МРНТИ 27.27.17

10.51889/2959-5894.2025.90.2.009

Ф.Ф. Майер[1], М.Г.Тастанов[1], А.А.Утемисова[1*], Б.А. Калаков [1]

[1]Костанайский региональный университет имени Ахмета Байтұрсынұлы,
г. Костанай Казахстан
*e-mail: anar_utemisova@mail.ru

ДВАЖДЫ ПОЧТИ ЗВЕЗДООБРАЗНЫЕ ФУНКЦИИ НА БАЗЕ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ ОПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА

Аннотация

В работе исследуются свойства некоторых классов дважды почти звездообразных и дважды почти выпуклых функций. Целью настоящей статьи является введение и исследование класса дважды почти звездообразных функций, включающего в качестве частных случаев как классические классы почти звездообразных функций, исследованные на первых этапах развития данной проблематики, так и некоторые классы дважды почти звездообразных функций, исследованные в последние годы. Это достигается за счет того, что в качестве базовой используется функция $h(z)$, звездообразная порядка $\alpha,\ 0 \le \alpha < 1$, что позволяет в качестве частных случаев рассматривать подклассы данного класса, когда $h(z)$ является не только звездообразной, но и выпуклой функцией. Методика исследований опирается на принцип подчиненности аналитических функций. К задачам исследования относится получение теорем роста (искажения) и радиусов звездообразности (выпуклости) классов дважды почти звездообразных (дважды почти выпуклых) функций. В статье получены теорема роста и радиус звездообразности порядка β введенного класса дважды почти звездообразных функций, рассмотрены частные случаи. Все результаты являются точными, в частных случаях приводят как к новым, так и к ранее известным результатам. С помощью определенной замены осуществлен переход от введенного класса дважды почти звездообразных функций к новому классу дважды почти выпуклых функций, для которого получены теоремы искажения, радиус выпуклости и рассмотрены частные случаи.

Ключевые слова: звездообразные функции, почти выпуклые функции, почти звездообразные функции, теорема роста, теорема искажения, радиусы звездообразности, радиусы выпуклости.

Ф.Ф. Майер[1], М.Г.Тастанов[1], А.А.Утемисова[1], Б.А. Калаков [1]
[1]Ахмет Байтұрсынұлы атындағы Қостанай өңірлік университеті, Қостанай қ., Қазақстан

БЕЛГІЛІ ТӘРТІПТІ ЖҰЛДЫЗ ПІШІНДІ ФУНКЦИЯЛАРЫНА НЕГІЗГЕН ҚОСУ ДЕРЛІК ЖҰЛДЫЗ ПІШІНДІ ФУНКЦИЯЛАР

Аңдатпа

Жұмыста екі рет дерлік жұлдыз тәрізді және екі рет дерлік дөңес функциялардың кейбір кластарының қасиеттері зерттелген. Бұл мақаланың мақсаты – ерекше жағдайлар ретінде осы мәселенің дамуының алғашқы кезеңдерінде зерттелген жұлдыз тәрізді дерлік функциялардың классикалық кластарын да, сондай-ақ соңғы жылдары зерттелген қос дерлік жұлдыз тәрізді функциялардың кейбір кластарын да қамтитын қос дерлік жұлдыз тәрізді функциялар класын енгізу және зерттеу. Бұл $h(z)$ zvezdoobrazna ғана емес, сонымен қатар дөңес функция болған кезде, бұл класстың ішкі сыныптарын ерекше жағдайлар ретінде қарастыруға мүмкіндік беретін zvezdoobraznaya тәртібі $\alpha,\ 0 \le \alpha < 1,$ базалық функция ретінде қолданылатындығына байланысты қол жеткізілді. Зерттеу әдістемесі аналитикалық функциялардың бағыныштылығы принципіне негізделген. Зерттеудің міндеттеріне екі есе дерлік жұлдыз тәрізді (қос дерлік дөңес) функциялардың жұлдыз тәрізді (дөңес) кластарының өсу (бұрмалау) және радиустарының теоремаларын алу кіреді. Мақалада екі есе дерлік жұлдыз тәрізді функциялардың енгізілген класының β ретті өсу теоремасы мен жұлдыз тәрізді радиусы алынып, ерекше жағдайлар қарастырылды. Барлық нәтижелер дәл болып саналады, кейбір жағдайларда олар жаңа және бұрын белгілі нәтижелерге әкеледі. Белгілі бір алмастыруды пайдалана отырып, енгізілген қос дерлік жұлдыз тәрізді функциялар класынан екі есе дерлік дөңес функциялардың жаңа класына көшу жүзеге асырылады, ол үшін бұрмалау теоремалары мен дөңес радиусы алынады және ерекше жағдайлар қарастырылады.

