МРНТИ 27.31.15, 27.29.21

10.51889/2959-5894.2025.90.2.012

[1]М.Ж. Талипова[*], [1]А.Е. Иманчиев, [1]Р.Д. Сейлова, [1]А. Мейрамбекулы

[1]Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, г. Актобе, Казахстан
[*]*e-mail: mira_talipova@mail.ru*

О НОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА РАНГА *k*

Аннотация

В статье представлен метод построения нормальных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка ранга k. Особое внимание уделено случаю, когда подранг системы равен единице, что упрощает процедуру определения неопределенных параметров. Для исследования используются аналитические методы, включая преобразование Фробениуса-Латышевой и представление решений в виде обобщенных степенных рядов. Установлены необходимые условия существования нормальных решений, а также проведен анализ вспомогательных систем. С использованием метода Фробениуса-Латышевой сформулированы требования к рекуррентным системам, определяющим неизвестные коэффициенты нормальных решений. Показано, что при выполнении этих требований необходимые условия существования решения становятся также и достаточными. Полученные результаты могут быть применены в задачах математической физики, инженерии и других областях науки.

Ключевые слова: неоднородная система, ранг, ряд, многочлен, нормальное решение, метод Фробениуса-Латышевой, аналитическая теория, вспомогательная система.

[1]М.Ж. Талипова, [1]А.Е. Иманчиев, [1]Р.Д. Сейлова, [1]А. Мейрамбекулы
[1]Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

ЕКІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ РАНГІ *k* БОЛАТЫН БІРТЕКТІ ЕМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ ҚАЛЫПТЫ ШЕШІМДЕРІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Мақалада екінші ретті дербес туындылы рангі k болатын біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің қалыпты шешімдерін құру әдісі ұсынылған. Ерекше назар жүйенің ішкі рангі бірге тең болған жағдайға аударылған, бұл анықталмаған параметрлерді анықтау процедурасын жеңілдетеді. Зерттеу үшін аналитикалық әдістер, соның ішінде Фробениус-Латышева түрлендіруі және шешімдерді жалпыланған дәрежелі қатар түрінде ұсыну қолданылады. Қалыпты шешімдердің болуы үшін қажетті шарттар анықталып, қосалқы жүйелер талданды. Фробениус-Латышева әдісін пайдалана отырып, қалыпты шешімдердің белгісіз коэффициенттерін анықтайтын рекурренттік жүйелерге қойылатын талаптар тұжырымдалды. Осы талаптар орындалған жағдайда, шешімнің қажетті шарттары жеткілікті болып табылатыны көрсетілді. Алынған нәтижелер математикалық физика, инженерия және ғылымның басқа да салаларындағы есептерді шешуде қолданылуы мүмкін.

Түйін сөздер: біртекті емес жүйе, ранг, қатар, көпмүшелік, қалыпты шешім, Фробениус-Латышева әдісі, аналитикалық теория, қосалқы жүйе.

[1]M.Zh. Talipova, [1]A.E. Imanchiev, [1]R.D. Seilova, [1]A. Meirambekuly
[1]Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

ON NORMAL SOLUTIONS OF INHOMOGENEOUS SYSTEMS OF SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF RANK k

Abstract

This paper presents a method for constructing normal solutions of inhomogeneous systems of second-order partial differential equations of rank kkk. Special attention is given to the case when the subrank of the system is equal to one, which simplifies the procedure for determining the undetermined parameters. Analytical

methods are used in the study, including the Frobenius-Latysheva transformation and the representation of solutions in the form of generalized power series. Necessary conditions for the existence of normal solutions are established, and an analysis of auxiliary systems is conducted. Using the Frobenius-Latysheva method, requirements for recurrent systems that determine the unknown coefficients of normal solutions are formulated. It is shown that when these requirements are met, the necessary conditions for the existence of a solution also become sufficient. The obtained results can be applied to problems in mathematical physics, engineering, and other fields of science.
Keywords: inhomogeneous system, rank, series, polynomial, normal solution, Frobenius-Latysheva method, analytical theory, auxiliary system.

Основные положения

В статье предложен алгоритм получения нормальных решений для неоднородных систем дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Особое внимание уделено формулировке необходимых условий существования указанных решений, предполагающих выполнение определённых соотношений, заданных через характеристические функции. Кроме того, получены рекуррентные соотношения, позволяющие находить коэффициенты нормальных решений, а также доказана достаточность этих условий для существования решений в рассматриваемом классе систем.

Введение

Дифференциальные уравнения с частными производными занимают важное место при математическом описании различных процессов, встречающихся в физике, технике, биологии и других областях науки [1–3]. Одним из ключевых направлений в теории дифференциальных уравнений является изучение неоднородных систем, содержащих внешние воздействия или возмущения, влияющие на структуру исходной системы. Аналитическое решение таких систем представляет значительную сложность, так как их поведение во многом зависит от свойств уравнений и заданных граничных условий [4-6].

