МРНТИ 27.33.17
УДК 519.642.5

DOI: https://doi.org/10.51889/2020-1.1728-7901.29

Р.С. Ысмағұл[1], *А.Е. Нургельдина*[1]

[1]*А.Байтұрсынов атындағы Қостанай мемлекеттік университеті, Қостанай қ., Қазақстан*

ФРЕДГОЛЬМНІҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІН ШЕШУ ӘДІСТЕРІ

Аңдатпа

Мақалада физиканың әртүрлі бөлімдерінде кеңінен қолданылатын интегралдық теңдеулер (сұйықтық бетіндегі толқындар теориясы, кванттық механика, спектроскопия, кристаллография, акустика, анализ және плазманың диагностикасы есептері және т. б.), геофизика (гравиметрия есептері, сейсмиканың кинематикалық есептері), механика (конструкциялардың тербелістері) және т. б. қарастырылған. Физикада соңғы әсер енгізілген кезде, жай дифференциалдық теңдеулер немесе дербес туынды теңдеулері жеткіліксіз болып табылады, басқаша айтқанда бастапқы шарттар болатын жағдайды анықтаушы еді. Алдыңғы күйлердің үздіксіз тізбегін ескеру үшін, интегралдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулерді пайдалану қажет, мұнда интеграл белгісінің астында параметрлердің функциялары беріледі, сонымен қатар қарастырылатын сәттің алдындағы кейбір кезең ішіндегі уақытқа тәуелді жүйені сипаттайды.

Бұл мақалада біз екінші түрдегі Фредгольм интегралдық теңдеулерінің шешімін біртіндеп жуықтау әдісімен және итерацияланған ядролар әдісімен шешуді қарастырдық.

Түйін сөздер: Фредгольмнің интегралдық теңдеулері, біртіндеп жуықтау әдісі, итерацияланған ядролар әдісі.

Аннотация

Р.С. Ысмагул[1], *А.Е. Нургельдина*[1]

[1]*Костанайский государственный университет имени А.Байтурсынова, г.Костанай, Казахстан*

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

В статье рассмотрены интегральные уравнения, которые широко используются в различных разделах физики (теория волн на поверхности жидкостей, квантовая механика, задачи спектроскопии, кристаллографии, акустики, анализа и диагностики плазмы и т.д.), геофизики (задачи гравиметрии, кинематические задачи сейсмики), механики (колебания конструкций) и др. Когда в физике введено последействие, то уже недостаточно обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных, иначе начальные данные определяли бы будущее состояние. Чтобы учесть непрерывную последовательность предшествующих состояний, нужно использовать интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, где под знаком интеграла фигурируют функции параметров, характеризующих систему, которые зависят от времени в течение некоторого периода, предшествующего рассматриваемому моменту.

В данной статье мы рассмотрели решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода методом последовательных приближений и метод итерированных ядер.

Ключевые слова: интегральные уравнения Фредгольма, метод последовательных приближений, метод итерированных ядер.

Abstract

METHODS FOR SOLVING FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS

Ysmagul R. S. [1], *Nurgeldina A. E.* [1]

[1]*A.Baytursynov Kostanay State University, Kostanay, Kazakhstan*

The article deals with integral equations that are widely used in various sections of physics (theory of waves on the surface of liquids, quantum mechanics, problems of spectroscopy, crystallography, acoustics, analysis and diagnostics of plasma, etc.), Geophysics (problems of gravimetry, kinematic problems of seismics), mechanics (vibrations of structures), etc. When the physics introduced aftereffect, it is not enough ordinary differential equations or partial differential equations, otherwise the initial data would determine the future state. To take into account the continuous sequence of previous States, we need to use integral and integro-differential equations, where the sign of the integral appears functions of parameters that characterize the system, which depend on time for some period preceding the moment under consideration.

In this article we have considered the solution of Fredholm integral equations of the second kind by the method of successive approximations and the method of iterated nuclei.

Keywords: Fredholm integral equations, sequential approximation method, iterated nuclei method.