Түйін сөздер: жұлдыз тәрізді функциялар, дөңес дерлік функциялар, жұлдыз тәрізді дерлік функциялар, өсу теоремасы, бұрмалау теоремасы, жұлдыз тәрізді радиустар, дөңес радиустар.

F.F. Maiyer[1], M.G. Tastanov [1], A.A. Utemissova[1], B.A. Kalakov[1]
[1]Kostanay Regional University named after Akhmet Baitursynuly, Kostanay, Kazakhstan

DOUBLY CLOSE-TO-STARLIKE FUNCTIONS BASED ON STARLIKE FUNCTIONS OF A CERTAIN ORDER

Abstract

The paper studies the properties of some classes of doubly close-to-starlike and doubly close-to-convex functions. The objective of this paper is to introduce and study the class of doubly close-to-starlike functions, which includes as special cases both the classical classes of close-to-starlike functions, studied at the early stages of the development of this problem, and some classes of doubly close-to-starlike functions, studied in recent years. The research methodology is based on the principle of subordination of analytic functions. The objectives of the study include obtaining theorems of growth (distortion) and radii of starlikeness (convexity) of classes of doubly close-to-starlike (doubly close-to-convex) functions. This is achieved due to the fact that the function $h(z)$, a starlike function of order α, is used as the base function $0 \leq \alpha < 1$, which allows us to consider subclasses of this class as special cases when $h(z)$ is not only a starlike function, but also a convex function. In the article, a growth theorem and a of starlikeness radius of order are obtained.β introduced class of doubly close-to-starlike functions, special cases are considered. All results are exact, in special cases they lead to both new and previously known results. Using a certain substitution, a transition is made from the introduced class of doubly close-to-starlike functions to a new class of doubly close-to-convex functions, for which distortion theorems and the radius of convexity are obtained and special cases are considered.

Keywords: starlike functions, close-to-convex functions, close-to-starlike functions, growth theorem, distortion theorem, radii of starlikeness, radii of convexity.

Основные положения

В ходе исследования были получены точные теоремы роста (искажения) и радиусы звездообразности (выпуклости) некоторых классов дважды почти звездообразных (дважды почти выпуклых) функций. Широта исследуемых классов позволяет в частных случаях получать как новые оригинальные результаты по данной тематике, так и известные, в том числе классические, результаты. Также в качестве частных случаем приведены и результаты, полученные другими авторами за последние пять лет.

Введение

Будем рассматривать аналитические в единичном круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функции $f(z)$, нормированные условием $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, класс которых обозначим через $\mathcal{N}$. Для исследования функций $f(z)$ из $\mathcal{N}$ будем использовать аналитические в E функции $\varphi(z)$, $\varphi(0) = 1$, класс которых обозначим через $\mathcal{A}$. Его подклассом является класс $\mathcal{A}_n$ функций $\varphi(z)$, имеющих разложение вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \cdots, n \geq 1$.