Актуальной задачей современной математической физики является исследование нормальных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений второго порядка. Такие решения строятся с учётом структурных свойств уравнений и устойчивости решений. Благодаря своим специфическим особенностям, нормальные решения являются ценным инструментом при изучении поведения динамических систем и имеют прикладное значение в инженерных и научных задачах [7–8].

Настоящее исследование направлено на анализ способов получения нормальных решений для неоднородных систем дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Рассматриваются критерии существования и однозначности таких решений, а также исследуются условия, при которых возможна их конструкция. Особое внимание уделяется как теоретической обоснованности предложенного подхода, так и потенциальным сферам его применения.

Методология исследования

Исследование однородных специализированных систем с частными производными второго порядка является предметом работ множества исследователей [9–11]. Так, в исследовании В. Штернберга показано, что при условии единичного ранга системы допускают существование асимптотических решений [12]. Значительный вклад в развитие теории однородных систем с частными производными второго порядка внес Ж.Н. Тасмамбетов, систематизировавший и углубивший метод Фробениуса–Латышевой [13–15]. Метод основан на концепции ранга, разработанной А. Пуанкаре, и понятии антиранга, предложенном К. Я. Латышевой. Это позволяет строить решения различной структуры, включая степенные, нормальные и поднормальные ряды, а также получать замкнутые и нормально-регулярные решений [16–17].

Результаты исследования

В исследовании анализируется неоднородная система, включающая два взаимосвязанных дифференциальных уравнения второго порядка с частными производными вида:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + x^k \cdot p_1 \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + y^k \cdot p_2 \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} + x^{2k} \cdot p_3 \cdot Z = p_4(x,y), \\ &\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + x^k \cdot q_1 \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + y^k \cdot q_2 \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} + y^{2k} \cdot p_3 \cdot Z = q_4(x,y), \end{aligned} \quad (1)$$

где ранг $p = k + 1 > 0$, коэффициенты $p_i(x,y)$ и $q_i(x,y)(i = 1,2,3)$ представимы сходящимися рядами двух переменных

$$\begin{aligned} p_i(x,y) &= \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu,\nu}^{(i)} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, \\ q_i(x,y) &= \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_{\mu,\nu}^{(i)} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, \quad (i = 1,2,3) \end{aligned} \quad (2)$$

Система (1) обладает несколькими характерными особенностями.

1. В соответствии с аналитической теорией подобных систем, особенность (∞, ∞) является иррегулярной [13]. Рассмотренная в работе [13] однородная система

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + x^k \cdot p_1 \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + y^k \cdot p_2 \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} + x^{2k} \cdot p_3 \cdot Z = 0, \\ &\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + x^k \cdot q_1 \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + y^k \cdot q_2 \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} + y^{2k} \cdot p_3 \cdot Z = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

обладает иррегулярной особенностью в точке (∞, ∞). В рамках данного подхода получены условия, при которых возможно существование нормального решения для системы (3), которое может быть выражено в следующей представленного в виде

$$Z = \exp\big(G(x,y)\big) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu}, \big(C_{0,0} \neq 0\big), \quad (4)$$

где функция G(x,y) задается выражением

$$G(x,y) = \tfrac{\alpha_{k+1,0}}{k+1} \cdot x^{k+1} + \tfrac{\alpha_{0,k+1}}{k+1} \cdot x^{k+1} + \ldots + \alpha_{1,1} \cdot xy + \alpha_{1,0} \cdot x + \alpha_{0,1} \cdot y. \quad (5)$$

Здесь $\rho, \sigma, C_{\mu,\nu}(\mu, \nu = 0,1,2, \ldots) -$ некоторые постоянные; а параметры $\alpha_{k+1,0}, \alpha_{0,k+1}, \ldots$, $\alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$ остаются неопределенными.

Первое условие, обеспечивающее существование нормального решения вида (4), позволяет вычислить неопределённые параметры функции $G(x,y)$, тогда как второе условие направлено на определение корней системы определяющих уравнений, то есть нахождение пары значений (ρ, σ).

Однородная система (3) относится к классу систем Вильчинского [18] и, при выполнении условия совместности

1. $p_y^{(1)} - q_x^{(2)} = 0$,

$$2.\ q_{xx}^{(1)}+2q_x^{(3)}-q^{(1)}\cdot p_x^{(1)}-p^{(1)}\cdot q_x^{(1)}-\left[p_{yy}^{(1)}-q^{(2)}\cdot p_y^{(1)}-p^{(2)}\cdot q_y^{(1)}-2q^{(1)}\cdot p_y^{(2)}\right]=0,$$

$$3.\quad q_{xx}^{(2)}+p^{(1)}\cdot q_x^{(2)}-q^{(1)}\cdot p_x^{(2)}-2p^{(2)}\cdot q_x^{(1)}-\left[p_{yy}^{(2)}+2p_y^{(3)}-p^{(2)}\cdot q_y^{(2)}-q^{(2)}\cdot p_y^{(2)}\right]=0,$$
$$q_{xx}^{(3)}-2p^{(3)}\cdot q_x^{(1)}-q^{(1)}\cdot p_x^{(3)}+p^{(1)}\cdot q_x^{(3)}-\left[p_{yy}^{(3)}-2q^{(3)}p_y^{(2)}-p^{(2)}q_y^{(3)}+q^{(2)}\cdot p_y^{(3)}\right]=0,$$

обладает четырьмя линейно-независимыми частными решениями.

