References

1 Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators // Pure and Applied Mathematics 129, Boston, MA, Academic Press, INC. - 1988. - 469 p.

2 O'Neil R. Convolution operators and $L(p,q)$ spaces // Duke Math. J. - 1963. -V. 30. - P. 129-142

3 Nursultanov E., Tikhonov S. Convolution inequalities in Lorentz spaces // J. Fourier Anal. Appl. – 2011. – V. 17. – P. 486-505.

4 Blozinski A.P. On a convolution theorem for $L(p,q)$ spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 255-265.

5 Tleukhanova N.T., Sadykova K.K. O'Neil-type inequalities for convolutions in anisotropic Lorentz spaces // Eurasian Mathematical Journal, - 2019.- V. 10. № 3. - P. 68-83.

6 Nursultanov E., Tikhonov S., Tleukhanova N. Norm inequalities for convolution operators // C. R. Acad. Sci. Paris. - 2009. - V. I. № 347. - P. 1385-1388.

7 Nursultanov E., Tikhonov S., Tleukhanova N. Norm convolution inequalities in Lebesgue spaces // Rev. Mat. Iberoam. - 2018. - V. 34. № 2. - P. 811-838.

8 Heil C. An introduction to weighted Wiener amalgams. In Wavelets and their applications // Allied Publishers, New Delphi. - 2003. - P. 183-216.

9 Nursultanov E.D., Tleukhanova N.T. Multipliers of Multiple Fourier Series// Proc. Steklov Inst. Math. - 1999. - T .227. – P. 231-236.

10 Kerman R., Sawyer E. Convolution algebras with weighted rearrangement-invariant norm // Studia Math. - 1994. - V. 108. № 2. – P. 103-126.

11 Nursultanov E., Tikhonov S. Weighted norm inequalities for convolution and Riesz potential // Potential Analysis. - 2015. - № 42. № 2. - P. 435-456.

12 Batyrov B. E., Burenkov V. I. Estimates for convolutions in Nikol'skii-Besov spaces // Dokl. Akad. Nauk. - 1993. - V. 330. № 1. – P. 9-11.

13 Bui H. Weighted Young's inequality and convolution theorems on weighted Besov spaces // Math. Nachr. - 1994. - V. 170. - P. 25-37.

14 Sadykova K.K., Tleukhanova N.T. Estimates of the norm of the convolution operator in anisotropic Besov spaces with the dominated mixed derivative // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, - 2019. - V. 95. № 3. - P. 51-59.

15 Bekmaganbetov K., Nursultanov E. Interpolation of Besov $B_{p\tau}^{\sigma q}$ and Lizorkin-Triebel $F_{p\tau}^{\sigma q}$ spaces // Analysis Mathematica, - 2009. - V. 35. - P. 169-188.

МРНТИ 27.31.44
УДК 517.929.7

Б. Шәрiп[1], А.Т. Есимова [1]

[1]Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университетi, Алматы қ., Қазақстан

СЫЗЫҚТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН БАСТАПҚЫ СЕКІРІСТІ ШЕТТІК ЕСЕП ШЕШІМІН БАҒАЛАУ

Аңдатпа

Жұмыста үшінші ретті тұрақты коэффициентті сингулярлы ұйытқыған сызықты дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп қарастырылған. Бұл есепте кіші параметр дифференциалдық теңдеу мен t = 0 нүктесіндегі шекаралық шарт құрамындағы жоғарғы туындылардың алдына қойылған. Біртекті сингулярлы ұйытқыған дифференциалдық теңдеудің іргелі шешімдер жүйесі оған сәйкес сипаттаушы теңдеудің түбірлері үшін алынған асимптотикалық жіктеулер негізінде құрылды. Осы жүйе Коши функциясын, арнайы шекаралық функцияларды және Грин функциясын құруда қолданылады. Аталған функциялардың көмегімен сингулярлы ұйытқыған шеттік есеп шешімінің аналитикалық формуласы алынды және t = 0 нүктесінде бұл шешімнің нөлінші ретті бастапқы секіріске ие болатыны анықталды. Қарастырылған сингулярлы ұйытқыған шеттік есеп шешімінің осы есептен $\varepsilon = 0$ жағдайында алынған сәйкес ұйытқымаған есеп шешіміне ұмтылатыны дәлелденді.

