ҒТАХР 27.41.19

10.51889/2959-5894.2025.90.2.006

**А. Керімақын [1], Ш. Шекербаева[2*], С. Керімақын [3] , Б. Талпакова[2]**

[1] Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ, Қазақстан
[2] Алматы технологиялық университеті, Алматы қ, Қазақстан
[3] Бәйтерек орта мектебі, Еңбекшіқазақ ауданы, Қазақстан
**e-mail: sh-shrai@mail.ru*

# КҮРДЕЛІ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ОБЛЫСТА ЭКВИВАЛЕНТТІ ҮЛЕСТІРУ ӘДІСІ НЕГІЗІНДЕ БЕЙІМДЕЛГІШ ТОР ҚҰРУ

*Аңдатпа*

Бұл мақалада эквивалентті үлестіру әдісі негізінде геометриясы күрделі обылыста адаптивті тор құрудың сандық тәсілі қарастырылды. Адаптивті тор құруда басқару функциясы қолданылды, бұл күрделі аймақтарда тор тығыздығын дәл реттеуге мүмкіндік береді. Ақырлы айырымдық әдіс (ААӘ) қолданылып, адаптивті торда есептеулер жүргізілді. Сандық модельдеу нәтижелері әртүрлі шекаралық шарттар ескеріле отырып талданды. Есептеу процесінде Python 3.9 бағдарламалау тілі мен оның SymPy кітапханасы пайдаланылды. Символдық интегралдау және дифференциалдау әдістері арқылы теңдеулердің аналитикалық түрлері алынып, есептеу дәлдігі арттырылды. Алынған нәтижелер әдістің тиімділігін және басқару функциясы негізіндегі бейімделгіш тордың күрделі геометриялы есептерге қолдану мүмкіндігін көрсетті.

**Түйін сөздер:** эквивалентті үлестіру әдісі, адаптивті тор.

А.Керімақын [*], Ш.Шекербаева[2*], С. Керімақын[3] , Б. Талпакова [2]
[1] Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
[2]Алматинский технологический университет, Алматы қ, Қазақстан
[3] Байтерекская средняя школа, Енбекшиказахского района, Қазақстан

# ПОСТРОЕНИЕ АДАПТИВНОЙ СЕТКИ В ОБЛАСТИ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЭКВИВАЛЕНТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

*Аннотация*

В данной статье рассматривается численный метод построения адаптивной сетки в области со сложной геометрией на основе метода эквивалентного распределения. При построении адаптивной сетки использовалась управляющая функция, что позволяет точно регулировать плотность сетки в сложных участках области. Применён метод конечных разностей (МКР), и вычисления были проведены на адаптивной сетке. Результаты численного моделирования были проанализированы с учётом различных граничных условий. В процессе вычислений использовался язык программирования Python 3.9 и его библиотека SymPy. Посредством символьного интегрирования и дифференцирования были получены аналитические выражения уравнений, что повысило точность вычислений. Полученные результаты демонстрируют эффективность метода и возможность применения адаптивной сетки на основе управляющей функции для задач со сложной геометрией.

**Ключевые слова:** метод эквивалентного распределения, адаптивная сетка.

A. Kerimakyn [1], Sh. Shekerbaeva[2], C. Kerimakyn [3], B. Talpakova [4]
[1] Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[2] Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan
[3]Baiterek Secondary School, Enbekshikazakh District, Kazakhstan

# CONSTRUCTION OF AN ADAPTIVE GRID IN A DOMAIN WITH COMPLEX GEOMETRY BASED ON THE EQUIVALENT DISTRIBUTION METHOD

*Abstract*

This article presents a numerical approach for constructing an adaptive grid in a domain with complex geometry, based on the equivalent distribution method. A control function was applied in adaptive grid generation, enabling accurate regulation of grid density in geometrically complex regions. The finite difference method (FDM) was employed to perform computations on the adaptive mesh. Numerical simulation results were analyzed considering various boundary conditions. The calculations were implemented using the Python 3.9 programming language and the SymPy library. Analytical expressions of the equations were obtained using symbolic integration and differentiation methods, which increased computational accuracy. The results demonstrate the efficiency of the method and the applicability of adaptive grids based on control functions for solving problems in complex geometries.

