МРНТИ 27.29.17, 27.41.19
УДК 517.95

https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.10

Н.Б. Искакова[1], Ж. Кубанычбеккызы[1]

[1]Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы, Казахстан

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

Аннотация

На ограниченном отрезке рассматривается линейная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр. При фиксированном значении параметра решается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Используя матрицу дифференциальной части и предполагая однозначную разрешимость задачи Коши, исходная краевая задача сводится к системе алгебраических уравнений относительно неизвестного параметра. Существование решения этой системы обеспечивает существование решения исследуемой краевой задачи.

В статье предложен алгоритм нахождения решения исходной задачи, основанный на построении и решений системы линейных алгебраических уравнений. Основными вспомогательными задачами алгоритма являются: задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Предлагаемая в статье численная реализация алгоритма использует метод Рунге-Кутта четвертого порядка для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Ключевые слова: краевая задача, параметр, разрешимость, дифференциальные уравнения, приближенное решение.

Аңдатпа

Н.Б. Искакова[1], Ж. Кубанычбеккызы[2]

[1] Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ПАРАМЕТРІ БАР ЖАЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІ ҮШІН СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ БІР АЛГОРИТМІ ТУРАЛЫ

Шектеулі кесіндіде параметрі бар жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық шеттік есеп қарастырылады. Параметрдің белгіленген мәні кезінде жай дифференциалдық теңдеуге арналған Коши есебі шешіледі. Дифференциальдық бөліктің фундаменталдық матрицасын пайдалана отырып әрі Коши есебінің бірмәнді шешімділігін ескере отырып, бастапқы шеттік есеп белгісіз параметрге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне келтіріледі. Осы жүйенің шешімінің бар болуы зерттелінді есептің шешімінің бар болуын шешілімділігін қамтамасыз етеді. Бастапқы есептің шешімін табудың сызықты алгебралық теңдеулер жүйесіне келтіріледі. Бастапқы есептің шешімін табудың сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін құруға және оны шешуге негізделген алгоритмі ұсынылды.

Алгоритмнің негізгі көмекші есептері мыналар болып табылады: жәй дифференциальдық теңдеулер үшін Коши есебі. Мақалада ұсынылған алгоритмді сандық жүзеге асыру төртінші ретті Рунге-Куттаның әдісін жәй дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебін шешуге пайдаланады.

Түйін сөздер: шеттік есеп, параметр, шешілімділігі, дифференциалдық теңдеулер, жуықталған шешім.

Abstract

ON THE ALGORITHM FOR SOLVING OF A LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH PARAMETER

Iskakova N. B. [1], Kubanychbekkyzy Zh. [1]

[1]Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan

A linear boundary value problem for a system of ordinary differential equations containing a parameter is considered on a bounded segment. For a fixed parameter value, the Cauchy problem for an ordinary differential equation is solved. Using the fundamental matrix of differential part and assuming uniqueness solvability of the Cauchy problem an origin boundary value problem is reduced to the system of linear algebraic equation with respect to unknown parameter. The existence of a solution to this system ensures the existence of a solution to the boundary value problem under study. The algorithm of finding of solution for initial problem is offered based on a construction and solving of the linear algebraic equation. The basic auxiliary problem of algorithm is: the Cauchy problem for ordinary differential equations. The numerical implementation of algorithm offered in the article uses the method of Runge-Kutta of fourth order to solve the Cauchy problem for ordinary differential equations.

Keywords: boundary value problem, a parameter, a solvability, differential equation, approximate solution.

Вопросами существования и единственности решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметры, занимались многие авторы [1-6].

В данном сообщении на отрезке $[0,T]$ рассматривается линейная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + K(t)\mu + f(t), \quad y,\mu \in R^2,\ t \in [0,T], \tag{1}$$

$$y(0) = y^0,\ y^0 \in R^2, \tag{2}$$

$$y(T) = y^1,\ y^1 \in R^2. \tag{3}$$

Здесь $A(t) = (a_{ij}(t)),\ K(t) = (k_{ij}(t)),\ i, j = 1,2,$ - квадратные матрицы второго порядка с непрерывными на $[0,T]$ элементами $a_{ij}(t),\ k_{ij}(t)$ соответственно, $f(t) = (f_i(t)),\ i = 1,2,$ вектор-функция с непрерывными на $[0,T]$ координатами $f_i(t),$ $y_0, y_1 \in R^2$ - заданные вектора.

Через $C([0,T], R^2)$ обозначим пространство непрерывных функций $y:[0,T] \to R^2$ с нормой $\|y\|_1 = \max\limits_{t\in[0;T]} \|y(t)\|$.