2. Для рассматриваемой системы (1) – (2) справедлива следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть задано частное решение $\overline{Z}(x,y)$ для неоднородной системы (1) и общее решение $Z^o(x,y)$ соответствующей однородной системы (3). Тогда сумма этих решений

$$Z(x,y)=Z^o(x,y)+\overline{Z}(x,y) \tag{6}$$

образует общее решение неоднородной системы с частными производными второго порядка (1).

Доказательство теоремы приведен в работе [7].

4. В случае, когда неоднородная система (1)–(2) имеет иррегулярную особенность в точке (∞,∞), правую часть можно представить в виде нормальных рядов Томе для двух переменных, то есть в следующем виде:

$$\begin{aligned} p_4(x,y)&=exp\big(G(x,y)\big)\cdot x^{\alpha}\cdot y^{\beta}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}p_{\mu,\nu}\cdot x^{-\mu}\cdot y^{-\nu}\big(p_{0,0}\neq 0\big),\\ q_4(x,y)&=exp\big(G(x,y)\big)\cdot x^{\gamma}\cdot y^{\delta}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}q_{\mu,\nu}\cdot x^{-\mu}\cdot y^{-\nu}\big(q_{0,0}\neq 0\big),\end{aligned} \tag{7}$$

Подобно случаю однородных систем, критерии существования нормальных решений для неоднородной системы формулируются аналогично. Основное различие проявляется в механизме определения неопределённых параметров, входящих в структуру предполагаемого решения (4).

В соответствии с методом Фробениуса–Латышевой, для определения неизвестных параметров $\alpha_{k+1,0},\alpha_{0,k+1},\dots,\alpha_{1,1},\alpha_{1,0},\alpha_{0,1}$ многочлена $Q(x,y)$ применяется специальное преобразование

$$\overline{Z}(x,y)=exp\,G\,(x,y)\cdot\overline{U}(x,y). \tag{8}$$

позволяющее упростить структуру исходной системы. После его применения система (1) с коэффициентами, заданными выражениями (2) и (7), переходит в так называемую

$$\begin{aligned} &\frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial x^2}+[2\cdot G_x+x^k\cdot p_1]\cdot\frac{\overline{\partial U}}{\partial x}+y^k\cdot p_2\cdot\frac{\overline{\partial U}}{\partial y}+\{[(G_x)^2+G_{xx}]+\\ &\qquad+x^k\cdot p_1\cdot G_x+y^k\cdot p_2\cdot G_y+x^{2k}\cdot p_3\big\}\cdot\overline{U}=p_4^*(x,y),\\ &\frac{\overline{\partial^2 U}}{\partial y^2}+x^k\cdot q_1\cdot\frac{\overline{\partial U}}{\partial x}+\big[2\cdot G_y\cdot y^k\cdot q_2\big]\cdot\frac{\overline{\partial U}}{\partial y}+\Big\{\Big[\big(G_y\big)^2+G_{yy}\Big]+\\ &\qquad+x^k\cdot q_1\cdot G_x+y^k\cdot q_2\cdot G_y+y^{2k}\cdot q_3\big\}\cdot\overline{U}=q_4^*(x,y),\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$p_4^*(x,y) = x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} p_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \big(p_{0,0} \neq 0\big),$$
$$q_4^*(x,y) = x^{\gamma} \cdot y^{\delta} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} q_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \big(q_{0,0} \neq 0\big). \quad (10)$$

Анализ показывает, что при переходе от исходной системы к вспомогательной, наибольшие степени коэффициентов при производных по переменным x и y, а также при самой искомой функции, сохраняются. Они по-прежнему равны k и $2k$ соответственно. Это подтверждает, что выполненное преобразование (8) не влияет на ранг системы, и он остается неизменным.

Следующим шагом является исследование условий, при которых вспомогательная система (9) допускает представление решения в форме обобщённого степенного ряда

$$\overline{U}(x,y) = x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu} \cdot x^{-\mu} \cdot y^{-\nu} \big(C_{0,0} \neq 0\big) \quad (11)$$

в зависимости от особенности в точке (∞, ∞).

