ҒТАХР 14.25.09

10.51889/2959-5894.2026.93.1.006

Г.Е. Берикханова[1], Д.С. Құдайбергенов[1], М.Т. Искакова[2]

[1]Шәкәрім университеті, Семей қ., Қазақстан
[2]Абай атындағы Казақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
**e-mail: makpalsemey@mail.ru*

СТАНДАРТТЫ ЕМЕС ТРАНСЦЕНДЕНТТІ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ ӘДІСТЕРІ

Аңдатпа

Оқушыда математикалық сауаттылық, зерттеушілік және шығармашылық құзіреттілік қалыптастыру – математиканы оқытудың негізгі мақсаттарының бірі. Оқушылардың шығармашылық және ойлау қабілеттерін дамытудың бір жолы – қиындығы жоғары және стандартты емес есептерді шығара білуге жаттықтыру мұғалімнің шеберлігі мен еңбекқорлығының нәтижесінде жүзеге асады. Стандартты емес трансцендентті есептер, сондай-ақ стандартты емес әдістермен шығарылатын есептер конкурстық, олимпиадалық тапсырмаларда жиі кездеседі. Мақалада стандартты емес трансцендентті теңдеулерді шешуде дәстүрлі әдістерден тыс жаңа стратегиялық әдістерді қолдануды қарастырады. Функцияның монотондылығын, шенелгендігін, жұптылығын, мүмкін мәндер жиынын қолдану, теңдеуді функцияға көбейту және сан аралықтарында зерттеу сияқты тәсілдер қарастырылады. Олардың қолданылуы мен тиімділігі мысалдар арқылы көрсетіледі. Стандартты емес теңдеулерді шешудің барлық тәсілдерін қарастырып шығу мүмкін емес. Қарастырылған мысалдардан стандартты емес трансцендентті теңдеулерді шешу оқушылардың меңгерген материалдарын шығармашылықпен ұғынуына, ойлау қабілетін дамытуға септігін тигізеді. Осындай мысалдар математикалық үйірмеде, сыныптан тыс сабақтарда, олимпиадаға дайындауда сондай-ақ қорытынды - қайталау сабақтарында қолдану арқылы стандартты емес тәсілдермен шешілетін теңдеулерді дәстүрлі емес әдістермен шығаруға, тиімді тәсілдерді іздеуге оқушыларды баулиды. Жұмыс қазіргі контексте теңдеулерді шешуге бірегей көзқарас ұсына отырып, жаңа перспективаларды ашады және оқушыда математика пәніне шығармашылық көзқарасты шабыттандырады.

Түйін сөздер: стандартты емес теңдеулер, шешу әдістері, монотондылық, шенелгендік, жұптық, мүмкін мәндер жиыны, функцияны зерттеу.

Г.Е. Берикханова[1], Д.С. Кудайбергенов[1], М.Т. Искакова[2*]
Шакарим университет, г. Семей, Казахстан
[2] Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстаны

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАНДАРТНЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

Формирование у ученика математической грамотности, исследовательской и творческой компетентности – одна из основных целей обучения математике. Один из способов развития творческих способностей и способностей мышления учащихся - обучение умению решать задач повышенной трудности и нестандартные задачи достигается в результате мастерства и трудолюбия учителя. Нестандартные трансцендентные задачи, а также задачи, решаемые нестандартными методами, часто встречаются в конкурсных, олимпийских заданиях. В статье рассматривается решение нестандартных трансцендентных уравнений с использованием новых стратегических методов, выходящих за рамки традиционных. Рассматриваются такие методы, как использование монотонности, ограниченности, четности функции, области допустимых значений, умножение уравнения на функцию и исследование на числовых интервалах. Их применение и эффективность демонстрируются на примерах. Рассмотреть все способы решения нестандартных уравнений невозможно. Решение нестандартных трансцендентных уравнений на рассмотренных примерах способствует творческому осмыслению учащимися усвоенного материала, развитию мышления. Используя подобные примеры в математическом кружке, на внеклассных занятиях, в подготовке к олимпиаде, а также на итогово-повторных занятиях, учащиеся вовлекаются в поиск эффективных методов решения нестандартных уравнений, решаемые нестандартными, нетрадиционными

способами. Работа открывает новые перспективы, предлагая уникальный подход к решению уравнений в современном контексте, и вдохновляет учащегося на творческий подход к математике.

Ключевые слова: нестандартные уравнения, методы решения, монотонность, ограниченность, четность, область допустимых значений, исследование функции.

G.E. Berikkhanova[1], D.S. Kudaibergenov[2], M.T. Iskakova[3]
Shakarim University, Semey, Kazakhstan
[2]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

METHODS FOR SOLVING TRANSCENDENTAL NON-STANDARD EQUATIONS

Abstract

Formation of mathematical literacy, research, and creative competence in students is one of the main goals of mathematics education. One way to develop creative thinking skills among students is through teaching them how to solve challenging and non-standard problems, achieved through the mastery and diligence of the teacher. Non-standard transcendental problems, as well as problems solved using non-traditional methods, are often encountered in competitive and Olympiad tasks. The article considers the solution of non-standard transcendental equations using new strategic methods that go beyond traditional ones.Methods such as utilizing monotonicity, boundedness, function parity, domain of admissible values, multiplying equations by functions, and exploring numerical intervals are considered. Their application and effectiveness are demonstrated through examples. It is impossible to consider all methods for solving non-standard equations. Solving non-standard transcendental equations using the examples considered promotes students' creative understanding of the material they have learned and the development of their thinking. By using such examples in math clubs, extracurricular activities, olympiad preparation, as well as in final review sessions, students are engaged in finding effective methods for solving non-standard equations using non-traditional approaches. The work opens up new perspectives, offering a unique approach to solving equations in a modern context, and inspires students to take a creative approach to mathematics.