Интеграл таңбасының астында белгісіз функциясы бар болатын болса, онда ол интегралдық теңдеу деп аталады. Келесі түрдегі интегралдық теңдеулер

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x)$$

және

$$y(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt + f(x) \tag{1}$$

Фредгольмнің 1 текті және 2 текті сызықтық интегралдық теңдеулері деп аталады. Мұндағы $y(x)$ - ізделінді функция, $K(x,t)$ және $f(x)$ - $[a,b]$ кесіндісіндегі берілген белгілі функциялар. $K(x,t)$ функциясы интегралдық теңдеудің ядросы, ал $f(x)$ - бұл теңдеудің бос мүшесі болып табылады [1].

(1) интегралдық теңдеудің $K(x,t)$ ядросы *өзгешеленген* деп аталады, егер ол келесі түрде берілген болса

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x)q_k(t).$$

$$y(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt + f(x). \tag{2}$$

Фредгольмнің біртекті интегралдық теңдеуі λ параметрінің нөлдік емес мәндері тривиалды емес шешімге ие болатын болса, ол берілген теңдеудің (немесе $K(x,t)$ ядросының) *характеристикалық сандары*, ал шешімдері λ характеристикалық санына сәйкес *меншікті функциялары* деп аталады. $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ сандары интегралдық теңдеудің *меншікті сандары* деп аталады [1].

Біртіндеп жуықтау әдісі

Егер (2) Фредгольм теңдеуінің λ сандық параметрі келесі шартты қанағаттандырса,

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \text{ мұндағы } B^2 = \int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2 dxdt, \tag{3}$$

онда (1) теңдеу тек бір шешімге ие. Бұл жағдайда ол біртіндеп жуықтау әдісі бойынша табылады. Еркін түрде $y_0(x)$ нөлдік жуықтауды алып, $y_n(x)$ функциялар тізбегін құруға болады:

$$y_1(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)y_0(t)dt + f(x),$$

$$y_2(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)y_1(t)dt + f(x)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$y_n(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)y_{n-1}(t)dt + f(x)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Бұл тізбек $y(x)$ шешіміне жинақталады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$ [2].

1 мысал. Біртіндеп жуықтау әдісі бойынша интегралдық теңдеуді шешу керек

$$y(x) = e^x + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x-t}y(t)dt$$

Шешімі: Берілген теңдеуде $\lambda = \dfrac{1}{2}$, ал $K(x,t) = e^{x-t}$.

Сондықтан

$$B^2=\int_0^1\int_0^1|K(x,t)|^2dxdt=\int_0^1\int_0^1 e^{2(x-t)}dxdt=\int_0^1\int_0^1 e^{2x}\cdot e^{-2t}dxdt=\int_0^1 e^{2x}dx\int_0^1 e^{-2t}dt=-\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1\cdot e^{-2t}\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{1}{4}(e^2-1)(e^{-2}-1)=\frac{(e^2-1)^2}{4e^2},$$

бұдан $B=\dfrac{e^2-1}{2e}$ және $|\lambda|=\dfrac{1}{B}$ шарты орындалады. Нөлдік жуықтау ретінде $y_0=e^x$ алып, келесі жуықтауларды құрайық:

$$y_1(x)=e^x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x-t}\cdot e^t dt=e^x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^x dt=e^x+\frac{1}{2}e^x\cdot t\Big|_0^1=\frac{3}{2}e^x;$$

$$y_2(x)=e^x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x-t}\,\frac{3}{2}e^t dt=e^x+\frac{3}{4}e^x\cdot t\Big|_0^1=\frac{7}{4}e^x;$$

$$y_3(x)=e^x+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x-t}\,\frac{7}{4}e^t dt=e^x+\frac{7}{8}\int_0^1 e^x dt=\frac{15}{8}e^x.$$

$\{y_n(x)\}$ тізбегінің бірнеше бірінші мүшелерін есептеп, n-ші жуықтауды келесі түрде жазамыз:

$$y_n(x)=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}e^x.$$

Дәл шешімін шек түрінде табамыз:

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n}e^x=e^x\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^n}\right)=e^x\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right)=2e^x.$$