Известными подклассами класса $\mathcal{N}$ являются классы $S^o(\alpha)$ и $S^*(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$, функций, выпуклых порядка α и звездообразных порядка α. Классы $S^o(\alpha)$ и $S^*(\alpha)$ определяются, соответственно, с помощью условий

$$1 + Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha, \;\; Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) > \alpha.$$

При этом, $S^o \coloneqq S^o(0)$ и $S^* \coloneqq S^*(0)$ – классы выпуклых и звездообразных функций, области значений которых обладают простой геометрической структурой. В случае звездообразной функции каждая точка области значений $f(E)$ может быть соединена с точкой $w = 0$ отрезком, целиком лежащим внутри этой области. Это свойство очень важно во многих теоретических вопросах из разных отраслей знаний. А любая выпуклая функция является звездообразной относительно всех точек $w \in f(E)$.

В статье [1 Рид] был представлен класс K^* почти звездообразных функций (close-to-starlike functions) $f(z)$, для каждой из которых можно найти звездообразную функцию $g(z)$ такую, что выполняется условие

$$Re\frac{f(z)}{g(z)} > 0, \ \ g \in S^*. \qquad (1)$$

Класс K^* почти звездообразных функций являются естественным расширением класса S^* звездообразных функций, поскольку любая функция $f(z) \equiv g(z)$, где $g \in S^*$, удовлетворяет условию (1) и, следовательно, принадлежит классу K^*.

Если дана некоторая область D, принадлежащая полуплоскости $\mathrm{Re}\, w > 0$, и множество значений $f(z)/g(z)$ при $z \in E$ содержится в области D, то это условие задает некоторый подкласс класса K^*.

Если в условии (1) функция $g(z)$ не является звездообразной, а принадлежит более широкому классу K^*, то тогда условие (1) определяет класс CK^* дважды почти звездообразных функций (doubly close-to-starlike functions). То есть, функция $f(z)$ называется дважды почти звездообразной функцией и пишут $f \in CK^*$, если она удовлетворяет условию $Re\frac{f(z)}{g(z)} > 0$, причем $Re\frac{g(z)}{h(z)} > 0$ для некоторой функции $h \in S^*$. Нетрудно установить, что $S^* \subset K^* \subset CK^*$.

Наряду со статьей [1], первыми исследованиями почти звездообразных функций были работы [2, 3]. В них исследовался как весь класс K^*, так и его подкласс $K^*(1)$, заданный условием

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1, g \in S^*. \qquad (2)$$

Дополнительно к этому, исследовались классы K_0^* и $K_0^*(1)$ функций $f(z)$, заданные, соответственно, условиями (1) и (2) при более жестком предположении, что $g \in S^{\circ}$. Классы K_0^* и $K_0^*(1)$ являются подклассами класса K^*, поскольку $S^{\circ} \subset S^*$.

В статьях [4, 5] исследовались подклассы класса K^*, функции которого удовлетворяют, соответственно, условию $\left|\frac{f(z)}{g(z)} - a\right| < a$ и $\left|\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| < a$ с конкретными звездообразными функциями $g(z)$.

Недавние работы [6-9] посвящены нахождению различных радиусов звездообразности ряда классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций, определенных с помощью условий вида $Re\frac{f(z)}{g(z)} > 0$, $\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$ в различных их комбинациях, с применением конкретных звездообразных функций $g(z)$.

Наша гипотеза состоит в том, что можно построить класс дважды почти звездообразных функций, который, с одной стороны, в частных случаях приводит к классам почти звездообразных функций, рассматриваемым в первых классических исследованиях, с другой стороны, – приводит к некоторым классам дважды почти звездообразных функций, исследованным в последние годы.

В настоящей статье вводится и исследуется некоторый обобщенный класс дважды почти звездообразных функций $f \in CK^*$, который в качестве частных случаев содержит классы K^*, $K^*(1)$, K_0^* и $K_0^*(1)$, а также ряд классов из отмеченных выше работ [6-9]. В данном классе найдены точные теоремы роста и радиус звездообразности порядка β. Тем самым, наряду с новыми оригинальными результатами получены обобщения и дополнения ряда ранее известных результатов. Аналогичные вопросы рассмотрены и для некоторого класса дважды почти выпуклых функций.