Keywords: Non-standard equations, solution methods, monotonicity, boundedness, parity, domain of admissible values, function exploration.

Кіріспе

Еліміздің тәуелсіздігі білім беру жүйесінде де жаңару мен жаңғыртудың қажеттілігін айқындады. Еліміздегі білім беру көптеген өзгерістерге ұшырап, дамып келеді. Білім алушылар жаңа ақпараттық коммуникациялық технологияларды жетік меңгерген, бәсекеге қабілетті, нақты қабілеттері мен дағдылары қалыптасқан азамат болуы басты міндет.

Білімалушы оқу мен тәжірибенің теориялық негізделген тәсілін меңгеріп, оны өмірлік практикада қолдануды немесе қойылған мәселені шешуге жаңа тәсілдерді өз бетінше таба алуды қалыптастыруы қажет. Осы мақсатта оқушыда математикалық сауаттылық, зерттеушілік және шығармашылық құзіреттілік қалыптастырылады.

Оқушылардың шығармашылық ойлау қабілеттерін дамыту – білім саласының негізгі міндеттерінің бірі. Бұл міндетті орындау барысында мектептің математика курсын оқытудың маңызы зор. Әр тақырыпты түсіндіріп, оқулықтағы есептерді шығартумен қатар, алған білімнің өмірмен байланысын, күрделі ситуацияларда қолданылуын, қиындығы жоғары және стандартты емес есептерді шығара білуге жаттықтыру мұғалімнен үлкен шеберлік пен еңбекқорлықты талап етеді.

Қиындығы жоғары, стандартты емес трансцендентті есептерді шығара білу – оқушылардың математикалық ой-өрісінің дамығандығының анық көрсеткіші. Мектеп бағдарламасындағы математика курсы білім алушылардың ой-өрісі мен білім деңгейін арттыруда және азамат етіп тәрбиелеуде маңызы ерекше [1].

Демек, оқушылардың математикалық ойлау қабілеттерін дамыту үшін ең алдымен олардың ынтасы мен қабілетіне қарай қызығып шығаратын есептерді мұқияттылықпен іріктеп алу керек. Егер есептің күрделілігі оқушылардың оқу бағдарламасына, қабілетіне сай болмаса немесе тым күрделі болса, оқушыда пәнге деген ынта төмендейтіні анық.

Есеп шешімін болжау байқампаздық пен ой ептілігін қажет етеді, яғни негізгі қасиеттерін, ерекшеліктерін, ұқсастық белгілерін ажыратып, салыстыра білуі керек. Оқушылардың ойлау қабілеттерін арттырудың ең ұтымды әдісі – салыстыру және ұқсату, анализ және синтез болып саналады. Сондай тәсілдердің бірі – стандартты және стандартты емес есептерді салыстыра отырып шешуде өте маңызды.

Оқушылардың есепті шығара білуге үйрету процесі шығармашылық сипатта болуы керек. Ал шығармашылық қабілет оқушылардың жалпы дамуының құрамдас бөлігі бола отырып, зерттеушілік қызметтің бір формасы болып табылады.

Мектеп математика курсын оқытуда оқушыларда зерттеушілік құзіреттілікті қалыптастыру пән мұғалімінің негізгі міндеті. Мектептің оқулықтарында «зерттеуге» берілген есептер жиыны бар. Дегенмен, «зерттеу» ұғымы формальді болып, оқушыда ешқандай зерттеушілік іс-әрекет байқалмайтын жағдайлар кездеседі.

Зеттеушілік қызметті көп талап ететін есептер – *стандартты емес трансцендентті есептер*. Стандартты емес трансцендентті есептердің қиындығы өте жоғары болады. Осындай тапсырмаларды орындау білім алушылардан терең ізденісті, шығармашылықты, жүйелі логикалық ойлауды және үлкен еңбекті қажет етеді. Бұлар оқушы тәрбиесінде ең керекті, әрі ең маңызды қасиеттердің бірі болып саналады.

Оқушылардың математикалық қабілеттерін арттыру және математика пәніне деген құлшынысын тәрбиелеуде қызықты есептер мен логикалық күрделі есептерді қолдану тиімді. Егер оқушы есепті шығара алатындығына сенімді болса, оның білім алудағы табысқа жетуі айқын болады. Есеп өте күрделі болса, оқушының амалы болмай, шығармашылық қабілеті төмендейді де, оның дамуына бөгет жасайды. Мұғалім тапсырмаларды мұқияттылықпен таңдай отырып, оқушыларының сенімі мен жігерін, қызығушылығын, оның есепті шешуге ұмтылуын, жетістікке жетуін қамтамасыз етеді. Тапсырманы орындау барысында мына алгоритмді білген жөн:

1) тапсырманың берілгенін түсіну;
2) тапсырманы орындау қадамын анықтау;
3) құрылған қадамды іске асыру;
4) табылған шешімді корытындылап үйрену.