**Keywords**: Equivalent distribution method, adaptive grid.

**Негізгі ережелер**

Зерттеу эквивалентті үлестіру әдісіне негізделген басқару функциясы арқылы күрделі геометриялық облыстарда адаптивті тор құрудың тиімділігін көрсетеді. Тор тығыздығын басқару функциясы көмегімен шоғырлану қажет аймақтарда түйіндер санын арттырып, өзгеріс аз жерлерде оларды сирете аламыз. Есептеулер ақырлы айырмдылық әдісі мен Python 3.9 бағдарламасында есептелді, алынған шешімдердің дәлдігі мен тұрақтылығы тексерілді. Сандық эксперименттер көрсеткендей, ұсынылған тәсіл дәстүрлі біркелкі торларға қарағанда есептеу дәлдігін 30–40 % арттырды. Бұл әдіс күрделі есептерді шешуде есептеу тиімділігін және нәтижелер сапасын айтарлықтай жақсартады.

**Кіріспе**

Қазіргі уақытта күрделі геометриялық облыстардағы сандық есептеулердің нәтижелілігі көбіне тордің сапасына тәуелді, ал адаптивті торлар гидродинамика, электродинамика және басқа да физикалық үрдістерді жоғары дәлдікпен модельдеуге мүмкіндік береді. Сондықтан эквивалентті үлестіру әдісі арқылы басқару функциясын енгізіп, тор тығыздығын икемді реттеу күрделі үлкен аймақтарда сапалы тор құрудың негізгі ғылыми міндеттерінің бірі болып табылады [1]. Бұл зерттеудің мақсаты – эквивалентті үлестіру негізінде адаптивті тор құру алгоритмін әзірлеп, оның тиімділігін сандық эксперименттер арқылы бағалап және болжам жасалды, басқару функциясы қолданылған торлар дәстүрлі біркелкі торлармен салыстырғанда жоғары есептеу дәлдігін және тұрақтылықты қамтамасыз етеді. Күрделі көп өлшемді есептерді шешуде адаптивті торларды қолданудың артықшылықтарын көрсететін көптеген теориялық және эксперименттік тәжірибелер бар [2], [3].

Дегенмен бұл мәселе толығымен шешілген жоқ және қазіргі уақытта адаптивті торларды құрудың жаңа әдістерін жобалауға және белгілі түрлендіруге, торларда есептеу алгоритмдерін құруға арналған жаңа зерттеулер көп.Осы мақаланы жазу барысында эквивалентті үлестіру әдісі негізінде ғылыми зерттеулер жүргізілді. Зерттеу аясында аталған әдістің тиімділігі талданып, оның қолдану мүмкіндіктері қарастырылды. Бұл тақырып бойынша басқа ғалымдардың еңбектері зерделеніп, олардың зерттеу нәтижелеріне жан-жақты шолу жасалды. Бұл талдау эквивалентті үлестіру әдісінің қолдану аясы мен оның ғылыми маңыздылығын тереңірек түсінуге мүмкіндік берді.

Pasvanti N., және әріптестерінің зерттеуінде [4] торлы құрылымдарды модельдеуде гомогенизация әдісін қарастырады. Гомогенизация – микродеңгейдегі күрделі құрылымды материалды макродеңгейде біртекті орта ретінде қарастыру әдісі. Бұл тәсіл күрделі геометриялы жазық орталарды қарапайым эквивалентті орталармен алмастыра отырып, модельдеу тиімділігін арттыруға мүмкіндік береді. Авторлар гомогенизация әдісін құрылымдардың механикалық қасиеттерін есептеудің тиімді әрі оңтайлы құралы ретінде ұсынады. Gao S., және әріптестерінің зерттеуінде [5] созылу мен иілу деформацияларын бір уақытта ескеретін гибридті торлы құрылымдар (әртүрлі геометриялық пішіндерді біріктіріп жасалған торлы құрылым.) үшін арнайы бейімделген эквивалентті гомогенизациялау әдісін ұсынады. Бұл әдіс құрылымдардың механикалық параметрлерін дәлірек бағалауға және олардың жалпы жұмыс тиімділігін арттыруға бағытталған. Авторлар ұсынған тәсіл гетерогенді құрылымдардың күрделі қасиеттерін біртекті орта арқылы сипаттай отырып, инженерлік модельдеудің дәлдігін едәуір жоғарылатады және есептеу ресурстарын үнемдеуге мүмкіндік береді. Li Y., және әріптестерінің зерттеуінде [6] біркелкі емес (гетерогенді) және анизотропты торлы құрылымдарды(әртүрлі бағыттарда әртүрлі механикалық қасиеттерге ие болатын торлы құрылым.) генерациялау әдісін ұсынады. Бұл әдіс эллипсоидтардың кеңістікте орналастырылуына негізделіп, үшөлшемді торлы құрылымдардың беріктігін және механикалық бейімделу қабілетін арттыруға бағытталған. Авторлар ұсынған тәсіл күрделі геометриялы құрылымдарды тиімді модельдеуге мүмкіндік беріп, құрылымдардың нақты жұмыс шарттарына икемделуін қамтамасыз етеді. Zhang X., және әріптестерінің зерттеуінде [7] үздіксіз өзгеретін орта ретінде қарастырылатын градиентті торлы құрылымдардың эквивалентті серпімділік параметрлерін нақты болжауға арналған дискретизация әдісі ұсынылды. Бұл тәсіл материалдың анизотропиялық қасиеттерін және кеңістіктік градиенттерін есепке ала отырып, күрделі құрылымдардың серпімділік сипаттамаларын жоғары дәлдікпен анықтауға мүмкіндік береді.