Түйін сөздер: ұйытқу, сингулярлық, асимптотикалық баға, бастапқы секіріс, Коши есебі, шекаралық есеп.

Аннотация

Б. Шарип[1], А.Т. Есимова[1]
[1]Казахский национальный женский педагогический университет, г.Алматы, Казахстан

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМ СКАЧКОМ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе рассматривается краевая задача для сингулярно возмущенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами третьего порядка. В этой задаче малый параметр указывается перед старшими производными, входящими в состав дифференциального уравнения и краевого условия в точке t = 0. Фундаментальная система решений однородного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения построена на основе асимтотических представлений, полученных для корней соответствующего характеристического уравнения. Эта система использована при построеним функции Коши, специальных функций краевых задач, а также функции Грина. С помощью названных функций получено аналитическая формула решения сингулярно возмущеннной краевой задачи и выяснимес, что это решение обладает явлением начального скачка нулевого порядка в точке t = 0. Доказано, что решение рассматриваемой сингулярно возмущенной краевой задаче стремится к соответствующей невозмущенной задачи, плученной из неё при $\varepsilon = 0$.

Ключевые слова: возмущение, сингулярность, асимптотическая оценка, начальный скачок, задача Коши, краевая задача.

Abstract

ESTIMATION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM SOLUTION WITH INITIAL JUMP FOR LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Sharip B.[1], Yessimova A.T.[1]
[1]Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan

The paper considers a boundary value problem for a singularly perturbed linear differential equation with constant third-order coefficients. In this problem, a small parameter is indicated before the highest derivatives that are part of the differential equation and the boundary condition at t = 0.The fundamental system of solutions of a homogeneous singularly perturbed differential equation is constructed on the basis of asymptotic representations obtained for the roots of the corresponding characteristic equation. This system was used to construct the Cauchy function, special functions of boundary value problems, and also the Green function. With the help of these functions, an analytical formula is obtained for solving a singularly perturbed boundary value problem and it turns out that this solution has an initial zero-order jump at t = 0. It is proved that the solution to the considered singularly perturbed boundary value problem tends to the corresponding unperturbed problem obtained from it under $\varepsilon = 0$.

Keywords: disturbance, singularity, asymptotic estimate, the initial jump, Cauchy problem, boundary value problem.

Келесі сингулярлы ұйытқыған үшінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеуді қарастырайық:

$$\varepsilon^2\, y''' + \varepsilon\, \mathrm{A}\, y'' + \mathrm{B}\, y' + C\, y = F\ , \tag{1}$$

мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, A, B, C, F – белгілі тұрақтылар.

Бұл теңдеуге мынадай шеттік шарттар қойылсын:

$$\begin{gathered} a_1\, y(0,\varepsilon) + \varepsilon\, a_2\, y'(0,\varepsilon) + \varepsilon^2\, a_3\, y''(0,\varepsilon) = b_1\ , \\ y'(0,\varepsilon) = b_2\ , \qquad \int_0^1 y(t,\varepsilon)\, d\,t = b_3\ , \end{gathered} \tag{2}$$

мұндағы $a_i\, , b_i\ (i = \overline{1,3}) -$ тұрақтылар.

(1), (2) сингулярлы ұйытқыған шеттік есептен $\varepsilon = 0$ жағдайында

$$\mathrm{B}\, \bar{y}' + C\, \bar{y} = F\ , \qquad \int_0^1 \bar{y}(t)\, d\,t = b_3 \tag{3}$$

ұйытқымаған есепті аламыз.

$$\varepsilon^2\, y''' + \varepsilon\, \mathrm{A}\, y'' + \mathrm{B}\, y' + C\, y = 0 \tag{4}$$

біртекті сингулярлы ұйытқыған дифференциалдық теңдеуге сәйкес

$$\varepsilon^2\, \lambda^3 + \varepsilon\, \mathrm{A}\, \lambda^2 + \mathrm{B}\, \lambda + C = 0$$

сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің асимптотикалық жуықтаулары

$$\lambda_i(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}(\bar{\mu}_i+O(\varepsilon)),\, i=1{,}2 \quad , \quad \lambda_3(\varepsilon)=\bar{\lambda}+O(\varepsilon)$$

түрінде алынды, мұндағы $\bar{\mu}_i$ және $\bar{\lambda}$ – сәйкес

$$\bar{\mu}_i^2+\mathrm{A}\bar{\mu}_i+\mathrm{B}=0 \ , \ \mathrm{B}\bar{\lambda}+C=0$$

теңдеулерінің шешімдері.

Келесі шарттардың орындалуын талап етейік:

I. $\mathrm{A}>0$, $\mathrm{B}\neq 0$, $0\le t\le 1$;

II. $\bar{\mu}_1\neq\bar{\mu}_2$, $\bar{\mu}_i<0$, $i=1{,}2$;

III. $a_1\,\bar{y}(0)\neq b_1$.

(4) біртекті дифференциалдық теңдеудің келесі іргелі шешімдер жүйесі [1] жұмыстағы жолмен құрылды:

$$\begin{aligned} y_i^{(j)}(t,\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^j}(\bar{\mu}_i^j\, z_{io}(t)+O(\varepsilon)), \\ y_3^{(j)}(t,\varepsilon) &= e^{\bar{\lambda}\,t}(\bar{\lambda}^j+O(\varepsilon)), \end{aligned} \tag{5}$$

Мұндағы

$$z_{io}(t)=e^{-\frac{C}{3\bar{\mu}_i^2+2\mathrm{A}\bar{\mu}_i+\mathrm{B}}}\ , \ i=\overline{1{,}2}\ , \ j=\overline{0{,}2}\ .$$

Осы іргелі шешімдер жүйесінің көмегімен Вронский анықтауышы құрылып, оның асимптотикалық формуласы

$$W(t,\varepsilon)=\frac{\mathrm{B}}{\varepsilon^3}e^{\left(\frac{\bar{\mu}_1}{\varepsilon}+\frac{\bar{\mu}_2}{\varepsilon}+\bar{\lambda}\right)t}(z_{10}(t)\,z_{20}(t)(\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1)+\mathrm{O}(\varepsilon))$$

түрінде алынды және $W(t,\varepsilon)\neq 0$ екені анықталды.

Келесі есепті қарастырайық [2]:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2\,\mathrm{K}_\varepsilon'''(t,s)+\varepsilon\,\mathrm{A}\mathrm{K}_\varepsilon''(t,s)+\mathrm{B}\mathrm{K}_\varepsilon'(t,s)+C\mathrm{K}_\varepsilon(t,s)=0, 0\le s\le t\le 1, \\ &\mathrm{K}_\varepsilon(s,s)=0,\ \mathrm{K}_\varepsilon'(s,s)=0,\ \mathrm{K}_\varepsilon''(s,s)=1. \end{aligned}$$

Бұл Коши есебінің шешімі Коши функциясы деп аталады және $\mathrm{K}_\varepsilon(t,s)=\dfrac{\mathrm{K}_\varepsilon^*(t,s)}{W(s,\varepsilon)}$ формуласымен анықталады, мұндағы $\mathrm{K}_\varepsilon^*(t,\ s)$ анықтауышы $W(s,\varepsilon)$ вронскианның 3-ші жолын (5) іргелі шешімдер жүйесіне алмастырудан шығады.