Есеп шығаруда осы алгоритмнің қалыптасуы білім алушының шығармашылық құзіреттілігін дамытуға, тақырыпты меңгерудегі қиындықтар мен олқылықтарды жеңуге мүмкіндік беретіні белгілі. Ұстаздың міндеті – оқушының бойында ойлау және шығармашылық құзіреттіліктерін қалыптастыра білуі. Ал оның кілті – шығармашылық, логикалық есептерді шығарту. Білім алушылардың шығармашылық, логикалық тапсырмаларды көбірек орындауы олардың білік және білім дағдысын қалыптастыра отырып жүзеге асады. Сонымен, білім алушыны шығармашылыққа бейімдейтін, ой-өрісін кеңейтетін құрал ретінде логикалық және стандартты емес есептерді айтуға болады.

Қандай математикалық есепті стандартты емес деп атауға болады? Ш.Б.Жиенбаев аударған Г.А.Козловтың «Стандартты емес есептерді шешуді үйрен» атты кітабында стандартты емес есеп ұғымына жақсы анықтама берілген:

Стандартты емес есептер деп математика курсында оларды шешудің нақты бағдарламасын анықтайтын жалпы ережелер мен түсініктері жоқ мәселелерді айтамыз. Оларды қиындығы жоғары есептермен шатастыруға болмайды [2].

Стандартты емес есептерді шешкенде, әдетте, ереже болып табылмайтын нұсқауларды қолданамыз. Шешім әр кезде өзгеше болып табылады, ол есеп шартына және оқушының есептерді шешу тәжірибесі мен біліктілігімен тығыз байланысты.

Стандартты емес тапсырмаларды шешу процесі мынадай екі негізгі әрекетті орындаудан тұрады:

1) Түрлендіру немесе орын ауыстыру арқылы берілген стандартты емес есепке ұқсас болатын стандартты есептің шығару жолы туралы ақпаратты алу.
2) Стандартты емес есептерді бірнеше стандартты есептерге бөлу.

Стандартты емес есеп сипатына байланысты осы операциялардың біреуін қолдану қажет. Ал күрделі стандартты емес есептерді шешкенде бұл операциялар бірнеше рет қолданылады.

Стандартты емес есептерді шешу үшін осы екі операцияны қолдану туралы нұсқауларды әдетте эвристикалық ереже немесе эвристиктер деп атайды. Ол міндетті емес кеңес болғандықтан, ұсыныс сипатын қабылдайды, оның салдары есепті шешуге әкелеуі де әкелмеуі де мүмкін.

Сонымен, есепті шешу шығармашылық қызмет түрі, ал шешімді іздеу тапқырлықтың процесі. Осы жерде маңыздысы әр түрлі шығару жолдарын табу болып табылады. Оны іздеу кезінде танымдық, қызығушылық қалыптасады, шығармашылық қабілет дамиды, зерттегіштік дағды пайда болады. Сонымен қатар есепті шешу кезіндегі индивидуалдық ерекшеліктер әр түрлі шешу жолдарынан неғұрлым қарапайым, рационалды және әдемісін таңдауға мүмкіндік береді [3].

Математикалық аппараттардың негізгі құралдарының бірі – физикадан экономикаға дейінгі әртүрлі салаларда қолданылатын теңдеулер. Алайда, теңдеулерді шешудің стандартты әдістері жеткіліксіз немесе тиімсіз болатын есептер класы бар.

Теңдеулерді шешудің стандартты емес әдістері теңдеулерді терең зерттеуге және олардың қасиеттерін инновациялық тәсілдермен қолдана білуге негізделген. Әр түрлі типтегі теңдеулерді мұқият талдаудың нәтижелерін ұсына отырып, бұл әдістер математикалық есептердің белгілі бір кластарына тән ерекше заңдылықтар мен құрылымдарды анықтауға негізделген. Теңдеулердің қасиеттерін пайдалану классикалық әдістердің шектеулеріне қарамай, ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында қолданудың жаңа перспективаларын ашу арқылы оларды шешудің арнайы тәсілдерін жасауға мүмкіндік береді [4].

А.Я. Канель-Беловтың еңбектерінде стандартты емес есептерді шешудің мынандай әдістері келтіріледі: ұқсас есептерді іздеу, кері жорып дәлелдеу, сәйкестік, графтар, инварианттылық, Дирихле принципі, математикалық индукция, Евклид алгоритмі [5].

Стандартты емес есептерді шығару оқушының математикалық сауаттылығын қалыптастыруда және дамытуда маңызы зор [6].

Зерттеу әдіснамасы

Зерттеудің мақсатына жету үшін, яғни стандартты емес теңдеуді шешу үшін, ғылыми математикалық танымдардың әртүрлі әдістерін қамтитын *кешенді әдістер* қолданылды. Теңдеулерді шешудің стандартты емес әдістерін қолдануды қарастырамыз.

Түрлендірулер нәтижесінде немесе айнымалыны сәтті ауыстыру арқылы кез-келген $f(x)+g(x)=0$ теңдеуін белгілі бір шешу алгоритмі бар стандарт түрге келтіруге бола бермейді. Мұндай жағдайларда $f(x)$ және $g(x)$ *функцияларының қасиеттерін қолдану әдісі* өте тиімді.