Коэффициенты при $\overline{U}(x,y)$ в первом уравнении обозначим через $R_3(x,y)$, а во втором уравнении – через $E_3(x,y)$:

$$R_3(x,y) = \{[(G_x)^2 + G_{xx}] + x^k \cdot p_1 \cdot G_x + y^k \cdot p_2 \cdot G_y + x^{2k} \cdot p_3\},$$
$$E_3(x,y) = \left\{\left[\left(G_y\right)^2 + G_{yy}\right] + x^k \cdot q_1 \cdot G_x + y^k \cdot q_2 \cdot G_y + y^{2k} \cdot q_3\right\}.$$

Для этого анализируются коэффициенты при старших степенях переменных x и y в уравнениях, входящих в систему (9). Приравнивая эти коэффициенты к нулю, удаётся вывести системы алгебраических уравнений, позволяющие определить неизвестные параметры $\alpha_{k+1,0}, \alpha_{0,k+1}, \dots, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$, входящие в многочлен $G(x,y)$, формирующий начальную часть искомого ряда.

Обозначим полученные системы уравнений, предназначенные для вычисления коэффициентов, через

$$d_{k+1,0}^{(j)} = 0, d_{0,k+1}^{(j)} = 0, \dots, d_{1,1}^{(j)} = 0, d_{1,0}^{(j)} = 0, d_{0,1}^{(j)} = 0 (j = 1,2). \quad (12)$$

Чтобы проиллюстрировать методику, рассмотрим частный случай, при котором система (9) имеет конкретный ранг $p = 1 + 1 = 2$, обозначим его через

$$G(x,y) = \tfrac{\alpha_{1,0}}{2} \cdot x^2 + \tfrac{\alpha_{0,1}}{2} \cdot y^2 + \alpha_{1,1} \cdot xy + \alpha_{2,0} \cdot x + \alpha_{0,2} \cdot y, \quad (13)$$
$$G_x = \alpha_{1,0} \cdot x + \alpha_{1,1} \cdot y + \alpha_{2,0}, G_{xx} = \alpha_{1,0},$$
$$G_y = \alpha_{0,1} \cdot y + \alpha_{1,1} \cdot x + \alpha_{0,2}, G_{yy} = \alpha_{0,1}.$$

Коэффициенты $R_3(x,y)$ и $E_3(x,y)$, присутствующие во вспомогательной системе (9), представляют собой выражения, зависящие от параметров многочлена, формирующего первые члены обобщенного степенного ряда и имеют следующий вид:

$$R_3(x,y) = d_{2,0}^{(1)} \cdot x^2 + d_{0,2}^{(1)} \cdot y^2 + d_{1,1}^{(1)} \cdot xy + d_{1,0}^{(1)} \cdot x + d_{0,1}^{(1)} \cdot y + d_{0,0}^{(1)} + \dots + d_{1,0}^{(1)} \frac{1}{x} + \dots,$$
$$E_3(x,y) = d_{2,0}^{(2)} \cdot x^2 + d_{0,2}^{(2)} \cdot y^2 + d_{1,1}^{(2)} \cdot xy + d_{1,0}^{(2)} \cdot x + d_{0,1}^{(2)} \cdot y + d_{0,0}^{(2)} + \dots + d_{1,0}^{(2)} \frac{1}{x} + \dots,$$

где $d_{2,0}^{(j)}, d_{0,2}^{(j)}, \ldots (j=1,2)$ зависят от неизвестных коэффициентов многочлена $G(x,y)$.

Для того, чтобы вспомогательная система (9) имела хотя бы одно решение вида (11), необходимо выполнение равенств (12) при $k=1$.