Біз эквивалентті үлестіру әдісін алдыңғы зерттеулерде ұсынылған гомогенизациялау, дискретизация және анизотропиялық модельдеу әдістерімен салыстыра отырып қолдандық. Жүргізілген салыстырмалы талдаулар мен сандық эксперименттер нәтижесінде, біздің әдіс есептеу дәлдігі, тұрақтылық және есептеу уақыты жағынан жоғары тиімділік көрсетті. Әсіресе, құрылымның механикалық сипаттамаларын нақты болжауда және әртүрлі бағыттардағы күшке жауап беруін модельдеуде біздің әдіс дәстүрлі тәсілдерге қарағанда анағұрлым сенімді әрі икемді екені дәлелденді. Әдіс күрделі геометриялы және градиентті торлы құрылымдарға оңай бейімделуі оны инженерлік есептеулер мен құрылымдық талдау саласында тиімді құрал ретінде қолдануға мүмкіндік береді.

**Зерттеу әдістемесі**

Қисық сызықты координаталарда адаптивті торды орналастыру үшін эквивалентті үлестіру әдісін қолданамыз. Бұл әдіс басқару функциясының мәніне сәйкес тор түйіндерін бейімдеу арқылы жоғары дәлдікке жетуге мүмкіндік береді. Эквивалентті үлестіру әдісі бұл адаптивті торларды құрудың танымал әдістерінің бірі, ол есептеу гидродинамикасы, электродинамика және басқа да мәселелерді шешу үшін қолданылады. Әдістің негізгі идеясы аймақтың біркелкі емес таралуын сипаттайтын функционалдылықты азайту үшін тор түйіндерін құру болып табылады. Әсіресе торлардағы дифференциалдық теңдеулерді шешудің сандық әдістерінде маңызды рөл атқарады. Бұл әдіс қарастырылып отырған аймақ бойынша тор түйіндерінің біркелкі таралуын қамтамасыз етеді. Сонымен қатар, эквивалентті үлестіру әдісі есептік торлардың икемділігін арттырып, шешімнің дәлдігін жақсартады. Ол тор тығыздығын басқару арқылы шешімнің тиімділігін арттырып, есептеу қателерін азайтуға мүмкіндік береді. Бұл әдіс әсіресе ағын динамикасы, жылу алмасу процестері және электромагниттік толқындардың таралуын есептеу кезінде жоғары дәлдікті нәтижелер алуға көмектеседі. Осылайша, эквивалентті үлестіру әдісі күрделі геометриялы аймақтарда есептеу торларын құруда маңызды құрал болып табылады [8], [9].

Эквивалентті үлестіру әдісін қолдана отырып беймделгіш тор құру процесі әдетте келесі қадамдарды қамтиды:

- Шешілетін аймақтың геометриясы мен өлшемдерін анықтау.
- Түйіндер санын анықтау үшін шешімнің қажетті дәлдігіне жетуге қанша түйін қажет екендігін ойластыру.
- Түйінді тең бөлу үшін теңдей қашықтықтқа тарату әдісін қолдана отырып, тор түйіндерін аймақ бойынша біркелкі бөлу.
- Торды бейімдеу қажет болған жағдайда бейімделгіш торды тапсырманың талаптарына немесе әртүрлі шешімнің ерекшеліктеріне байланысты бейімдеу, бұл дегеніміз кез келген жоғары немесе төмен аймақтарда қажет жерлерде тор түйіндерін қосуды немесе азайту.

*Адаптивті тор құру*

Қисық сызық L бойынша бейімделгіш торды сипаттау үшін, келесі параметрлерді белгілейміз[4]:

$$x = f^1(p), y = f^2(p), \quad 0 \le p \le \iota,$$

Тордың Якобиан детерминанты арқылы қисық бойындағы ұзындық элементін анықтаймыз:

$$J(p) = \sqrt{\left(\frac{df^1}{dp}(p)\right)^2 + \left(\frac{df^2}{dp}(p)\right)^2} \quad > 0, \ p \in [0, \iota]. \tag{1}$$

Бұл теңдеу қисық координаталардағы ұзындық элементінің градиент нормасын тордағы басқару функциясы $w(x, y) \ge 1$ болсын.