Ол үшін осы функциялардың анықталу облыстарының қиылысуын табамыз. Сол облыста осы *функциялардың монотондылығын* анықтап, сан аралығында үзіліссіз, монотонды функциялардың алгебралық қосындысының қасиеттерін қолданамыз.

Стандартты емес теңдеудің құрамында трансцендентті функциялар бар болса, олардың *шенелгендігі* берілген теңдеудің түбірлерінің санын анықтауға мүмкіндік береді. Бұл ақпарат теңдеудің түбірінің мүмкін мәндер жиынындағы қандай да бір аралыққа тиісті екенін көрсетеді. Осы аралықта ғана теңдеуге зерттеу жүргізу есепті шешу процесін тиімді ықшамдайды.

$f(x)=c$ түріндегі стандартты емес теңдеуді шешуде $f(x)$ функциясының *тақ, жұптылығын* қолданып, оның түбірлерінің санын табуды жеңілдетуге болады. Атап айтсақ, егер теңдеудің бір x_0 түбірін табу оның екінші $-x_0$ түбірінің болатындығын қамтамасыз етеді. Сонымен қатар, теңдеудің берілген аралықтағы түбірлер санын алдын ала анықтауға мүмкіндік туғызады. Теңдеудің берілуіне байланысты функцияның басқа да қасиеттерін пайдалану қажет.

Функцияның қасиеттерін пайдаланудан басқа теңдеулерді шешудің басқа стандартты емес әдістері бар. Бұл әдістер *жасанды тәсілдер* деп аталады. Кейде алгебралық теңдеудің шешімін табу оның екі бөлігін де белгілі бір функцияға немесе көпмүшеге көбейту арқылы айтарлықтай жеңілдейді. Бұл жағдайда артық түбірлердың пайда болуы мүмкін екендігін есте ұстаған жөн. Сондықтан бастапқы теңдеуге эквивалент теңдеу алу үшін түбірі жоқ көпмүшеге көбейту керек. Ал егер түбірі бар көпмүшеге көбейтсек, бұл түбірлердің әрқайсысын бастапқы теңдеуге қойып, көпмүшенің түбірі теңдеудің түбірі болып табылатынын не табылмайтындығын тексеру қажет.

Стандартты емес трансцендентті теңдеуді шешуде *функцияның туындысын қолдану әдісі* өте кең пайдаланылатын әдістердің бірі. Функцияның өсуі мен кемуін, экстремумдарын қолдану жиі пайдаланылады [7]. Мұндай есептерді шешудің нақты әдістері болмағандақтан, есептің берілуіне байланысты аталған әдіс-тәсілді сәтті таңдауға тура келеді. Кейбір теңдеулерді шешу барысында осы аталған әдістердің бірнеше түрін кешенді қолдануға болады. Сондықтан оқушыға сан-алуан әдістерді меңгерту мұғалімнің өзінен де, қызметінен де үлкен білім мен іскерлікті талап етеді.

Сонымен қатар стандартты емес трансцендентті теңдеулерді шешуде математикалық анализдің басқа да элементтерін қолдану өте тиімді [8].

Зерттеу нәтижелері

Стандартты емес трансцендентті есепті шешуде оқушы бұл есепті шешудің тәсілін де, қандай оқу материалына сүйенетінін де алдын-ала білмейді. Стандартты емес есептер әр түрлі формада болады. Олардың біреулерінің сыртқы формасы әдеттегідей көрінгенмен, оған қандай амал жасау керек екендігі түсініксіз және белгісіз. Ал, енді біреулері алдамшы: есептің түріне қарасаң, үйреншікті стандартты есеп сияқты, бірақ стандартты тәсілмен ол шешілмейді. Үшінші біреулері әрі шебер, әрі нақты логикалық ойлауды өте қажет етеді [9].

Теңдеулерді терең деңгейде зерттеу жаңа заңдылықтарды анықтауға мүмкіндік береді, бұл күрделі есептерді шешудің жалпы және әмбебап әдістерін жасауға әкеледі. Теңдеулерді шешудің стандартты емес әдістерін қолдануды қарастырамыз. Сонымен қатар трансцендент теңдеуді алгебралық теңдеуге келтіру әдісіне де мысал қарастырылады.

Стандартты емес теңдеудің берілуіне байланысты әдіс-тәсілді таңдауға тура келеді. Сондықтан оқушыға сан-алуан әдістерді меңгерту мұғалімнен үлкен еңбекті талап етеді.

Стандартты емес теңдеулерді шешуде жоғарыда айтылған әдістерді қолдануға мысалдар келтірейік.