2 мысал. Біртіндеп жуықтау әдісі бойынша интегралдық теңдеуді шешу керек:

$$y(x)=e^x+\int_0^1 xe^{x-t}y(t)dt.$$

Шешімі: Берілген теңдеуде $\lambda=1$, ал ядросы $K(x,t)=xe^{x-t}$ болады. Бұдан

$$B^2=\int_0^1\int_0^1|K(x,t)|^2dxdt=\int_0^1\int_0^1 x^2e^{2(x-t)}dxdt=\int_0^1\int_0^1 x^2\cdot e^{2x}\cdot e^{-2t}dxdt=\int_0^1 x^2e^{2x}dx\int_0^1 e^{-2t}dt=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^1\cdot\int_0^1 x^2e^{2x}dx=\left|\begin{matrix}u=x^2 & dv=e^{2x}dx\\ du=2xdx & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2}(e^{-2}-1)\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^1-\int_0^1 xe^{2x}dx\right)=$$

$$=\frac{e^2-1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2-\int_0^1 xe^{2x}dx\right)=\left|\begin{matrix}u=x & dv=e^{2x}dx\\ du=dx & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|=\frac{e^2-1}{2e^2}\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx\right)=$$

$$=\frac{e^2-1}{2e^2}\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1\right)=\frac{(e^2-1)^2}{8e^2},$$

сәйкесінше $B=\dfrac{e^2-1}{2\sqrt{2}e}$ және $|\lambda|=\dfrac{1}{B}$ шарты орындалады. Нөлдік жуықтау ретінде $y_0=e^x$ алып, келесі жуықтауларды құрайық:

$$y_1(x)=e^x+\int_0^1 xe^{x-t}\cdot e^t dt=e^x+\int_0^1 xe^x dt=e^x+xe^x\cdot t\Big|_0^1=e^x+xe^x;$$

$$y_2(x)=e^x+\int_0^1 xe^{x-t}(e^t+te^t)dt=e^x+\int_0^1 xe^{x-t}\cdot e^t dt+\int_0^1 xe^{x-t}te^t dt=e^x+xe^x+xe^x\int_0^1 tdt=$$

$$=e^x+xe^x+xe^x\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=e^x+\frac{3}{2}xe^x;$$

$$y_3(x)=e^x+\int_0^1 xe^{x-t}(e^t+\frac{3}{2}te^t)dt=e^x+\int_0^1 xe^{x-t}\cdot e^t dt+\frac{3}{2}\int_0^1 xe^{x-t}te^t dt=e^x+xe^x+\frac{3}{2}xe^x\int_0^1 tdt=$$

$$=e^x+xe^x+\frac{3}{2}xe^x\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=e^x+\frac{4}{7}xe^x.$$

$\{y_n(x)\}$ тізбегінің бірнеше бірінші мүшелерін есептеп, n-ші жуықтауды келесі түрде жазамыз:

$$y_n(x)=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}xe^x.$$

Дәл шешімін шек түрінде табамыз:

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(e^x+\frac{2^n-1}{2^{n-1}}xe^x\right)=e^x+xe^x\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=e^x+2xe^x=e^x(1+2x).$$

Итерацияланған ядролар әдісі

Егер біртіндеп тізбектеу әдісінде $y_0(x)=f(x)$ деп таңдасақ, онда n-ші жуықтауды есептеуде келесі формуланы алуға болады:

$$y_n(x)=f(x)+\sum_{m=0}^{n}\lambda^{m+1}\int_a^b K_m(x,t)f(t)dt=f(x)+\lambda\int_a^b\sum_{m=0}^{n}\lambda^m K_m(x,t)f(t)dt,$$

бұл жердегі $K_m(x,t)$ итерацияланған ядролары келесі қатынастар арқылы табылады:

$$K_0\equiv K(x,t),\qquad K_m(x,t)=\int_a^b K(x,s)K_{m-1}(s,t)ds.$$

Интеграл астындағы белгі $n\to\infty$ жағдайда келесі түрдегі қатарды аламыз:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_m(x,t). \tag{4}$$

λ-ның кейбір мәндері үшін бұл қатар $K(x,t)$ ядросының *резольвентасы* деп аталатын $R(x,t,\lambda)$ функциясына жинақталады. Бұл жағдайда интегралдық теңдеудің шешімі келесі формула бойынша табылады:

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt, \tag{5}$$

және де (4) қатардың жинақталу облысы (3) шартта анықталғаннан кеңірек болуы мүмкін.