$\mathrm{K}_\varepsilon(t,\ s)$ Коши функциясы үшін

$$\mathrm{K}_\varepsilon(t,s)=\frac{\varepsilon^2}{(\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1)\mathrm{B}}\left[(\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1)e^{\bar{\lambda}(t-s)}+(\bar{\mu}_1\frac{z_{20}(t)}{z_{20}(s)}e^{\frac{\bar{\mu}_2}{\varepsilon}(t-s)}-\bar{\mu}_2\frac{z_{10}(t)}{z_{20}(s)}e^{\frac{\bar{\mu}_1}{\varepsilon}(t-s)}+\mathrm{O}(\varepsilon)\right]$$

$$\mathrm{K}_\varepsilon'(t,s)=\frac{\varepsilon}{(\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1)\mathrm{B}}\left[\varepsilon\bar{\lambda}(\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1)e^{\bar{\lambda}(t-s)}+\mathrm{B}(\frac{z_{20}(t)}{z_{20}(s)}e^{\frac{\bar{\mu}_2}{\varepsilon}(t-s)}-\frac{z_{10}(t)}{z_{20}(s)}e^{\frac{\bar{\mu}_1}{\varepsilon}(t-s)})+O\left(\varepsilon^2+\varepsilon(e^{\frac{\bar{\mu}_1}{\varepsilon}(t-s)}+e^{\frac{\bar{\mu}_2}{\varepsilon}(t-s)})\right)\right],$$

$$\mathrm{K}_\varepsilon''(t,s)=\frac{1}{(\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1)\mathrm{B}}\left[\varepsilon^2\bar{\lambda}^2(\bar{\mu}_2-\bar{\mu}_1)e^{\bar{\lambda}(t-s)}+\mathrm{B}(\bar{\mu}_2\frac{z_{20}(t)}{z_{20}(s)}e^{\frac{\bar{\mu}_2}{\varepsilon}(t-s)}-\bar{\mu}_1\frac{z_{10}(t)}{z_{10}(s)}e^{\frac{\bar{\mu}_1}{\varepsilon}(t-s)})+O\left(\varepsilon^3+\varepsilon(e^{\frac{\bar{\mu}_1}{\varepsilon}(t-s)}+e^{\frac{\bar{\mu}_2}{\varepsilon}(t-s)})\right)\right]$$

асимптотикалық формулалары мен олардан туындайтын

$$\left| K_\varepsilon(t,s) \right| \le C\varepsilon^2 \,, \quad \left| K'_\varepsilon(t,s) \right| \le C\varepsilon(\varepsilon + e^{-\gamma\frac{t-s}{\varepsilon}}) \,, \quad \left| K''_\varepsilon(t,s) \right| \le C(\varepsilon^2 + e^{-\gamma\frac{t-s}{\varepsilon}})$$

$(C = const > 0 \;,\; \gamma = const > 0)$

асимптотикалық бағалар алынды.

Іргелі шешімдер жүйесі көмегімен келесі анықтауыш құрылды:

$$\Delta_\varepsilon(0,1) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ y_1'(0,\varepsilon) & y_2'(0,\varepsilon) & y_3'(0,\varepsilon) \\ \int_0^1 y_1(t,\varepsilon)dt & \int_0^1 y_2(t,\varepsilon)dt & \int_0^1 y_3(t,\varepsilon)dt \end{vmatrix} \ne 0 \,,$$

$$\alpha_{1i} = a_1 y_i(0,\varepsilon) + \varepsilon a_1 y_i'(0,\varepsilon) + \varepsilon^2 a_2 y_i''(0,\varepsilon), \quad i = \overline{1,3} \,.$$

Бұл анықтауыштың асимптотикалық кескіні

$$\Delta_\varepsilon(0,1) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{e^{\bar\lambda}-1}{\bar\lambda}(\bar\mu_2 - \bar\mu_1)(a_0 + a_1\bar\mu_1 + a_2\bar\mu_1^2)(a_0 + a_1\bar\mu_2 + a_2\bar\mu_2^2) + O(\varepsilon)\right]$$

түрінде табылды.