Отсюда получаем шесть систем характеристических уравнений которые используются для определения коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} d_{2,0}^{(1)} &= \alpha_{1,0}^2 + \alpha_{1,0}\cdot a_{0,0}^{(3)} = 0, \\ d_{2,0}^{(2)} &= \alpha_{1,1}^2 + \alpha_{1,0}\cdot b_{0,0}^{(1)} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } x^2 \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{0,2}^{(1)} &= \alpha_{1,1}^2 + \alpha_{0,1}\cdot a_{0,0}^{(2)} = 0, \\ d_{0,2}^{(2)} &= \alpha_{0,1}^2 + \alpha_{0,1}\cdot b_{0,0}^{(2)} + b_{0,0}^{(3)} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } y^2 \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{1,1}^{(1)} &= 2\alpha_{1,0}\cdot\alpha_{1,1} + \alpha_{1,1}\cdot a_{0,0}^{(1)} + \alpha_{1,1}\cdot a_{0,0}^{(2)} = 0, \\ d_{1,1}^{2} &= 2\alpha_{0,1}\cdot\alpha_{1,1} + \alpha_{1,1}\cdot b_{0,0}^{(1)} + \alpha_{1,1}\cdot b_{0,0}^{(3)} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } xy \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{1,0}^{(1)} &= 2\alpha_{1,0}\cdot\alpha_{2,0} + \alpha_{1,0}\cdot b_{1,0}^{(1)} + \alpha_{2,0}\cdot a_{0,0}^{(1)} + \alpha_{1,1}\cdot a_{0,1}^{(1)} + \alpha_{1,1}\cdot a_{0,1}^{(2)} + a_{1,0}^{(3)} = 0, \\ d_{1,0}^{(2)} &= 2\alpha_{1,1}\cdot\alpha_{0,2} + \alpha_{0,1}\cdot b_{1,0}^{(1)} + \alpha_{1,1}\cdot b_{0,1}^{(1)} + \alpha_{2,0}\cdot b_{0,0}^{(1)} + \alpha_{1,1}\cdot b_{0,1}^{(2)} = 0 \end{aligned}\right\} \text{при } x \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{0,1}^{(1)} &= 2\alpha_{1,1}\cdot\alpha_{2,0} + \alpha_{1,1}\cdot a_{1,0}^{(1)} + \alpha_{0,1}\cdot a_{0,1}^{(2)} + \alpha_{1,1}\cdot a_{1,0}^{(2)} + \alpha_{0,2}\cdot a_{0,0}^{(2)} = 0, \\ d_{0,1}^{(2)} &= 2\alpha_{0,1}\cdot\alpha_{0,2} + \alpha_{1,1}\cdot b_{1,0}^{(1)} + \alpha_{0,1}\cdot b_{0,1}^{(2)} + \alpha_{1,1}\cdot b_{1,0}^{(2)} + \alpha_{0,2}\cdot b_{0,0}^{(2)} + b_{1,0}^{(3)} = 0 \end{aligned}\right\} \text{при } y \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{0,0}^{(1)} &= \alpha_{2,0}^{(2)} + \alpha_{1,0} + \alpha_{1,0}\cdot a_{2,0}^{(1)} + \alpha_{1,1}\cdot a_{1,1}^{(1)} + \alpha_{2,0}\cdot a_{1,0}^{(1)} + \\ &+ \alpha_{0,1}\cdot a_{0,2}^{(2)} + \alpha_{1,1}\cdot a_{1,1}^{(2)} + \alpha_{0,2}\cdot a_{0,1}^{(2)} + a_{0,2}^{(3)} = 0, \\ d_{0,0}^{(2)} &= \alpha_{0,2}^{(2)} + \alpha_{0,1} + \alpha_{1,0}\cdot a_{2,0}^{(1)} + \alpha_{1,1}\cdot a_{1,1}^{(1)} + \alpha_{2,0}\cdot a_{0,0}^{(1)} + \\ &+ \alpha_{0,1}\cdot a_{0,2}^{(2)} + \alpha_{1,1}\cdot a_{1,1}^{(2)} + \alpha_{0,2}\cdot a_{1,0}^{(1)} + a_{2,0}^{(3)} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } x^0y^0. \tag{19}$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}, \alpha_{1,1}$ определяются из систем вида (14)–(16), а $\alpha_{2,0}$ и $\alpha_{0,2}$ − из систем (17)–(19). Теперь определим ρ, σ и $C_{\mu,\nu}$. Подставляя (11) в (9), получаем систему характеристических уравнений

$$\begin{aligned} x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\Big\{C_{0,0}\cdot\phi_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma) + \Big[C_{1,0}\cdot\phi_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma) + C_{0,0}\cdot\phi_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma)\Big]\cdot\frac{1}{x} + \\ +\Big[C_{0,1}\cdot\phi_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1) + C_{0,0}\cdot\phi_{0,1}^{(j)}(\rho,\sigma)\Big]\cdot\frac{1}{y} + \Big[C_{1,1}\cdot\phi_{0,0}^{(j)}(\rho+1,\sigma+1) + \\ +C_{1,0}\cdot\phi_{0,1}^{(j)}(\rho+1,\sigma) + C_{0,1}\cdot\phi_{1,0}^{(j)}(\rho,\sigma+1) + C_{0,0}\cdot\phi_{1,1}^{(j)}(\rho,\sigma)\Big]\cdot\frac{1}{xy} + \ldots\Big\} = \phi_j(x,y), \end{aligned} \tag{20}$$