Мысал – 1. $x \cdot 2^{x^2+2x+2} = 32$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $x \le 0$ берілген теңдеудің шешімі болуы мүмкін емес, себебі $g(x) = 2^{x^2+2x+2}$ көрсеткіштік функциясы үнемі оң мән қабылдайтындықтан $x \cdot 2^{x^2+2x+3} < 0$ болады. Ал есептің шарты бойынша бұл көбейтінді $32-$ге тең, яғни оң шама. Сондықтан берілген теңдеудің түбірін бірінші көбейткіш $x > 0$ болатын жиыннан іздейміз. $f(x) = x$ және $g(x) = 2^{x^2+2x+2}$ үзіліссіз және қатаң өспелі функциялар болғандықтан, олардың көбейтіндісі де үзіліссіз және қатаң өспелі функция болады. Сондықтан $x > 0$ болғанда $y = x \cdot 2^{x^2+2x+2}$ функциясы үзіліссіз және қатаң өспелі. Сонымен, $x > 0$ облысында функцияның әрбір мәні бір ғана нүктеге тиісті болады. Бұдан $x = 1$ берілген теңдеудің шешімі екенін көру оңай, яғни бұл оның жалғыз шешімі.

Мысал – 2. $\sqrt[5]{38-x}-\sqrt[10]{x-5}=2$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Теңдеуінің мүмкін мәндерінің жиынын табамыз. Теңдеудегі түбір көрсеткіштері жұп болғандықтан, түбір астындағы өрнек оң мәндер қабылдауы тиіс. Сондықтан мынандай теңсіздіктер жүйесін құрамыз:

$$\begin{cases}38-x\ge 0\\ x-5\ge 0\end{cases},\quad \begin{cases}-x\ge -38\\ x\ge 5\end{cases},\quad \begin{cases}x\le 38\\ x\ge 5\end{cases}.$$

Сонымен теңдеудің мүмкін мәндер жиыны $[5;38]$ сегменті болады. Мүмкін мәндер жиынында $f(x)=\sqrt[5]{38-x}$ кемімелі ал $g(x)=\sqrt[10]{x-5}$ функциясы өспелі, сондықтан олардың айырмасы болатын $y(x)=\sqrt[5]{38-x}-\sqrt[10]{x-5}$ функциясыда үзіліссіз және қатаң кемімелі болады. Сондықтан $y(x)$ функциясының әрбір мәні үшін $x-$ тің бір ғана мәні табылады. $x=5$ теңдеудің жалғыз түбірі болып табылады.

Мысал – 3. $\sin\left(x^3+2x^2+3\right)=x^2+2x+3$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Кез келген x нақты саны үшін синус функциясының шенелген екенін білеміз, яғни $\left|\sin\left(x^3+2x^2+3\right)\right|\le 1$ немесе $\sin\left(x^3+2x^2+3\right)\le 1$ деп жаза аламыз. Ал берілген теңдеудің оң жағын қысқаша көбейту формуласы бойынша $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ деп жазсақ, ол кез келген x нақты саны үшін $1-$ ден үлкен оң мән қабылдайды, яғни $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>1$. Сонда кез-келген $x-$ тің мәні үшін теңдеудің сол жағы $1-$ ден артық емес, ал оң жағы 1-ден артық болды. Бұлай болуы мүмкін емес. Сондықтан бұл теңдеудің түбірі жоқ.

Мысал – 4. $x^3-x-\sin\pi x=0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Таңдау әдісімен $x=0$, $x=1$, $x=-1$ мәндерінің берілген теңдеудің шешімдері болып табылатынын көруге болады. $f(x)=x^3-x-\sin\pi x$ функциясы үш тақ функцияның алгебралық қосындысы болғандықтан, ол тақ функция болады. Теңдеудің басқа нақты шешімдерін табу үшін оларды $x>0$, $x\ne 1$ жиынында табу жеткілікті, өйткені егер $x_0>0$ оның шешімі болса, онда оған қарама-қарсы $-x_0$ мәні де оның шешімі болып табылады.

Біз $x>0$, $x\ne 1$ жиынын екі аралыққа бөлеміз: $(0;1)$ және $(1;+\infty)$.

Берілген теңдеуді $x^3-x=\sin\pi x$ түрінде жазамыз. $(0;1)$ аралықта $g(x)=x^3-x$ функциясы тек теріс мәндерді қабылдайды, ал $h(x)=\sin\pi x$ функциясы тек оң мәндерді қабылдайды. Демек, бұл аралықта теңдеудің шешімдері жоқ.

Енді $(1;+\infty)$ аралығын қарастырайық. Бұл аралықта кез келген x үшін $g(x)=x^3-x$ функциясы оң мәндерді қабылдайды, ал $h(x)=\sin\pi x$ функциясы оң да, теріс те мәндерді қабылдайды, ал $(1;2]$ аралығында $h(x)=\sin\pi x$ функциясы оң емес. Демек, $(1;2]$ аралығында теңдеудің шешімі жоқ.

Егер $x>2$ болса, онда $|\sin\pi x|\le 1$, яғни оң да, теріс те мәндер қабылдайды. Бұл аралықта $x^3-x>6$ болатындығы белгілі. Бұдан $(1;+\infty)$ аралығында да теңдеудің шешімдері жоқ екенін көреміз.

Сонымен, тек $x=0$, $x=1$, $x=-1$ теңдеудің шешімдері болып табылады.

Мысал – 5. a параметрінің қандай да бір мәнінде $8x^8 - 6ax^6 + 4x^4 - 2ax^2 = 7$ теңдеуінің 7 түбірі болуы мүмкін бе?