$\Delta_\varepsilon(0,1)$ анықтауышындағы $i-$ші жолды (5) іргелі шешімдер жүйесіне алмастырып, $\Delta_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$ анықтауыштарын құрып,

$$\Phi_i(t,\varepsilon) = \frac{\Delta_i(t,\varepsilon)}{\Delta_\varepsilon(0,1)} \,, \quad i = \overline{1,3}$$

шекаралық функцияларды аламыз. Бұл функциялар төмендегі шеттік есептердің шешімі болып табылады:

$$\varepsilon^2\Phi_i'''(t,\varepsilon) + \varepsilon A\Phi_i''(t,\varepsilon) + B\Phi_i'(t,\varepsilon) + C\Phi_i(t,\varepsilon) = 0 \,, \quad i = \overline{1,3} \,,$$

$$a_1\Phi_i(0,\varepsilon) + \varepsilon a_2\Phi_i'(0,\varepsilon) + \varepsilon^2 a_3\Phi_i''(0,\varepsilon) = \delta_{1i} \,,$$

$$\Phi_i'(0,\varepsilon) = \delta_{2i} \,, \quad \int_0^1 \Phi_i(t,\varepsilon)dt = \delta_{3i} \,, \quad i = \overline{1,3} \,,$$

мұндағы $\delta_{\kappa i}\;(\kappa = \overline{1,3})$ – Кронекер символы.

$\Phi_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$ шекаралық функциялардың келесі асимптотикалық формулалары алынды:

$$\Phi_1(t,\varepsilon) = \frac{1}{\bar\mu_2 - \bar\mu_1}\left[\varepsilon\frac{\bar\lambda Q_1}{e^{\bar\lambda}-1} + \bar\mu_2 z_1(t,\bar\mu_1,\varepsilon) - \bar\mu_1 z_2(t,\bar\mu_2,\varepsilon) + O(\varepsilon^2 + \varepsilon E)\right] \,,$$

$$\Phi_1'(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon(\bar\mu_2 - \bar\mu_1)}\left[\varepsilon^2\frac{\bar\lambda^2 Q_1}{e^{\bar\lambda}-1}e^{\bar\lambda t} + B[z_1(t,\bar\mu_1,\varepsilon) - z_2(t,\bar\mu_2,\varepsilon)] + O(\varepsilon^3 + \varepsilon E)\right] \,,$$

$$\Phi_1''(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2(\bar\mu_2 - \bar\mu_1)}\left[\varepsilon^3\frac{\bar\lambda^3 Q_1}{e^{\bar\lambda}-1}e^{\bar\lambda t} + B[\bar\mu_1 z_1(t,\bar\mu_1,\varepsilon) - \bar\mu_2 z_2(t,\bar\mu_2,\varepsilon)] + O(\varepsilon^4 + \varepsilon E)\right] \,,$$

$$\Phi_2(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\bar\mu_2 - \bar\mu_1}\left[\varepsilon\frac{\bar\lambda Q_2}{e^{\bar\lambda}-1}e^{\bar\lambda t} + z_2(t,\bar\mu_2,\varepsilon) - z_1(t,\bar\mu_1,\varepsilon) + O(\varepsilon^2)\right] \,,$$

$$\Phi_2'(t,\varepsilon) = \frac{1}{\bar\mu_2 - \bar\mu_1}\left[\varepsilon^2\frac{\bar\lambda^2 Q_2}{e^{\bar\lambda}-1}e^{\bar\lambda t} + \bar\mu_2 z_2(t,\bar\mu_2,\varepsilon) - \bar\mu_1 z_1(t,\bar\mu_1,\varepsilon) + O(\varepsilon^3 + \varepsilon E)\right] \,,$$

$$\Phi_2''(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon\left(\overline{\mu}_2-\overline{\mu}_1\right)}\left[\varepsilon^3\frac{\overline{\lambda}^3 Q_2}{e^{\overline{\lambda}}-1}e^{\overline{\lambda}t}+\overline{\mu}_2^2 z_2\left(t,\overline{\mu}_2,\varepsilon\right)-\overline{\mu}_1^2 z_1\left(t,\overline{\mu}_1,\varepsilon\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^4+\varepsilon\mathrm{E}\right)\right],$$

$$\Phi_3(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\lambda}}{\left(e^{\overline{\lambda}}-1\right)\left(\overline{\mu}_2-\overline{\mu}_1\right)}\left[\left(\overline{\mu}_2-\overline{\mu}_1\right)e^{\overline{\lambda}t}+a_0\left(\overline{\mu}_1 z_2\left(t,\overline{\mu}_2,\varepsilon\right)-\overline{\mu}_2 z_1\left(t,\overline{\mu}_1,\varepsilon\right)\right)+\mathrm{O}(\varepsilon)\right],$$