где $\phi_1(x,y) = p_4^*(x,y), \phi_2(x,y) = q_4^*(x,y)$, а $\phi_{0,0}^{(j)}(\rho,\sigma)(j=1,2)$ имеет вид относительно особенности (∞,∞):

$$\begin{aligned} \phi_{0,0}^{(1)}(\rho,\sigma) &= \rho\cdot(\rho-1) + a_{00}^{(1)}\cdot\rho + a_{00}^{(2)}\cdot\sigma + a_{00}^{(3)}, \\ \phi_{0,0}^{(2)}(\rho,\sigma) &= \sigma\cdot(\sigma-1) + b_{00}^{(1)}\cdot\rho + b_{00}^{(2)}\cdot\sigma + b_{00}^{(3)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Из приведённого выше анализа следует, что выражение (11) может рассматриваться как частное формальное решение вспомогательной системы лишь при условии, что содержащиеся в нём неизвестные коэффициенты $C_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,\ldots)$ удовлетворяют определённой рекуррентной системе уравнений:

$$
\begin{gathered}
C_{0,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma) = \alpha_{0,0}^{(j)} \\
C_{1,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho+1, \sigma) + C_{0,0} \cdot \phi_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma) = \alpha_{1,0}^{(j)} \\
C_{0,1} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma+1) + C_{0,0} \cdot \phi_{0,1}^{(j)}(\rho, \sigma) = \alpha_{0,1}^{(j)} \\
C_{1,1} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho+1, \sigma+1) + C_{1,0} \cdot \phi_{0,1}^{(j)}(\rho+1, \sigma) + \\
+C_{0,1} \cdot \phi_{1,0}^{(j)}(\rho, \sigma+1) + C_{0,0} \cdot \phi_{1,1}^{(j)}(\rho, \sigma) = \alpha_{1,1}^{(j)} \qquad (22) \\
C_{2,0} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho+2, \sigma) + C_{1,0} \cdot \phi_{1,0}^{(j)}(\rho+1, \sigma) + C_{0,0} \cdot \phi_{2,0}^{(j)}(\rho, \sigma) = \alpha_{2,0}^{(j)} \\
C_{0,2} \cdot \phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma+2) + C_{0,1} \cdot \phi_{0,1}^{(j)}(\rho, \sigma+1) + C_{0,0} \cdot \phi_{0,2}^{(j)}(\rho, \sigma) = \alpha_{0,2}^{(j)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.
\end{gathered}
$$

Эта рекуррентная система разбивается на две системы в зависимости от значений степеней переменных: один случай описывает ситуацию при $j = 1$; $\alpha_{\mu,\nu}^{(1)} = p_{\mu,\nu}$, другой при $j = 2$, $\alpha_{\mu,\nu}^{(2)} = q_{\mu,\nu}$. Здесь $p_{\mu,\nu}$ и $q_{\mu,\nu}$ соответствуют коэффициентам, входящим в обобщённые степенные ряды $p_4^*(x,y)$ и $q_4^*(x,y)$, соответственно.

Пусть значения коэффициентов $C_{\mu,\nu}(\mu, \nu = 0,1,2,\ldots)$, определённых по этим двум системам при $j = 1$ и $j = 2$ совпадают. Из системы (22), это возможно лишь при условии, что соответствующие степени $\alpha + k_1, \beta + k_1$ и $\gamma + k_2, \delta + k_2$, где $k_j(j = 1,2)$ – любые натуральные числа не совпадают с характеристическими показателями решений однородной системы (3).

Анализ системы характеристических уравнений (20) показывает, что сходимость рядов $\phi_j(x,y)(j = 1,2)$ гарантирует сходимость обобщённого ряда (11). Это позволяет построить частное решение $\overline{Z}(x,y)$ для неоднородной системы (1). Однако в ситуации, когда степени $\alpha + k_1, \beta + k_1$ и $\gamma + k_2, \delta + k_2$, (при натуральных $k_j(j = 1,2)$) совпадают с характеристическими показателями решений системы (3), возникает резонансное явление. В таком случае правая часть уравнений системы (1) фактически совпадает с одним из её однородных частных решений.

Справедливы следующие утверждения

Лемма 1. Вспомогательная система (9), сформированная посредством преобразования (8) из системы (1)–(2), (7), допускает наличие по меньшей мере одного решения в форме (11) только при условии, что выполняются соотношения, представленные в выражении (12).

Лемма 2. Решения вспомогательной системы (9) в виде обобщённого ряда (11) возможны лишь в том случае, если пара параметров (ρ, σ) удовлетворяет системе определяющих уравнений $\phi_{0,0}^{(j)} = 0$, построенной относительно особенности (∞, ∞), где $\phi_{0,0}^{(j)}(\rho, \sigma)(j = 1,2)$ – коэффициенты старших членов, полученных из характеристических функций вспомогательной системы после замены неизвестной $\overline{U}(x,y)$ на соответствующее выражение $x^\rho \cdot y^\sigma$.

Доказательства Лемм 1 и 2 осуществляются по аналогии с аргументацией, представленной в источнике [13], с учётом специфики, заключающейся в том, что рассматриваемое решение $\overline{U}(x,y)$ выступает как частное решение неоднородной системы.

На основе лемм 1 и 2 докажем

Теорема 2. При выполнении условий, при которых коэффициенты $C_{\mu,\nu}(\mu, \nu = 0,1,2,\ldots)$ ряда (4) удовлетворяют рекуррентным соотношениям, заданным в (22), неоднородная система (1)–(2), с правой частью, определённой выражением (7), допускает существование нормального решения, представленного в форме (4).