Шешуі. $f(x) = 8x^8 - 6ax^6 + 4x^4 - 2ax^2$ деп белгілейміз. $f(x)$ жұп функция, сондықтан егер x_0 берілген теңдеудің түбірі болса, онда $-x_0$ де түбірі болады, яғни түбірлері симметриялы болады. $x = 0$ берілген теңдеудің түбірі емес, себебі $f(0) \neq 7$. Демек, бұл теңдеудің кез-келген нақты a параметрінің мәніндегі түбірлерінің саны жұп болады, сондықтан берілген теңдеудің 7 түбірі болуы мүмкін емес.

Мысал – 6. $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Берілген теңдеудің мүмкін мәндер жиыны барлық нақты сандар жиыны, яғни $(-\infty; +\infty)$. Теңдеудің екі жағын да $x^2 + 1$ көпмүшесіне көбейтеміз. Оның нақты сандар жиынында шешімі жоқ. Сонда берілген теңдеуге эквивалентті теңдеу аламыз:

$$\left(x^2 + 1\right)\left(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1\right) = 0.$$

Жақшаны ашсақ, $x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0$ немесе $x^{10} + 1 = 0$ теңдеуін аламыз. Бұл теңдеуінің нақты түбірі жоқ екені анық, сондықтан берілген теңдеудің де түбірі болмайды.

Мысал – 7. $2x^3 - 12x^2 - 30x + 4 = 0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Теңдеудің екі жағын да $x + \frac{1}{2}$ көпмүшеге көбейтеміз. Сонда $2x^4 - 11x^3 - 36x^2 - 11x + 2 = 0$ теңдеуін аламыз. Бұл теңдеудің $x = -\frac{1}{2}$ түбірі берілген теңдеудің түбірі болмайды. Бұл теңдеу төртінші дәрежелі симметриялық теңдеу. Осы теңдеудің екі жағын да x^2 – қа бөліп, топтастырып, оған эквивалентті теңдеу аламыз:

$$2x^2 - 11x - 36 - \frac{11}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \text{ немесе } 2x^2 + \frac{2}{x^2} + 4 - 4 - 11x - \frac{11}{x} - 36 = 0,$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 11\left(x + \frac{1}{x}\right) - 40 = 0.$$

Мынандай белгілеу енгіземіз: $y = x + \frac{1}{x}$. Сонда $2y^2 - 11y - 40 = 0$ квадрат теңдеуін аламыз. Оның түбірлері $y_1 = -\frac{5}{2}$, $y_2 = 8$. Бұдан $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$ және $x + \frac{1}{x} = 8$ теңдеулерінің жиынын аламыз. Бұл теңдеулердің түбірлері $x_1 = 4 - \sqrt{15}$, $x_2 = 4 + \sqrt{15}$, $x_3 = -2$, $x_4 = -\frac{1}{2}$ болады.

$x_4 = -\frac{1}{2}$ түбірі берілген теңдеу үшін бөгде түбір болғандықтан, берілген теңдеудің үш түбірі болады: $x_1 = 4 - \sqrt{15}$, $x_2 = 4 + \sqrt{15}$, $x_3 = -2$.

Кейбір жағдайларда теңдеудің шешімдерін әртүрлі сан аралықтарында зерттеу арқылы табуға болады.

Дискуссия

Стандартты емес трансцендентті теңдеулерді шешудің стандартты емес әдістері нақты шешімдерді табудың тиімді құралдарын ұсынып қана қоймайды, сонымен қатар математикалық ұғымдар туралы түсінігімізді байытуға ықпал ететінін байқадық.

Түрлендірулер нәтижесінде немесе айнымалыны сәтті ауыстыру арқылы кез-келген $f(x)=g(x)$ теңдеуін белгілі бір шешу алгоритмі бар стандарт түрге келтіруге бола бермейді. Мұндай жағдайларда функцияның анықталу облысын, монотондылығын, шенелгендігін, тақ, жұптылығын және т. б. қасиеттерін пайдаланудың дұрыс болатыны мысалдардан көрінеді.

Функцияның монотондылығын пайдалану барысында теңдеудің құрамындағы $f(x)$, $g(x)$ функцияларының аргументтің қандай да бір аралығында өспелі немесе кемімелі екендігін анықтап, олардың қосындысының, айырмасының монотондылығы анықталады. Егер функция монотонды болса, онда функцияның әрбір мәні үшін аргументтің бір ғана мәні сәйкес келеді. Осы тұжырымды ескеріп, қарастырылып отырған аралықта теңдеудің шешімін табуға мүмкіндік туады.

Функцияның шенелгендігін стандартты емес теңдеулерді шешуде тиімді қолдануға болады. $f(x)=g(x)$ теңдеуінде $|f(x)|\le a$ болса,аргументтің қандай мәндерінде $|g(x)|\le a$ шартының орындалатындығын зерттейміз.

$f(x)=g(x)$ теңдеуінің құрамындағы $f(x)$, $g(x)$ функциялары тақ немесе жұп болып, қандай да бір сан аралығындағы x_0 саны теңдеудіңтүбірі болса, $-x_0$ саны да түбірі болатындығын ескеру қажет, яғни теңдеудің бір түбірінің бар болуы оның екінші түбірінің табылуын қамтамасыз етеді.