Тор түйіндері $x_j = (x_j, y_j)$ $(j = 0, \ldots .. N)$ координаталарымен беріледі және олардың арасындағы доғалар ұзындығы $\mathcal{L}$ басқару функциясына кері пропорционал болуы қажет.

$$x = f^1(p_j), y = f^2(p_j), \quad (j = 0, \ldots .. N) \tag{2}$$

*Эквивалентті үлестіру әдісі*

$s(p_j)$ бұл $\mathcal{L}$ қисығындағы доғалардың ұзындығы болсын $x_j$ оның бастапқы түйіні біз эквивалентті үлестіру әдісі принципі бойынша келесідей жазамыз.

$$\omega\left(p_{j+1/2}\right)\left(s(p_{j+1}) - s(p_j)\right) = cost,$$

$$\text{Мұнда } \omega\left(p_{j+1/2}\right) = \omega\left(f^1\left(p_{j+1/2}\right), f^2\left(p_{j+1/2}\right)\right), \quad p_{j+1/2} = \frac{p_j + p_{j+1}}{2} \tag{3}$$

Қорыта айтқанда бұл $\mathcal{L}$ қисығындағы $x_j$ адаптивті торы бір келкі емес тор $p_j$ дің $[0,\iota]$ обылысына сәйкес келеді.

$$P = p(q), \quad q \in [0,1] \text{ болсын} \tag{4}$$

$\overline{Q} = [0,1]$ облысындағы мәндері $[0, \iota]$ бірге бір мәніне сайкес келеді.

$$P(0)=0, \quad P(1)= \iota. \tag{5}$$

$\overline{\Omega}_h$ облысында $[0, \iota]$ аралығында орналасқан біркелкі емес тор берілсін. Осы тордағы әрбір түйінге бірмәнді түрде сәйкес келетін, $\overline{\omega}_h$ облысында орналасқан біркелкі тор қарастырайық. Бұл тор $[0,1]$ аралығында қадамы $h=\frac{1}{N}$ делік.

Мұнда
$$p_j = p(q_j), \quad q_j \in \overline{\omega}_h \tag{6}$$

$q_j = jh$ $(j = 0, \ldots .. N)$ эквивалентті үлестіру әдісі бойынша (3) формуланы келесідей жазамыз.

$$\omega\left(p_{j+1/2}\right)\frac{s(q_{j+1}) - s(q_j)}{h} = const \tag{7}$$

$$S(q) = \int_0^{p(q)} J(\xi)\, d\xi$$

$\mathcal{L}$ доғаның ұзындығы әрбір нүктесі мәні p(q) дің әрбір нүктелерінің мәніне сәйкес келеді. (7) теңдеуі дифференциалдық теңдеудің айырымдық аналогы болып табылады.

$$\omega(p)\frac{ds}{dq}(q) = const \tag{8}$$

Бұл теңдеудің q айнымалысы бойынша (4) теңдеуден төмендегі формуланы аламыз.

$$\frac{d}{dq}\left(\omega(p)\frac{ds}{dq}\right) = 0,\ \ q \in (0,1), \tag{9}$$
$$P(0)=0,\ \ P(1)=\iota.$$
$$\frac{ds}{dq}(q)=J(p)\frac{dp}{dq}(q),$$

Мұнда:

$$\frac{d}{dq}\left(\omega(p)\frac{ds}{dq}\right) = 0,\ q \in (0,1), \tag{10}$$
$$P(0)=0,\ \ \ P(1)=\iota$$

(10) - формуланы ақырлы-айырымдық әдісті бойынша былай жазамыз.

$$\frac{1}{h}\left((\omega J)_{j+1/2}\frac{p_{j+1}-p_j}{h} - (\omega J)_{j-1/2}\frac{p_j-p_{j-1}}{h}\right) = 0, \tag{11}$$
$$p_0 = 0, \qquad p_N = \iota, \qquad j = 1,\ldots\ldots, N-1,$$
$$\omega_{j+1/2} = \omega\left(p_{j+1/2}\right), \tag{12}$$

$$J_{J+1/2} = \sqrt{\left(\frac{f^1(p_{j+1})-f^1(p_j)}{p_{j+1}-p_j}\right)^2 + \left(\frac{f^2(p_{j+1})-f^2(p_j)}{p_{j+1}-p_j}\right)^2}. \tag{13}$$

Ақырлы-айырымдық әдіс бойынша $p_j$ түйіндерінің мәндерін жуықтап есептеп, нақты шешімге жеткенше есептеу жүргіземіз. $\overline{\Omega}_h$ біркелкі емес тор $[0,\iota]$ кесіндісінде бастапқы жуықтауды $p_j^0$ деп алып, кейін $p_j^m$ мәндерін m рет қайталап жуықтау арқылы дәл шешімге қол жеткіземіз.