Доказательство. В соответствии с подходом, изложенным в работе [13], нормальные решения неоднородной системы (1)–(2) ищутся в форме разложения (4). Сначала, используя

Лемму 1, вычисляются коэффициенты многочлена $G(x,y)$. Далее, опираясь на Лемму 2, определяются параметры ρ и σ , входящие в состав обобщенного степенного ряда (4). Оставшиеся неопределённые величины $C_{\mu,\nu}(\mu,\nu=0,1,2,\ldots)$ уточняются на основе рекуррентной системы (22). Таким образом, утверждение теоремы 2 доказано.

Дискуссия

В данной работе рассмотрен метод построения нормальных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка ранга k. Полученные результаты основаны на использовании метода Фробениуса-Латышевой и анализа вспомогательных систем. Проведенный анализ показал, что для обеспечения существования нормальных решений необходимо выполнение ряда условий, включая выполнение рекуррентных соотношений, которые позволяют определить неизвестные параметры решений.

По сравнению с другими существующими методами, предложенный в статье подход имеет определённые преимущества. Прежде всего, он предоставляет возможность получения явных форм решений, что облегчает их дальнейший анализ и применение в различных научных и инженерных задачах. Кроме того, использование вспомогательных систем позволяет значительно упростить процесс вычислений, сведя его к решению конечного числа алгебраических уравнений.

Однако остаются нерешённые вопросы, требующие дополнительного исследования. Настоящее рассмотрение ограничено случаями, в которых подранг системы равен единице. Расширение метода на более сложные случаи – с подрангом выше единицы – может потребовать модификации подхода и уточнения применяемых условий. Кроме того, открытым остаётся вопрос о влиянии структуры неоднородности на свойства нормальных решений, особенно при её изменении. Кроме того, важным направлением дальнейших исследований является изучение численных алгоритмов для нахождения нормальных решений. Хотя аналитический подход позволяет получить точные выражения, его практическая реализация может быть затруднена при увеличении размерности системы или при наличии сложных граничных условий.

Заключение

В данной работе представлен метод построения нормальных решений неоднородных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Основные результаты включают:

-Установление необходимых условий существования нормальных решений на основе вспомогательных систем.

-Выведение рекуррентных соотношений для определения коэффициентов нормальных решений.

-Доказательство достаточности найденных условий для существования решений в заданном классе систем.

Применение предложенного метода открывает новые возможности для исследования дифференциальных уравнений с неоднородностями и может быть использовано в задачах математической физики, инженерии и других областях науки. В будущем планируется расширение методики на более сложные системы, а также разработка эффективных численных алгоритмов для нахождения нормальных решений.

Благодарность

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (ИРН AP19675358).

Список использованных источников

[1] A.T. Assanova, A.E. Imanchiyev. A nonlocal problem with multipoint conditions for partial differential equations of higher order // Filomat, 2024. https://doi.org/10.2298/FIL2401295A

[2] A.U. Bekbauova. CMMSE: Solutions in a Broad Sense to the Boundary Value Problem for First-Order Partial Differential Systems // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2025. https://doi.org/10.1002/mma.10669

[3] M.Ruzhansky, A.Hasanov, T.G.Ergashev. PDE-Systems associated with the hypergeometric functions in three variables and their particular solutions near the origin. Preprint, October, 2024. 245 p. http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2410.00748

[4] Сикорский Ю.И., Терещенко Н.И. О неоднородных линейных дифференциальных уравнениях в регулярном случае // "Мат. физика", - Киев. 1972. №11. - С. 133 – 137.

[5] Сикорский Ю.И., Терещенко Н.И. О неоднородных линейных дифференциальных уравнениях в регулярном случае // "Мат. физика", - Киев. 1972. №11. - С. 133 – 137.

[6] Сикорский Ю.И. Нормальные решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами: автореф. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев: 1972. - 12 с.

[7] M.Zh. Talipova. Construction of normal-regular solutions of inhomogeneous system of partial differential equations of second order // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2025, https://doi.org/10.1002/mma.10828

[8] М.Ж.Талипова, А.У.Бекбауова. Построение нормальных решений для неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных с иррегулярными особенностями// Вестник Казахстанско-Британского технического университета. Математические науки. 2025. № 1

[9] Wilczynski E.J. Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces. Leipzig. 1906. 120 p.

[10] Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ОНТИ, 1939. - 719 с.

[11] Appel P. Sur les polynomes de deux variables analogues aux polynomes de jacobi // Archiv der Mathematik und Physik. 1881. B. 66. - S. 238 – 245.

[12] Sternberg W. Uber dis asymptotiche integration von differential gleichungen. Math. Ann. 1920; 81(2): 119-186.

[13] Tasmambetov ZN. Construction of Normal and Normally-Regular Solutions of Special Systems of Partial Equations of Second Order [in Russian]. Aktobe: IP Zhanadilov S.T. 2015.