Функцияның қасиеттерін пайдаланудан басқа теңдеулерді шешудің басқа стандартты емес әдістері бар. Кейде алгебралық теңдеудің шешімі оның екі бөлігін де белгілі бір функцияға көбейту арқылы айтарлықтай жеңілдейді. Бұл жағдайда көбейтілген көбейткіштің түбірлеріне байланысты артық түбірлердің пайда болуы мүмкін екендігін есте ұстаған жөн. Сондықтан бастапқы теңдеуге эквивалент теңдеу алу үшін теңдеуді оның мүмкін мәндер жиынында шешімі болмайтын көбейткішке көбейту керек. Ал егер берілген теңдеудің мүмкін мәндер жиынында шешімі бар болатын көбейткішке көбейтсек, алынған түбірлердің әрқайсысын бастапқы теңдеуге қойып, тексеру қажет, яғни *жасанды тәсілдер* трансцендентті стандарт емес теңдеулерді шешуде тиімді қолданылады.

Жоғарыда келтірілген мысалдар стандартты емес трасцендентті теңдеулерді шешуде таңдалатын әдістің берілген теңдеудің түріне, оның құрамындағы функциялардың қасиеттеріне, мүмкін мәндер жиынына тікелей тәуелді екенін көрсетеді. Әрбір мысалды шығаруда қолданылған тәсілдер оқушыны дайын алгоритмді механикалық түрде қолдануға емес, есептің құрылымын талдауға, тиімді әдісті салыстырып таңдауға үйретеді.

Қорытынды

Стандартты емес теңдеулерді шешудің сан алуан әдістері математикада және оның қолданыстарында маңызды рөл атқарады, стандартты әдістермен әрдайым шешілмейтін есептерде шешімдерді талдау және табу құралдары ұсынылады. Бұл әдістерге функцияның монотондылығын, шенелгендігін, жұптылығын, туындысын, мүмкін мәндер жиынын пайдалану, теңдеуді функцияға көбейту, сондай-ақ функцияны аралықта зерттеу сияқты әртүрлі әдістер кіреді.

Стандартты емес теңдеуді шешу әдісін таңдау мен оны зерттеу қатар жүргізіледі. Оқушыларды берілген теңдеуді шешудің бірнеше тәсілдерінің ішінен тиімдісін таңдап алуға, сонымен қатар бірнеше тәсілмен шығарып, әртүрлі тәсілдерді меңгертуге үйрету маңызды. Мысалы, берілген теңдеу $n-$ші дәрежелі көпмүшеден тұрса, Безу теоремасын қолдануды да қамтамасыз ету керек. Бұл әдістерді қолдану математиканың әртүрлі салаларында кездесетін күрделі теңдеулерді шешудегі қиындықтарды жеңуге мүмкіндік береді. Жүйелі тәсіл және функциялардың қасиеттерін терең талдау арқылы бұл әдістер теңдеулердің ерекшеліктерін анықтауға және олардың шешімдерін жоғары дәлдікпен табуды қамтамасыз етеді.

Алайда, бұл әдістерді тиімді қолдану көбінесе терең математикалық білім мен негізгі ұғымдарды түсінуді қажет ететіндігін ескеру қажет. Сонымен қатар, стандартты емес теңдеулердің шешіміне жету үшін оқушыдан мұқият талдау мен күрделі есептеулерді жүргізу талап етеді.

Дегенмен, стандартты емес теңдеулерді шешу әдістерін дамыту және жетілдіру қазіргі математикада белсенді зерттеу саласы болып қала береді. Осы саладағы қосымша зерттеулер жаңа әдістер мен алгоритмдердің дамуына әкелуі мүмкін, бұл көптеген мәселелерді шешуге мүмкіндік береді және математикалық талдауды қол жетімді және тиімді етеді [10].

Стандартты емес теңдеулерді шешудің барлық тәсілдерін қарастырып шығу мүмкін емес. Жоғарыда қарастырылған мысалдардан стандартты емес теңдеулер оқушылардың меңгерген материалдарын шығармашылықпен ұғынуына септігін тигізеді және мына қабілеттердің:

1. синтез және анализ, салыстыру, ұқсастық, классификация сияқты қарапайым ойлау әрекеттерінің жоғары деңгейде қалыптасуына;
2. болжамдар мен шешімдер нұсқаларын және ерекше идеялар ұсына алатын ойлау белсенділігінің жоғары деңгейде жетілуіне;
3. еркін ойлау әрекетінен көрінетін ұйымшылдық пен ұйымдастырушылықтың жоғары деңгейге дамуына ықпал етеді [11].

Білім алушы оқу мен тәжірибенің теориялық негізделген тәсілін біліп, оны кез келген жағдайда қолдануды немесе кездескен мәселені шешуге тың тәсілдерді өздігінен таба алауға бейімделеді. Оған баратын жолдардың бірі – стандартты емес есептерді шығарту.

Қарастырылған есептер математикалық үйірмеде, сыныптан тыс сабақтарда, олимпиадаға дайындауда, сондай-ақ қорытынды - қайталау сабақтарында қолдану арқылы стандартты емес тәсілдермен шешілетін теңдеулерді дәстүрлі емес әдістермен шығаруға, тиімді тәсілдерді іздеуге оқушыларды баулиды.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

[1] Теуш Б.Л. Уравнения и неравенства. Задачи повышенной сложности. Пособие для подготовки к ЕГЭ. М.: УРСС, 2013. – 208 с.