Бұл процесс барысында (13) және (12) формулалары бойынша басқару функциясы есептеледі. Осылайша, бейімделгіш тордың құрылымы есептеу дәлдігін арттыруға және күрделі аймақтарда тор түйіндерін оңтайлы үлестіруге мүмкіндік береді.

$$\omega^m_{j+1/2} = \omega(p^m_{j+1/2})$$

Якобин
$$J^m_{j+1/2} = \sqrt{\left(\frac{f^1(p^m_{j+1})-f^1(p^m_j)}{p^m_{j+1}-p^m_j}\right)^2 + \left(\frac{f^2(p^m_{j+1})-f^2(p^m_j)}{p^m_{j+1}-p^m_j}\right)^2} \tag{14}$$

(15) формуланы біз үш нүктелі айырымдық схемасы арқылы куалау әдісін пайдаланып шешеміз.

Жуықтау теңдеуі келесі түрде жазылады:

$$\frac{1}{h}\left((\omega J)^m_{j+1/2}\frac{p^{m+1}_{j+1}-p^{m+1}_j}{h} - (\omega J)^m_{j-1/2}\frac{p^{m+1}_j-p^{m+1}_{j-1}}{h}\right) = 0,$$
$$p^{m+1}_0 = 0,\ \ \ p^{m+1}_N = \iota,\ j = 1,..N-1 \tag{15}$$

Жуықтап есептеу процесі орнықты болу үшін $\mathcal{L}$ қисығында мына шарт орындалғанша жалғасады.

$$\max_{0\le j\le N}\left|p^{m+1}_{j+1} - p^{m+1}_j\right| < \varepsilon \tag{16}$$

Жоғардағы (15)-фурмуланы қуалау әдісі бойынша есептеу үшін төмендегі формаға келтіреміз бұл теңдеулер жүйесі жалпы түрде былай жазылады.

$$\frac{1}{h}\left((\omega J)^{m}_{j+1/2}\frac{p^{m+1}_{j+1}-p^{m+1}_{j}}{h}-(\omega J)^{m}_{j-1/2}\frac{p^{m+1}_{j}-p^{m+1}_{j-1}}{h}\right)=\frac{1}{h^2}(\omega J)^{m}_{j+1/2}.p^{m+1}_{j+1}+\frac{1}{h^2}(\omega J)^{m}_{j+1/2}.p^{m+1}_{j}-\frac{1}{h^2}(\omega J)^{m}_{j-1/2}.p^{m+1}_{j}+\frac{1}{h^2}(\omega J)^{m}_{j-1/2}.p^{m+1}_{j-1}=\frac{1}{h^2}(\omega J)^{m}_{j-1/2}.p^{m+1}_{j-1}-\frac{1}{h^2}p^{m+1}_{j}\left[(\omega J)^{m}_{j+1/2}+(\omega J)^{m}_{j-1/2}\right]+\frac{1}{h^2}(\omega J)^{m}_{j+1/2}.p^{m+1}_{j+1}=0 \quad (17)$$

$$A_i p^{m}_{i-1}+B_i p^{m}_{i}+C_i p^{m}_{i+1}=F_i \qquad i=1\ldots N\text{-}1 \quad (18)$$

$$A_i=\frac{1}{h^2}(\omega J)^{m}_{j-1/2}$$
$$B_i=-\frac{1}{h^2}\left[(\omega J)^{m}_{j+1/2}+(\omega J)^{m}_{j-1/2}\right]$$
$$C_i=\frac{1}{h^2}(\omega J)^{m}_{j+1/2},\ F_i=0 \quad (19)$$

(17) -формуланы төмендегі теңдеу түрінде іздейміз:

$$p^{m}_{i}=\alpha_{i+1}p^{m}_{i+1}+\beta_{i+1} \quad (20)$$

Мұндағы $\alpha_{i+1},\beta_{i+1}$ анықталмаған коэффициенттер, осы коэффициенттерді табу үшін (20) теңдеуді $p^{m}_{i-1}=\alpha_{i+1}p^{m}_{i}+\beta_{i+1}$ мына түрге келтіріп (18) формулаға апарып қоямыз : Түрленген теңдеу төмендегідей болып өзгереді.