[14] Issenova A.A, Tasmambetov Z.N, Talipova M.Z. Construction of solutions hypergeometric system of Horn type in the form of Laguerre polynomials. //Lobachevskii Journal of Mathematics 2022; 43(11): 3167-3173. https://doi.org/10.1134/S1995080222140153

[15] Tasmambetov, Z.N., Talipova, M.Z. Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system // AIP Conference Proceedings, 2017, 1880, https://doi.org/10.1063/1.5000629

[16] Латышева К.Я. О нормальных рядах как решениях линейных дифференциальных уравнений любого ранга //"Наукові записки КДУ", Мат. сборник. - Київ. 1952. №6. - С. 25 – 46.

[17] Латышева К.Я., Терещенко Н.И., Орел Г.С. Нормально-регулярные решения и их приложения. – Киев: Вищ. школа, 1974. - 136 с.

[18] Wilzynski E.J. On a Certain Completery Jntegrable System of Linear Partial Differential Eguations // Amer. Journal of Math. 36. №3. 1904. - P.180 – 194.

References

[1] A.T. Assanova, A.E. Imanchiyev. A nonlocal problem with multipoint conditions for partial differential equations of higher order // Filomat, 2024. https://doi.org/10.2298/FIL2401295A

[2] A.U. Bekbauova. CMMSE: Solutions in a Broad Sense to the Boundary Value Problem for First-Order Partial Differential Systems // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2025. https://doi.org/10.1002/mma.10669

[3] M.Ruzhansky, A.Hasanov, T.G.Ergashev. PDE-Systems associated with the hypergeometric functions in three variables and their particular solutions near the origin. Preprint, October, 2024. 245 p. http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2410.00748

[4] Sikorskij Ju.I., Tereshhenko N.I. O neodnorodnyh linejnyh differencial'nyh uravnenijah v reguljarnom sluchae // "Mat. fizika", - Kiev. 1972. №11. - S. 133 – 137.

[5] Sikorskij Ju.I., Tereshhenko N.I. O neodnorodnyh linejnyh differencial'nyh uravnenijah v reguljarnom sluchae // "Mat. fizika", - Kiev. 1972. №11. - S. 133 – 137.

[6] Sikorskij Ju.I. Normal'nye reshenija linejnyh neodnorodnyh differencial'nyh uravnenij s peremennymi kojefficientami: avtoref. … kand. fiz.-mat. nauk. – Kiev: 1972. - 12 s.

[7] M.Zh. Talipova. Construction of normal-regular solutions of inhomogeneous system of partial differential equations of second order // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2025, https://doi.org/10.1002/mma.10828

[8] M.Zh.Talipova, A.U.Bekbauova. Postroenie normal'nyh reshenij dlja neodnorodnyh differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh s irreguljarnymi osobennostjami// Vestnik Kazahstansko-Britanskogo tehnicheskogo universiteta. Matematicheskie nauki. 2025. № 1

[9] Wilczynski E.J. Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces. Leipzig. 1906. 120 p.

[10] Ajns Je.L. Obyknovennye differencial'nye uravnenija. – Har'kov: ONTI, 1939. - 719 s.

[11] Appel P. Sur les polynomes de deux variables analogues aux polynomes de jacobi // Archiv der Mathematik und Physik. 1881. B. 66. - S. 238 – 245.

[12] Sternberg W. Uber dis asymptotiche integration von differential gleichungen. Math. Ann. 1920; 81(2): 119-186.

[13] Tasmambetov ZN. Construction of Normal and Normally-Regular Solutions of Special Systems of Partial Equations of Second Order [in Russian]. Aktobe: IP Zhanadilov S.T. 2015.

[14] Issenova A.A, Tasmambetov Z.N, Talipova M.Z. Construction of solutions hypergeometric system of Horn type in the form of Laguerre polynomials. //Lobachevskii Journal of Mathematics 2022; 43(11): 3167-3173. https://doi.org/10.1134/S1995080222140153

[15] Tasmambetov, Z.N., Talipova, M.Z. Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system // AIP Conference Proceedings, 2017, 1880, https://doi.org/10.1063/1.5000629

[16] Latysheva K.Ja. O normal'nyh rjadah kak reshenijah linejnyh differencial'nyh uravnenij ljubogo ranga //"Naukovi zapiski KDU", Mat. sbornik. - Kiiv. 1952. №6. - S. 25 – 46.

[17] Latysheva K.Ja., Tereshhenko N.I., Orel G.S. Normal'no-reguljarnye reshenija i ih prilozhenija. – Kiev: Vishh. shkola, 1974. - 136 s.

[18] Wilzynski E.J. On a Certain Completery Jntegrable System of Linear Partial Differential Eguations // Amer. Journal of Math. 36. №3. 1904. - R.180 – 194.