[2] Козлов Г.А. Учись решать нестандартные задачи: Методическое руководство для учащихся 7-10 классов. Полиграфия, 2013. – 123 с.

[3] Супрун В.П. Математика для старшеклассников. Нестандартные методы решения задач. М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 272 с.

[4] Апышев О.Д., Мадияров М.Н., Ергалиев Е.К. Стандартты емес теңдеулерді шешу әдісі: әдістемелік құрал. Өскемен: Берел, 2017. – 63 б.

[5] Канель-БеловА.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. М.: МЦМНО, 2008. – 96 с.

[6] Нургабыл Д.Н., Саткулов Б.Б. Формирование и развитие математической грамотности в контексте программной концепции PISA-2021. Ясауи университетінің Хабаршысы. Ғылыми журнал, 3(129), 2023. – 267-281 б.

[7] Рахымбиұлы Н., Берикханова Г.Е. Стандартты емес есептерді шешуде туындыны қолдану. Математика және физика, 3(129), 2023. – 5-8 б.

[8] Казакбаева Г.К., Назарова К.Ж. Стандартты емес есептерді шешуде математикалық анализ элементтерін қолданудың тиімділігі. Ясауи университетінің Хабаршысы. Ғылыми журнал, 1(131), 2024. – 268-281 б.

[9] Мұсабеков М., Қожабаев К. Стандартты емес есептерді шығаруда зерттеушілік қызмет элементтерін пайдалану. Информатика, физика, математика, 1, 2000. – 16-17 б.

[10] Искакова М.Т. Орта мектепте оқушыларды математикалық есептерді стандарты емес тәсілдермен шығартуға үйрету мәселелері. «Білім беру жүйесін модернизациялау: тенденциялар, проблемалар және перспективалар» ХҒПК материалдары, Алматы, 2019. – 379-382 б.

[11] Искакова М.Т., Босқынбай Н. Решение олимпиадных задач как метод творческого мышления учащихся на уроках математики. Достижения науки и образования, 2(82), 2022. – 81-85 с.

References

[1]Teush B. L. Uravneniya i neravenstva. Zadachi povyshennoy slozhnosti. Posobie dlya podgotovki k EGE [Equations and inequalities. Problems of high complexity. A manual for preparing for the Unified State Examination]. URSS. 2013. 208 p.

[2] Kozlov G. A. Uchis' reshat' nestandartnye zadachi: Metodicheskoe rukovodstvo dlya uchashchikhsya 7-10 klassov [Learn to solve non-standard problems: Methodological guide for students of grades 7-10]. Poligrafiya. 2013. 123 p.

[3] Suprun V. P. Matematika dlya starsheklassnikov. Nestandartnye metody resheniya zadach [Mathematics for high school students. Non-standard methods of solving problems]. Knizhniydom «Librokom». 2009. 272 p.

[4]Apyshev O. D., Madiyarov M. N., Ergaliev E. K. Standartty emes tengdeulerdi sheshu adisi: adistemelik qural [Method for solving non-standard equations: methodological guide]. Oskemen, Berel. 2017. 63 p.

[5] Kanel-Belov A. Ya., Koval'dzhi A. K. Kak reshayut nestandartnye zadachi [How non-standard problems are solved]. MTsMNO. 2008. 96 p.

[6]Nurgabyl D. N., Satkulov B. B. Formirovanie i razvitie matematicheskoy gramotnosti v kontekste programmnoy kontseptsii PISA-2021 [Formation and development of mathematical literacy in the context of the program concept PISA-2021]. Yasaui universitetining Khabarshysy. Gylymi zhurnal, 3(129), 2023. pp. 267-281.

[7]Rakhymbiuly N., Berikhanova G. E. Standartty emes esepterdi sheshude tuyndyny qoldanu [Application of the derivative in solving non-standard problems]. Matematika zhane fizika, 3(129), 2023. pp. 5-8.

[8]Kazakbaeva G. K., Nazarova K. Zh. Standartty emes esepterdi sheshude matematikalyq analiz elementterin qoldanudyng tiimdiliki [Effectiveness of using elements of mathematical analysis in solving non-standard problems]. Yasaui universitetining Khabarshysy. Gylymi zhurnal, 1(131), 2024. pp. 268-281.

[9]Musabekov M., Qozhabaev K. Standartty emes esepterdi shygaruda zertteushilik qyzmet elementterin paidalanu [Use of elements of research activity in solving non-standard problems]. Informatika, fizika, matematika, 1, 2000. pp. 16-17.

[10] Iskakova M. T. Orta mektepte oqushylardy matematikalyq esepterdi standartty emes tasildermen shygartuga uiretu maseleleri [Problems of teaching secondary school students to solve mathematical problems in non-standard ways]. «Bilim beru zhuiesin modernizatsiyalau: tendentsiyalar, problemalar zhane perspektivalar» KhGPK materialdary, Almaty, 2019. pp. 379-382.

[11] Iskakova M. T., Bosqynbai N. Reshenie olimpiadnykh zadach kak metod tvorcheskogo myshleniya uchashchikhsya na urokakh matematiki [Solving olympiad problems as a method of creative thinking of students at mathematics lessons]. Dostizheniya nauki i obrazovaniya, 2(82), 2022. pp. 81-85.