Методология исследования

Исследования настоящей статьи базируются на применении метода подчиненности аналитических функций, который активно применяется в геометрической теории функций в последние десятилетия, особенно после выхода статьи [10]. Этот метод дает хорошие результаты при исследовании экстремальных свойств различных подклассов класса $\mathcal{N}$, поскольку позволяет эффективно находить оценки различных функционалов, связанных с этими подклассами, которые в дальнейшем применяются в исследовании.

Пусть $\varphi(z)$ и $\varphi_0(z)$ – функции, аналитические в круге E, и, кроме того, $\varphi_0(z)$ является однолистной в круге E. Тогда функцию $\varphi(z)$ называют подчиненной функции $\varphi_0(z)$, если $\varphi(0)=\varphi_0(0)$ и имеет место соотношение $\varphi(E)\subset\varphi_0(E)$.

Важным фактом метода подчиненности, который мы будем использовать в настоящей статье, является то, что из условия $\varphi(E)\subset\varphi_0(E)$ вытекает справедливость аналогичного условия и для внутренних кругов $E_r=\{z:|z|<r\}$, $0\le r<1$. То есть выполняется условие $\varphi(E_r)\subset\varphi_0(E_r)$, которое с учетом геометрических свойств области $\varphi_0(E_r)$ позволяет получать различные оценки функции $\varphi(z)$ для всех $z\in E_r$.

Следуя [5], дадим следующее

Определение 1. Будем говорить, что функция $\varphi(z)$ из $\mathcal{A}_n$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n(m,\gamma)$, если выполняется условие

$$\left|(\varphi(z))^{\frac{1}{\gamma}}-m\right|<m,\ \ 0<\gamma\le 1, m>\frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Также по определению будем считать, что $\mathcal{P}(m,\gamma):=\mathcal{P}_1(m,\gamma)$.

Если функция $w(z)$ удовлетворяет условию $|w(z)-m|<m$, то тогда

$$w(z)\prec w_0(z)=\frac{1+z}{1-(1-1/m)z},$$

где $w_0(z)$ – конформное отображение круга E на круг $|w(z)-m|<m$ с нормировкой $w(0)=1$. Но тогда, если выполняется условие (3), то $\varphi(z)\prec\varphi_0(z)$, где

$$\varphi_0(z)=\left(\frac{1+z}{1-(1-1/m)z}\right)^{\gamma}. \qquad (4)$$

Для дальнейшего нам потребуется

Лемма 1 [5]. Пусть функция $\varphi\in\mathcal{P}_n(m,\gamma)$. Тогда для любого r, $0\le r<1$, в круге $|z|\le r$, выполняются точные оценки

$$\left(\frac{1-r^n}{1+(1-1/m)r^n}\right)^{\gamma}\le|\varphi(z)|\le\left(\frac{1+r^n}{1-(1-1/m)r^n}\right)^{\gamma}, \qquad (5)$$

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\le\frac{\gamma(2-1/m)nr^n}{(1-r^n)(1+(1-1/m)r^n)}. \qquad (6)$$

Экстремальная функция $\varphi(z)=\varphi_0(z^n)$, где $\varphi_0(z)$ определена посредством формулы (4).

Лемма 2 [10]. Пусть функция $f(z)$ из $\mathcal{N}$ является звездообразной в круге E, причем

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}\prec\Phi_0(z),$$

где функция $\phi_0(z)$ удовлетворяет условию $Re\,\phi_0(z) > 0,\ z \in E$. Если функция $k(z),\ k(0) = k'(0) - 1 = 0$, является решением дифференциального уравнения

$$z\frac{k'(z)}{k(z)} = \phi_0(z),$$

то

$$\frac{f(z)}{z} \prec \frac{k(z)}{z}.$$

Результаты исследования

Введем следующие классы функций.

