transforms // Advances in Theoretical and Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 6, № 1. – P. 1–11. – ISSN 0973-4554.

[4] Elzaki T.M., Elzaki S.M. On the Elzaki Transform and Ordinary Differential Equation With Variable Coefficients // Advances in Theoretical and Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 6, № 1. – P. 13–18. – ISSN 0973-4554.

[5] Elzaki T.M., Elzaki S.M. On the ELzaki Transform and Systems of Ordinary Differential Equations // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. 2011. Vol. 7, No. 1. P. 113-119.

[6] Liu Y., Sun K., Dong J. A Dynamized Power Flow Method Based on Differential Transformation // IEEE Access. – 2020. – Vol. 8. – P. 182441–182450.

[7] Сағындықов Б.Ж. Математиканың арнайы тараулары: Оқу құралы. – Алматы: Лантар Трейд ЖШС, 2022. – 183 б.

[8] Medeiros R.P., Costa F.B., Silva K.M. Power Transformer Differential Protection Using the Boundary Discrete Wavelet Transform // IEEE Transactions on Power Delivery. – 2016. – Vol. 31, № 5. – P. 2083–2095.

[9] Watulaga G.K. Sumudu Transform – A New Integral Transform to Solve Differential Equations and Control Engineering Problems // Mathematical Engineering in Industry. – 1998. – Vol. 6, № 4. – P. 319–329.

[10] Bulut H., Evans D.J. On the Solution of the Riccati Equation by the Decomposition Method // International Journal of Computational Mathematics. – 2002. – Vol. 79. – P. 103–109.

[11] Mohamed M.Z., Elzaki T.M. Solutions of Fractional Ordinary Differential Equations by Using Elzaki Transform // Applied Mathematics. – 2014. – Vol. 9, № 1. – P. 27–33. – ISSN 0973-4554.

[12] Dobrushkin V. Elzaki and Sumudu transforms [Electronic resource]. URL: https://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am33/Mathematica/ch6/elzaki.html (accessed: 21.03.2026).

[13] Widder D.V. The Laplace Transform. – Princeton: Princeton University Press, 2015. – 418 p.

[14] Doetsch G. Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1974. – 326 p.