Решением задачи (1) – (3) является пара $(y^*(t), \mu^*)$, где непрерывная на $[0,T]$ и непрерывно дифференцируемая на $(0,T)$ функция $y^*(t)$, удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению с параметром (1) при $\mu = \mu^*$ и условиям (2), (3).

Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей однородной системы линейных дифференциальных уравнений (1). Тогда общее решение линейной системы дифференциальных уравнений с параметром (1) имеет вид

$$y(t) = \Phi(t)\cdot C_1 + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(\tau)[K(\tau)\mu + f(\tau)]d\tau, \tag{4}$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Полагая $y = y^0$ при $t = 0$, из (4) получим

$$y(t) = \Phi(t)\cdot \Phi^{-1}(0)\cdot y^0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(\tau)[K(\tau)\mu + f(\tau)]d\tau. \tag{5}$$

Подставляя правую часть (5) в краевое условие (3) относительно параметра μ, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$D\cdot\mu = \tilde{d},\ \tilde{d} \in R^2, \tag{6}$$

где

$$D = \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(\tau)K(\tau)d\tau,$$

$$\tilde{d} = y^1 - \Phi(T)\cdot\Phi^{-1}(0)y^0 - \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Таким образом, при знании фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ разрешимость краевой задачи (1)-(3) сводится к разрешимости системы уравнений (6).

Если матрица D имеет обратную, то, находя μ из (6), и подставляя найденный вектор в правую часть (5), получим решение $(y^*(t), \mu^*)$ линейной краевой задачи (1)-(3) в виде

$$\begin{gathered} y^*(t) = \Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(0)\cdot y^0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(\tau)[K(\tau)\cdot\mu^* + f(\tau)]d\tau,\ t\in[0,T], \\ \mu^* = D^{-1}\cdot\tilde{d}. \end{gathered} \tag{7}$$

Используя результаты линейной алгебры, устанавливается справедливость следующего утверждения.

Теорема. Задача (1)-(3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда обратима матрица $D = \Phi(T)\int\limits_0^T \Phi^{-1}(\tau)K(\tau)d\tau.$

Итак, если известна фундаментальная матрица $\Phi(t)$, то существование решения линейной краевой задачи с параметром (1)-(3) эквивалентно существованию решения системы линейных алгебраических уравнений (6). Таким образом, однозначная разрешимость задачи (1)-(3) эквивалентна обратимости матрицы D.

Пример 1. Исследуем на разрешимость краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр (1)-(3), где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ K(t) = \begin{pmatrix} e^t & 3t \\ 2t^2 & 5 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 8t - e^t + 1 \\ 13 - 3t - 2t^2 \end{pmatrix}, y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ y(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ T = 1.$$

Так как матрица $A(t)$ постоянна, то фундаментальная матрица дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y\ ,\ t \in [0,1],$$

имеет вид $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -3e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$. Тогда решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^t & 3t \\ 2t^2 & 5 \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} 8t - e^t + 1 \\ 13 - 3t - 2t^2 \end{pmatrix},\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

находим в виде

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -3e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 3e^{-2\tau} & e^{-2\tau} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} e^\tau & 3\tau \\ 2\tau^2 & 5 \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} 9\tau - e^\tau - 1 \\ 10 - 2\tau^2 \end{pmatrix} \right] d\tau \right\}.$$

Определив значение $y(t)$ при $t = 1$ и подставив его в краевое условие (3), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного параметра $\mu = (\mu_1, \mu_2)' \in R^2$:

$$e(e-1)\cdot\mu_1 + 3(e-2)\cdot\mu_2 = e^2 - 10e + 18,$$

$$2(e^3 + 7e^2 - 9e - 5)\cdot\mu_1 - (19e^2 + 36e - 109)\cdot\mu_2 = 6e^3 - 67e^2 - 114e - 115.$$

Из обратимости основной матрицы полученной системы линейных уравнений следует, что рассматриваемая краевая задача с параметром однозначно разрешима. И ее решение, согласно (7) имеет вид

$$y^*(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Однако для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменной матрицей фундаментальную матрицу удается построить в редких случаях. В данной работе предлагается метод нахождения численного решения исследуемой линейной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром (1)-(3).