Определение 2. Пусть $K_\alpha^*(a,\gamma)$ – класс функций $f(z)$ из $\mathcal{N}$, для каждой из которых существует функция $h \in S^*(\alpha)$, $0 \le \alpha < 1$, такая, что $\frac{f(z)}{h(z)} \in \mathcal{P}(a,\gamma)$, то есть функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left|\left(\frac{f(z)}{h(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| < a, \quad 0 < \gamma \le 1, a > \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что $Re\,(f(z)/h(z)) > 0$, поэтому $K_\alpha^*(a,\gamma) \subset K^*$.

Определение 3. Пусть $K_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)$ – класс функций $f(z)$ из $\mathcal{N}$, для каждой из которых существует функция $g \in K_\alpha^*(b,\delta)$ такая, что выполняется условие $\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{P}(a,\gamma)$, то есть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям

$$\left|\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| < a, \quad \left|\left(\frac{g(z)}{h(z)}\right)^{1/\delta} - b\right| < b, \tag{8}$$

где $0 < \gamma, \delta \le 1,\ a, b > 1/2$ и $h \in S^*(\alpha)$, $0 \le \alpha < 1$.

Поскольку $K_\alpha^*(b,\delta) \subset K^*$, то есть функция $g(z)$ является почти звездообразной, то из первого из условий (8) следует, что функция $f(z)$ является дважды почти звездообразной. Таким образом, $K_\alpha^*(b,\delta) \subset K_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta) \subset CK^*$.

Кроме того, $K_\alpha^*(a,\gamma) \coloneqq K_\alpha^*(a,\gamma,\infty,0)$, $K_\alpha^*(b,\delta) \coloneqq K_\alpha^*(\infty,0,b,\delta)$, а также при $\alpha = 0$ имеем $K^* \coloneqq K_\alpha^*(\infty,1)$ и $CK^* \coloneqq K_\alpha^*(\infty,1,\infty,1)$.

Определение 4. Если в определениях 2 и 3 функция $h \in S^{\circ}$, то соответствующие классы функций будем обозначать через $K_0^*(a,\gamma)$ и $K_0^*(a,\gamma,b,\delta)$.

Теорема 1 (теорема роста). Пусть $a_1 = 1 - 1/a$, $b_1 = 1 - 1/b$. Если $f \in K_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)$, то при $|z| = r$, $0 \le r < 1$, справедлива оценка

$$\frac{(1-r)^{\gamma+\delta}}{(1+a_1r)^\gamma(1+b_1r)^\delta}\frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \le |f(z)| \le \frac{(1+r)^{\gamma+\delta}}{(1-a_1r)^\gamma(1-b_1r)^\delta}\frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}. \tag{9}$$

Оценка (9) точная и достигается для функции

$$f_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-a_1z}\right)^\gamma\left(\frac{1+z}{1-b_1z}\right)^\delta\frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}. \tag{10}$$

Доказательство. Прежде, чем доказать оценку (9), найдем оценку $|h(z)/z|$ в классе $S^*(\alpha)$. Для этого воспользуется леммой 2, в которой в качестве $k(z)$ возьмем функцию

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^{\,2(1-\alpha)}}.$$

Тогда

$$z\frac{k'(z)}{k(z)} = \phi_0(z) := \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}.$$

Поскольку $h \in S^*(\alpha)$, то $Re\left(z\frac{h'(z)}{h(z)}\right) > \alpha$ и $z\frac{h'(z)}{h(z)} \prec \phi_0(z)$. Поэтому в силу леммы 2

$$\frac{h(z)}{z} \prec \frac{k(z)}{z} = \frac{1}{(1-z)^{\,2(1-\alpha)}},$$

откуда при $|z| = r$, $0 \le r < 1$, получаем оценку

$$\frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \le |h(z)| \le \frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}. \qquad (11)$$