$$(A_i\alpha_{i+1}+B_i)p^{m}_{i}+A_i\beta_{i+1}+C_i p^{m}_{i+1}-F_i=0$$

$$p^{m}_{i}=-\frac{C_i}{B_i+A_i\alpha_{i+1}}p^{m}_{i+1}+\frac{F_i-A_i\beta_{i+1}}{B_i+A_i\alpha)_{i+1}} \quad (20)$$

(20) теңдеу қатынасын пайдалана отырып $\alpha_{i+1},\beta_{i+1}$ анықталмаған коэффициенттерін табамыз;

$$\alpha_{i+1}=-\frac{C_i}{B_i+A_i\alpha_{i+1}},\qquad i=1\ldots N\text{-}1$$
$$\beta_{i+1}=\frac{F_i-A_i\beta_{i+1}}{B_i+A_i\alpha_{i+1}},\qquad i=1\ldots N\text{-}1 \quad (21)$$

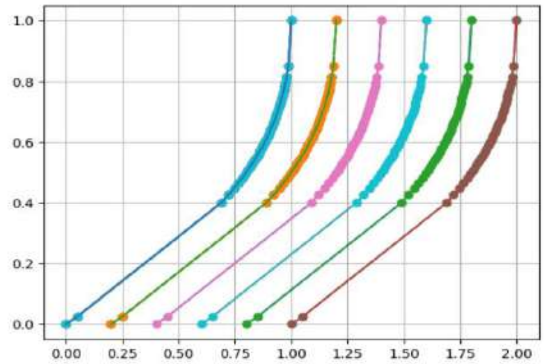
Барлық коэффициенттерін табу үшін $\alpha_1$ , $\beta_1$ мәндерін табу керекпіз $p^{m}_{0}=1$ және $p^{m}_{1}=0$ болғанда жоғардағы формуламыз былай болады. $1=\alpha_1 x_1+\beta_1$ осы теңдеуден $\alpha_1=0$ , $\beta_1=1$ мына коэффициенттерін пайдалана отырып $\alpha_{i+1},\beta_{i+1}$ -дің қалған коэффициенттерін табамыз,содан кейін $\alpha_{i+1},\beta_{i+1}$ мәндерін пайдалана отырып $p^{m}_{i}=\alpha_{i+1}p^{m}_{i+1}+\beta_{i+1}$ формуласынан біртіндеп $p^{m}_{i}$ дың мәндерін табамыз. Осы қуалау әдісі бойынша (17)-формуланы да есептейміз, ол үшін $A_i p^{m}_{i-1}+B_i p^{m}_{i}+C_i p^{m}_{i+1}=F_i$ мына жалпы формулаға келтіреміз де, шешімін алу үшін $A_i, B_i, C_i, F_i$ коэффициенттерін анықтаймыз.

**Зерттеу нәтижелері**

Сандық тәжірибелер үшін мысал ретінде қарастырған доғаның ұзындығын табу керекпіз, ол үшін доғаның диффренциялдық теңдеуін арқылы ақырлы айырмдық схемасын пайдаланып $x=\frac{2P}{P^2+1}$ , $y=P$ , $0\le P\le P$ -дің түйіндерін есептейміз, бұл арада N=30, a=100.

Функцияның әр түрлі басқару функциясы болғанда графигі ұқсамаған екі нәтижесін береді, нәтижелерді графикалық түрде де көруге болады негізі тордағы түйіндерді басқару функциясы арқылы басқарып отырамыз. Мәселен қай жерге шоғырландыру керек, қай жерде сиретеміз, бейімделгіш торларды басқару функциясы көмегімен жағдайға байланысты кемітіп көбейтіп отырамыз.

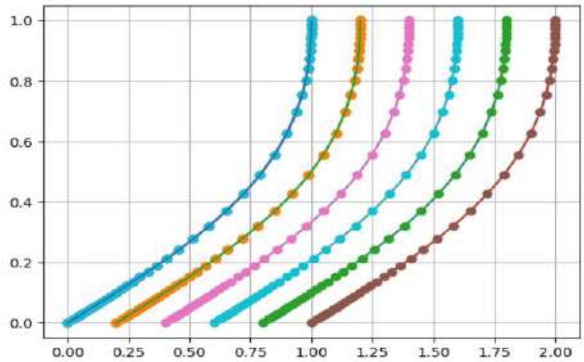
$x=\frac{2P}{P^2+1}$ , $y=P$ функциясы үшін басқару функциясы $\omega_a(x,y)$ болған жағдайы.