$$\Phi_3'(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\lambda}}{\varepsilon\left(e^{\overline{\lambda}}-1\right)\left(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1}\right)}\left[\varepsilon\overline{\lambda}\left(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1}\right)e^{\overline{\lambda}t}+\mathrm{B}a_0\left(z_2(t,\overline{\mu_2},\varepsilon)-z_1(t,\overline{\mu_1},\varepsilon)\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^2+\mathrm{E}\right)\right],$$

$$\Phi_3''(t,\varepsilon)=\frac{\overline{\lambda}}{\varepsilon^2\left(e^{\overline{\lambda}}-1\right)\left(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1}\right)}\left[\varepsilon^2\overline{\lambda}^2\left(\overline{\mu_2}-\overline{\mu_1}\right)e^{\overline{\lambda}t}+\mathrm{B}a_0\left(\overline{\mu_2}z_2(t,\overline{\mu_2},\varepsilon)-\overline{\mu_1}z_1(t,\overline{\mu_1},\varepsilon)\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^3+\mathrm{E}\right)\right],$$

мұндағы

$$z_i\left(t,\overline{\mu_i},\varepsilon\right)=\frac{z_{i0}(t)}{a_0+a_1\overline{\mu_i}+a_2\overline{\mu_i^2}}\,e^{\frac{\overline{\mu_i}}{\varepsilon}t},\quad i=1,2,$$

$$Q_1=\frac{\overline{\mu_2}}{\overline{\mu_1}\left(a_0+a_1\overline{\mu_1}+a_2\overline{\mu_1}^2\right)}-\frac{\overline{\mu_1}}{\overline{\mu_2}\left(a_0+a_1\overline{\mu_2}+a_2\overline{\mu_2}^2\right)},$$

$$Q_2=\frac{1}{\overline{\mu_2}\left(a_0+a_1\overline{\mu_1}+a_2\overline{\mu_1}^2\right)}-\frac{1}{\overline{\mu_1}\left(a_0+a_1\overline{\mu_2}+a_2\overline{\mu_2}^2\right)},$$

$$\mathrm{E}=e^{\frac{\overline{\mu_1}}{\varepsilon}t}+e^{\frac{\overline{\mu_2}}{\varepsilon}t}.$$

I және II шарттар орындалған жағдайда (1), (2) есепке сәйкес біртекті сингулярлы ұйытқыған шеттік есеп үшін жалғыз $G_\varepsilon(t,s)$ Грин функциясы табылып, оның

$$G_\varepsilon(t,s)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\varepsilon^2}\Phi_3(t,\varepsilon)\displaystyle\int_s^1\mathrm{K}_\varepsilon(t,s)\,dt, & 0\le t\le s\\ -\dfrac{1}{\varepsilon^2}\Phi_3(t,\varepsilon)\displaystyle\int_s^1\mathrm{K}_\varepsilon(t,s)\,dt+\dfrac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{K}_\varepsilon(t,s), & s\le t\le 1\end{cases}$$

формуласымен өрнектелетіні және

$$\left|G_\varepsilon(t,s)\right|\le C,\quad t\le s,\quad s\le t;$$

$$\left|G_\varepsilon'(t,s)\right|\le C\left(1+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}\right),\quad t\le s,$$

$$\left|G_\varepsilon'(t,s)\right|\le C\left(1+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{t-s}{\varepsilon}}\right),\quad s\le t;$$

$$\left|G_\varepsilon''(t,s)\right|\le C\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}\right),\quad t\le s,$$

$$\left|G_\varepsilon''(t,s)\right|\le C\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\gamma\frac{t-s}{\varepsilon}}\right),\quad s\le t$$ түрінде бағаланатыны анықталды.