Для этого введем новую неизвестную функцию

$$x(t) = y(t) - y^0,\ t \in [0,T].$$

При этом получим следующую краевую задачу с параметром

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + A(t)y^0 + K(t)\mu + f(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$x(0) = 0, \tag{9}$$

$$x(T) = y^1 - y^0. \tag{10}$$

Задачи (1)-(3) и (8)-(10) эквивалентны. При предположении, что матрица X(t) – фундаментальная матрица обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [0,T],$$

решение задачи (8)-(10) запишется в виде

$$x^*(t) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)\left[A(\tau)\cdot y^0 + K(\tau)\cdot \mu^* + f(\tau)\right]d\tau, \tag{11}$$

где

$$\mu^* = -[Q(T)]^{-1}\cdot F(T). \tag{12}$$

Здесь

$$Q(T) = X(T)\int_0^T X^{-1}(t)\cdot K(t)dt,\ F(T) = -y^1 + \left(I + X(T)\int_0^T X^{-1}(t)A(t)dt\right)\cdot y^0 + X(T)\int_0^T X^{-1}(t)f(t)dt.$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (8)–(10) является существование решения системы (12), а критерием ее однозначной разрешимости - обратимость матрицы $Q(T)$.

Алгоритм нахождения численного решения задачи (8)–(10).

I. Взяв число разбиений интервала $[0,T)$ равным M с шагом h и решая методом Рунге-Кутта 4-го порядка задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + A(t),\ x(0) = 0,\ t \in [0,T], \tag{13}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + K(t),\ x(0) = 0,\ t \in [0,T], \tag{14}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),\ x(0) = 0,\ t \in [0,T], \tag{15}$$

найдем значения матриц $\widetilde{A}_i^h,\ \widetilde{K}_i^h$ и векторов $\widetilde{f}_i^h,\ i = \overline{0,M}$.

II. Составим приближенную систему алгебраических линейных уравнений относительно праметра μ.:

$$Q^h(T)\cdot\mu = -F^h(T),\ \ \mu \in R^2. \tag{16}$$

Предполагая обратимость матрицы $Q^h(T)$ и решая систему (16), найдем параметр μ^h.

III. Методом Рунге-Кутта решая задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F^{*,h}(t),\ x(0) = 0,\ t \in [0,T], \tag{17}$$

где $F^{*,h}(t) = A(t)y_0 + K(t)\mu^* + f(t)$, находим численные значения решения задачи (8)-(10) в точках разбиения интервала $(0,T)$.

Пример 2. На отрезке [0,1] рассмотрим краевую задачу (8)-(10), где

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ K(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} -t^4 + t - 1 \\ -t - 1 \end{pmatrix},\ y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением данной задачи является пара $(x^*(t),\mu^*)$, где $x^*(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^t - 1 \end{pmatrix},\ \mu^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Взяв число разбиений интервала $[0,1)$ равным $M = 40$ и шагом $h = 0.025$ и, решая задачи Коши (13)-(15) методом Рунге-Кутта 4-го порядка, составим систему алгебраических уравнений (16).

Решая эту систему, находим параметр $\mu^h = \begin{pmatrix} 0.9999999957 \\ 1.0000000034 \end{pmatrix}$

Численные значения решения краевой задачи в точках разбиения на отрезке $[0, 1]$, приведены в следующей таблице.

Таблица - Результаты вычисления численного решения краевой задачи

t	$x_1^h(t)$ (численное решение)	$x_1^*(t)$ (точное решение)	$x_2^h(t)$ (численное решение)	$x_2^*(t)$ (точное решение)
0.000	0	0	0	0
0.025	0.025315120614138	0.02531512052	0.000624999894533	0.00063
0.05	0.051271096552947	0.05127109638	0.002499999791217	0.0025
0.075	0.077884151146159	0.07788415088	0.005624999690098	0.00563
0.1	0.105170918419049	0.10517091808	0.00999999959125	0.01
0.125	0.133148453489248	0.13314845307	0.015624999494778	0.01563
0.15	0.161834243226742	0.16183424273	0.022499999400815	0.0225
0.175	0.191246217183738	0.19124621661	0.030624999309524	0.03062
0.2	0.221402758801216	0.22140275816	0.039999999221098	0.04
0.225	0.252322716899179	0.25232271619	0.050624999135757	0.05063
0.25	0.284025417457779	0.28402541669	0.062499999053755	0.0625
0.275	0.316530675696682	0.31653067487	0.075624998975369	0.07563
0.3	0.349858808460227	0.34985880758	0.089999998900908	0.09
0.325	0.384030646916114	0.38403064598	0.105624998830706	0.10563
0.35	0.419067549575565	0.41906754859	0.122499998765123	0.1225
0.375	0.454991415643082	0.45499141462	0.140624998704544	0.14063
0.4	0.491824698704169	0.49182469764	0.159999998649376	0.16
0.425	0.529590420759551	0.52959041966	0.180624998600046	0.18063
0.45	0.568312186614674	0.56831218549	0.202499998557	0.2025
0.475	0.608014198633476	0.60801419749	0.225624998520699	0.22563
0.5	0.648721271865656	0.6487212707	0.249999998491613	0.25
0.525	0.690458849556881	0.69045884838	0.275624998470223	0.27563
0.55	0.73325301905165	0.73325301787	0.302499998457012	0.3025
0.575	0.777130528098728	0.77713052691	0.330624998452463	0.33062
0.6	0.822118801569361	0.82211880039	0.35999999845705	0.36
0.625	0.868245958598716	0.86824595743	0.390624998471235	0.39063
0.65	0.915540830161253	0.91554082901	0.422499998495459	0.4225
0.675	0.96403297709102	0.96403297597	0.455624998530137	0.45563
0.7	1.013752708558142	1.01375270747	0.489999998575645	0.49
0.725	1.064731101013038	1.06473109997	0.525624998632313	0.52562
0.75	1.117000017610207	1.11700001661	0.562499998700414	0.5625
0.775	1.170592128123747	1.17059212718	0.600624998780151	0.60063
0.8	1.225540929367019	1.22554092849	0.639999998871645	0.64
0.825	1.281880766129251	1.28188076533	0.680624998974916	0.68062
0.85	1.339646852642143	1.33964685193	0.722499999089872	0.7225
0.875	1.398875294589917	1.39887529397	0.765624999216284	0.76563
0.9	1.459603111676535	1.45960311116	0.809999999353771	0.81
0.925	1.521868260764227	1.52186826036	0.855624999501772	0.85563
0.95	1.58570965959776	1.58570965932	0.902499999659521	0.9025
0.975	1.651167211129298	1.65116721098	0.950624999826019	0.95062
1	1.718281828459045	1.71828182846	1	1