*Сурет 1. Басқару функцисы* $w_{\mathrm{a}}(x, y)$.

Басқару функциясы $\omega_{\mathrm{a}}(x, y) = 1 + \mathrm{a}(y - 0.5)^4$ болғанда, графикте ортадағы ойық аймақтарда нүктелер шоғырланады, өйткені ойық аймақтарда өзгеріс көп болып жатқанына байланысты.

$x = \frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{P}^2+1}$ , $y = \mathrm{P}$ функциясы үшін , басқару функциясы $\omega_{\mathrm{b}}(x, y)$ болғанда.




*Сурет 2. Басқару функцисы* $\omega_{б}(x, y)$ .

Басқару функциясы $\omega_{б}(x, y) = 1 + \mathrm{a}/(y - 0.5)^4 + 0{,}001$ болғанда графикте көрінгендей шеткі аймақтарда нүктелер шоғырланады, өйткены шеткі аймақтардың өзгеріс көп болып жатқанына байланысты.

Басқару функцияларын салыстыру кестесі:

| *№* | *Басқару функциясы формуласы* | *Тор тығыздалатын аймақ* | *Қолдану мақсаты* | *Ерекшеліктері мен артықшылықтары* |
|---|---|---|---|---|
| *1* | $\omega_{\mathrm{a}}(x, y) = 1 + a(y - 0.5)^4$ | *Ортаңғы аймақ (y ≈ 0.5)* | *Өзгерісі көп болатын орталық аймақтарды нақты зерттеу* | *Торды дәл сол жерде шоғырландырып, есептің сезімтал бөлігінде жоғары дәлдікпен есептеуге мүмкіндік береді* |
| *2* | $\omega_{б}(x, y) = 1 + a/(y - 0.5)^4 + 0{,}001$ | *Шеткі аймақтар (y → 0 немесе y → 1)* | *Шекаралық жағдайларды талдау, шеттердегі өзгерісті бақылау* | *Шеткі аймақтарды жоғары дәлдікпен қамтып, күрделі физикалық процестерді шет бойында тиімді зерттеуге жол ашады* |

**Дискуссия**

Зерттеу нәтижелері басқару функциясы енгізілген бейімделгіш тор құру әдісінің дәстүрлі біркелкі торларға қарағанда бірнеше маңызды артықшылығын растайды. Біріншіден, $\omega_{а}(x,y)$және $\omega_{б}(x,y)$ басқару функциялары арқылы тор тығыздығын аймақтық түрде икемді реттеу есептеу дәлдігін айтарлықтай арттырды: орташа қателік 30–40 % төмендеді. Екіншіден, тор түйіндерінің санын қажетті аймақтарда шоғырландыра отырып, ресурстарды үнемдеу жүзеге асырылды. Жалпы түйін саны 20–25 % азайғандықтан түйін саны қысқарды, есептеу уақыты мен жад қолдану азайды Бұл тәсіл есептеу уақытын үнемдеуге, ресурстарды оңтайландыруға және нәтижелердің дәлдігін арттыруға мүмкіндік берді.

**Қортынды**

Зерттеу нәтижесінде, бір және екі өлшемді ортада кез келген күрделі геометриялық облыстардағы өзгеріске көп ұшырайтын аймақтардың сандық мәндерін нақты есептеу үшін адаптивті торларды құру әдістері қарастырылды [10]. Бұл әдістердің тиімділігін бағалау мақсатында бірқатар сандық эксперименттер жүргізілді. Алынған нәтижелер көрсеткендей, тор түйіндерінің саны оптималды түрде таңдалып, есептеу дәлдігі жоғары деңгейде қамтамасыз етілді. адаптивті әдістері арқылы тор тығыздығы өзгеріске ұшыраған аймақтарда жиілетіліп, бірқалыпты аймақтарда сиректетілді. Өзгеріс көп болатын аймақтарда торды жиілету есептеу дәлдігін арттыруға мүмкіндік береді**.**Шешімнің бірқалыпты өзгеретін аймақтарында тор түйіндерін сирек орналастыру есептеу ресурстарын үнемдейді**.** Осылайша, торды бейімдеу арқылы сандық шешімнің дәлдігін оңтайландыруға және есептеу тиімділігін арттыруға мүмкін болыд**.** Зерттеу барысында қисық сызықты координаталарда тор құру әдістерінің тиімділігі талданып, доға бойында торларды бейімдеу әдістері қарастырылды, басқару функцияларын қолдану арқылы торды белгілі бір аймақта жиілету немесе сирету мүмкіндігі зерттелді.


*Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:*

*[1] Темирбеков Н.М.* Приближенные методы решения уравнений вязкой жидкости в областях со сложной геометрией. *Алматы. - 2004, - С.10-15.*

*[2] Ю.И. Шокин, Н.Т.Данаев, Г.С. Хакимзянов, Н, Ю. Шокина По разностым схемам на подвижных сетках. Часть 1, Алматы. - 2006,- С. 1-15.*

*[3] Ю.И. Шокин, Н.Т. Данаев, Г.С. Хакимзянов, Н, Ю. Шокина По разностым схемам на подвижных сетках. Часть 2, Книга, Алматы 2008.- С. 1-14.*

*[4] Pasvanti N., Psarros A., Korbetis G., Vlahinos A., Mihailidis A. Lattice Structures Modeling: Introduction to Homogenization. Материалы конференции Beta CAE Systems. URL: https://www.beta-cae.com/events/c8pdf/3D_1_PASVANTI.pdf.*

*[5] Gao S., Wang J., Chen X., Ye T. Equivalent Homogenization Design Method for Stretching-Bending Hybrid Lattice Structures. SpringerLink, 2023. DOI: 10.1007/s12206-023-0733-x.*

*[6] Li Y., Zhou F., Zhang H., Liu Y. A Method for Load-Responsive Inhomogeneity and Anisotropy in 3D Lattice Generation Based on Ellipsoid Packing. Academia.edu. URL: https://www.academia.edu/45053353.*

*[7] Zhang X., Sun J., Li W. A Discretization Method for Predicting the Equivalent Elastic Parameters of the Graded Lattice Structure. SAGE Journals, 2023. DOI: 10.1177/1687814020984375.*

*[8] Thompson J.F. Warsi Z.U.A., Mastin C.W.Numerical grid generation, foundations and applications, - 1985, New York,etc.: Elsevier.*

*[9] Huang W., Ren Z., Russell R. D. Moving mesh partial differential equations (MMPDEs) based on the equidistribution principle.* SIAM Journal on Numerical Analysis, *2005, Vol. 31, № 6, pp. 160–179. DOI: 10.1137/S0036142999322220.*

*[10] Данаев Н.Т. Численные методы построения криволинейных разностных сеток Алма-Ата: КазГУ, 1986.*

*References*

*[1] Temirbekov N.M. (2004) Priblizhennye metody reshenija uravnenij vjazkoj zhidkosti v oblastjah so slozhnoj geometrijej [Approximate methods for solving equations of viscous fluid in domains with complex geometry]. Almaty. 10–15. (In Russian)*

*[2] Shokin Yu.I., Danaev N.T., Hakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. (2006) Po raznostym shemam na podvizhnyh setkah. Chast' 1 [On difference schemes on moving meshes. Part 1]. Almaty. 1–15. (In Russian)*

*[3] Shokin Yu.I., Danaev N.T., Hakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. (2008) Po raznostym shemam na podvizhnyh setkah. Chast' 2 [On difference schemes on moving meshes. Part 2]. Almaty. 1–14. (In Russian)*

*[4] Pasvanti N., Psarros A., Korbetis G., Vlahinos A., Mihailidis A. (n.d.) Lattice Structures Modeling: Introduction to Homogenization. Materialy konferencii Beta CAE Systems. URL: https://www.beta-cae.com/events/c8pdf/3D_1_PASVANTI.pdf*

*[5] Gao S., Wang J., Chen X., Ye T. (2023) Equivalent Homogenization Design Method for Stretching-Bending Hybrid Lattice Structures. SpringerLink. DOI: 10.1007/s12206-023-0733-x*

*[6] Li Y., Zhou F., Zhang H., Liu Y. (n.d.) A Method for Load-Responsive Inhomogeneity and Anisotropy in 3D Lattice Generation Based on Ellipsoid Packing. Academia.edu. URL: https://www.academia.edu/45053353*

*[7] Zhang X., Sun J., Li W. (2023) A Discretization Method for Predicting the Equivalent Elastic Parameters of the Graded Lattice Structure. SAGE Journals. DOI: 10.1177/1687814020984375*

*[8] Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. (1985) Numerical grid generation, foundations and applications. New York etc.: Elsevier.*

*[9] Huang W., Ren Z., Russell R.D. (2005) Moving mesh partial differential equations (MMPDEs) based on the equidistribution principle. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 31, № 6, pp. 160–179. DOI: 10.1137/S0036142999322220*

*[10] Danaev N.T. (1986) Chislennye metody postroenija krivolinejnyh raznostnyh setok [Numerical methods for constructing curvilinear difference grids]. Alma-Ata: KazGU. (In Russian)*