Теорема 1. Егер I , II шарттар орындалса, онда (1), (2) сингулярлы ұйытқыған шеттік есептің $0\le t\le 1$ аралығында жалғыз шешімі бар және оның аналитикалық формуласы [3, 4]

$$y(t,\varepsilon)=b_1\Phi_1(t,\varepsilon)+b_2\Phi_2(t,\varepsilon)+b_3\Phi_3(t,\varepsilon)+F\int_0^1 G_\varepsilon(t,s)\,ds$$

болып табылады. Бұл шешім $\varepsilon\to 0$ үшін келесі түрде бағаланады:

$$|y(t,\varepsilon)| \le C(d_2 e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}} + d_1) \quad ,$$

$$|y'(t,\varepsilon)| \le C(\frac{d_2+d_1}{\varepsilon} e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}} + d_1) \quad ,$$

$$|y''(t,\varepsilon)| \le C(\frac{d_2+d_1}{\varepsilon^2} e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}} + d_1) \quad ,$$

мұндағы $d_1 = |b_3| + |F|,\, d_2 = |b_1| + \varepsilon|b_2|, C > 0$ және $\gamma > 0$ t мен $\varepsilon -$нан тәуелсіз тұрақтылар .

Бұл теоремадан (1), (2) шеттік есептің $y(t,\varepsilon)$ шешімі мен оның бірінші және екінші туындыларының t = 0 нүктесінде

$$y(0,\varepsilon) = O(1),\ y'(0,\varepsilon) = O(\frac{1}{\varepsilon})\ ,\ y''(0,\varepsilon) = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$$

түрінде өрнектелетіні шығады. Демек, (1) , (2) сингулярлы ұйытқыған шеттік есеп шешімі $\varepsilon \to 0$ кезінде t = 0 нүктесінде нөлінші ретті бастапқы секіріске ие болады.

Теорема 2. Егер I, II, III шарттар орындалса, онда $0 \le t \le 1$ аралығында (1), (2) сингулярлы ұйытқыған шеттік есеп пен (3) ұйытқымаған есеп шешімдерінің $y(t,\varepsilon) - \bar{y}(t)$ айырмасы

$$|y(t,\varepsilon) - \bar{y}(t)| \le C[\, d_3 e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}} + \varepsilon] \quad ,$$

$$|y'(t,\varepsilon) - \bar{y}'(t)| \le C[\, \frac{d_3}{\varepsilon} e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}} + \varepsilon] \quad ,$$

$$|y''(t,\varepsilon) - \bar{y}''(t)| \le C[\, \frac{d_3}{\varepsilon^2} e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}} + \varepsilon]$$

түрінде бағаланады, мұндағы $d_3 = |b_1 - (a_1\bar{y}(0) + \varepsilon a_2 \bar{y}'(0) + \varepsilon^2 a_3 \bar{y}''(0))| + \varepsilon|b_2 - \bar{y}'(0)|$, ал $C > 0$, $\gamma > 0 -$ t және ε –нан тәуелсіз тұрақтылар.

Осы теоремадан

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t)\ ,\ 0 \le t \le 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y'(t,\varepsilon) = \bar{y}'(t)\ ,\ 0 < t_0 \le t \le 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y''(t,\varepsilon) = \bar{y}''(t)\ ,\ 0 < t_0 \le t \le 1$$

шектік теңдіктер алынды, мұндағы $t_0 -$ бекітілген мейлінше аз сан.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 *Есимова А.Т. Асимптотические решения краевых задач с начальными скачками для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений: Дисс. ... к.ф.-м.н.- Алматы, 1996.*

2 *Касымов К.А. Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками, Алматы. Санат, 1997.*

3 *Есимова А.Т., Касымов А. Об оценках решений краевой задачи с начальным скачком первого порядка для линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Изв. НАН РК, Сер. физ.-мат. Алматы, 1995. №1. С. 16-21.*

4 *Әбдіманапова М.Ә., Есимова А.Т. Сингулярлы ұйытқыған дифференциалдық теңдеудің шеттік есебінің асимптотикалық бағалары // Абай атын. ҚазҰПУ хабаршысы, физ.-мат. сер., Алматы, 2017, №2(58) , 8-12 б.*