Как видно из таблицы, разность между точным и численным решениями не превышает значения $\varepsilon = 0.1 \times 10^{-8}$

Список использованной литературы:

1 Бакирова Э.А., Искакова Н.Б., Уаисов Б. Об одном алгоритме решения линейной краевой задачи для интегро- дифференциального уравнения фредгольма с параметром. Известия НАН РК. Серия физико-математическая -2017 г. №3. с. 173-180.

2 Демидович Б.П., Моденов В.П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. 3-е изд., стер. - СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 288 с: ил.

3 Кибенко А.В., Перов А.И. Некоторые теоремы существования для двухточечной краевой задачи с параметром // Труды семинара по функциональному анализу. -1963. Вып.7. -С. 52-58.

4 Гома И.А. Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче с параметром // Укр. матем. журн. -1977. Т.29, №6. -С. 800-807.

5 Эйдельман Ю.С. Краевая задача для дифференциального уравнения с параметром //Диф.уравн. 1978. Т.14, №7. -С. 1335-1337.

6 Джумабаев Д.С. Необходимые и достаточные условия существования решений краевых задач с параметром // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1979. №3. -С. 5-12.

References:

1. Bakirova Je.A., Iskakova N.B., Uaisov B. (2017) Ob odnom algoritme reshenija linejnoj kraevoj zadachi dlja integro- differencial'nogo uravnenija fredgol'ma s parametrom[An algorithm for solving a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with a parameter]. Izvestija NAN RK. Serija fiziko-matematicheskaja.- №3. 173-180. (In Russian)

2. Demidovich B.P., Modenov V.P. (2008) Differencial'nye uravnenija [Differential Equation]: Uchebnoe posobie. 3-e izd., ster. SPb.: Izdatel'stvo «Lan'», 288: il. (In Russian)

3. Kibenko A.V., Perov A.I. (1963) Nekotorye teoremy sushhestvovanija dlja dvuhtochechnoj kraevoj zadachi s parametrom [Some existence theorems for a two-point boundary value problem with a parameter]. Trudy seminara po funkcional'nomu analizu. Vyp.7. 52-58. (In Russian)

4. Goma I.A. (1977) Metod posledovatel'nyh priblizhenij v dvuhtochechnoj kraevoj zadache s parametrom[The method of successive approximations in a two-point boundary value problem with a parameter]. Ukr. matem. zhurn. T.29, №6. 800-807. (In Russian)

5. Jejdel'man Ju.S. (1978) Kraevaja zadacha dlja differencial'nogo uravnenija s parametrom[A boundary value problem for a differential equation with a paramete]. Dif.uravn. T.14, №7. 1335-1337. (In Russian)

6. Dzhumabaev D.S. (1979) Neobhodimye i dostatochnye uslovija sushhestvovanija reshenij kraevyh zadach s parametrom [Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions to boundary value problems with the parameter]. Izv. AN KazSSR. Ser. fiz.-mat. №3. 5-12. (In Russian)