Жалпы айта келе, (1) интегралдық теңдеудің шешімі (5) формула бойынша табылатын функция ретінде алынған резольвента түсінігі, λ-ның кез келген мәндері үшін орындалады және де теңдеудің тек бір ғана шешімі болады [3].

3 мысал. Интегралдық теңдеуді итерацияланған ядролар әдісімен шешу керек:

$$y(x)=\lambda\int_0^1 xe^{x-t}y(t)dt+e^x;\ \lambda=-2.$$

Шешімі. Итерацияланған ядролар тізбегін табайық:

$$K_0(x,t)=K(x,t)=xe^{x-t};$$

$$K_1(x,t)=\int_0^1 K(x,s)K(s,t)ds=\int_0^1 xe^{x-s}se^{s-t}ds=\frac{1}{2}xe^{x-t};$$

$$K_2(x,t)=\int_0^1 K(x,s)K_1(s,t)ds=\int_0^1 xe^{x-s}\frac{1}{2}se^{s-t}ds=\frac{1}{4}xe^{x-t};$$

… … … …

$$K_m(x,t)=\left(\frac{1}{2}\right)^m xe^{x-t}.$$

Резольвентаны табамыз:

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_m(x,t)=xe^{x-t}\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m\left(\frac{1}{2}\right)^m=xe^{x-t}\frac{2}{2-\lambda}.$$

Берілген қатардың жинақталу радиусы $|\lambda|<2$-ге тең. Берілген теңдеу үшін

$$B^2=\int_0^1\int_0^1 |K(x,t)|^2 dxdt=\int_0^1\int_0^1 x^2e^{2(x-t)}dxdt=\int_0^1\int_0^1 x^2e^{2x}e^{-2t}dxdt=\int_0^1 x^2e^{2x}dx\int_0^1 e^{-2t}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x^2 & dv=e^{2x}dx \\ du=2xdx & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|=\left(\frac{e^2}{2}-\int_0^1 xe^{2x}dx\right)\left(-\frac{1}{2}\left(e^{-2}-1\right)\right)=\left|\begin{matrix} u=x & dv=e^{2x}dx \\ du=dx & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|=\frac{\left(e^2-1\right)^2}{8e^2}$$

$$B=\frac{\left(e^2-1\right)}{2\sqrt{2}e}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{B}\approx 1{,}2.$$

Осылайша, (4) қатардың жинақталу облысы (3) шартқа қарағанда резольвента үшін кеңірек болып шықты. Теңдеудің шешімін (5) формула бойынша табамыз:

$$y(x)=e^x+\lambda\int_0^1 xe^{x-t}\frac{2}{2-\lambda}e^t dt=e^x+\frac{2\lambda xe^x}{2-\lambda}.$$

Егер $\lambda=-2$ болса, онда

$$y(x)=e^x+\frac{2(-2)xe^x}{2-(-2)}=e^x-xe^x=e^x(1-x).$$

Қорытындылай келе, интегралдық теңдеулерді математикалық физика есептерін шешуде қолдануға мүмкіндік беретінін көрдік. Оларды басшылыққа ала отырып, қойылған міндеттерді шешу дағдыларын оңай меңгеруге болады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1. *Орынбасаров М., Сахаев Ш. Интегралдық теңдеулер курсы: оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті, 2014. 213 б.*

2 *Ysmagul R.S., Kolesnikova A.S. On one account system of integro-differential equations in private derivatives of first order. Abai University. Bulletin. "Physics & Mathematical Sciences" №3(63), A.2018. p. 471.*

3 *Попов В.А. Сборник задач по интегральным уравнениям. Казань, 2006. 30 с.*