Обозначив $\varphi(z) = f(z)/g(z)$, $\psi(z) = g(z)/h(z)$, для функции $f(z)$ получаем представление $f(z) = \varphi(z)\psi(z)h(z)$. Так как $\varphi \in \mathcal{P}(a,\gamma)$, $\psi \in \mathcal{P}(b,\delta)$, то в силу леммы 1 при $n = 1$ для всех z, $|z| = r$, $0 \le r < 1$, выполняются неравенства

$$\left(\frac{1-r}{1+a_1 r}\right)^{\gamma} \le |\varphi(z)| \le \left(\frac{1+r}{1-a_1 r}\right)^{\gamma},$$

$$\left(\frac{1-r}{1+b_1 r}\right)^{\delta} \le |\psi(z)| \le \left(\frac{1+r}{1-b_1 r}\right)^{\delta}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{1-r}{1+a_1 r}\right)^{\gamma}\left(\frac{1-r}{1+b_1 r}\right)^{\delta}|h(z)| \le |f(z)| \le |h(z)|\left(\frac{1+r}{1-a_1 r}\right)^{\gamma}\left(\frac{1+r}{1-b_1 r}\right)^{\delta}.$$

Применяя оценку (11), приходим к оценке (9).

Убедиться в точности оценки (9) несложно, поскольку для функции (10) в оценке (9) достигаются знаки равенства, соответственно, слева и справа в точках $z = -r$ и $z = r$.

Теорема 2 (радиус звездообразности). Пусть $a_1 = 1 - 1/a$, $b_1 = 1 - 1/b$. Если $f \in K_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)$, то точный радиус звездообразности порядка β класса $K_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)$ равен единственному на интервале (0; 1) корню уравнения

$$\frac{1-(1-2\alpha)r}{1+r} - \frac{r}{1-r}\left(\gamma\frac{1+a_1}{1+a_1 r} + \delta\frac{1+b_1}{1+b_1 r}\right) - \beta = 0. \qquad (12)$$

Экстремальная функция имеет вид (10).

Доказательство. Обозначив, как и при доказательстве теоремы 1, $f(z) = \varphi(z)\psi(z)h(z)$, где $\varphi(z) = f(z)/g(z)$, $\psi(z) = g(z)/h(z)$, получаем

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = z\frac{h'(z)}{h(z)} + z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + z\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Поэтому для всех z, $|z| \le r$, выводим

$$Re\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geq \min_{|z|\leq r} Re\ \left(z\frac{h'(z)}{h(z)}\right) - \max_{|z|\leq r}\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| - \max_{|z|\leq r}\left|z\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right|. \qquad (13)$$

Так как $h \in S^*(\alpha)$, то $Re\left(z\frac{h'(z)}{h(z)}\right) > \alpha$ и

$$\phi(z) = z\frac{h'(z)}{h(z)} \prec \phi_0(z) = \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}.$$

По принципу подчиненности отсюда вытекает, что $\phi(E_r) \subset \phi_0(E_r)$ при любом r, $0 \leq r < 1$. Учитывая, что $\phi_0(E_r)$ – есть круг, получаем равенство

$$\min_{|z|\leq r} Re\left(z\frac{h'(z)}{h(z)}\right) = \phi_0(-r) = \frac{1-(1-2\alpha)r}{1+r}.$$

Поэтому, применяя дважды оценку (5) при $n = 1$ к функциям $\varphi \in \mathcal{P}(a,\gamma)$ и $\psi \in \mathcal{P}(b,\delta)$, в круге $|z| \leq r$, $0 \leq r < 1$, с учетом (13) получаем:

$$\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geq \frac{1-(1-2\alpha)r}{1+r} - \frac{\gamma(1+a_1)r}{(1-r)(1+a_1 r)} - \frac{\delta(1+b_1)r}{(1-r)(1+b_1 r)}.$$

Поэтому функция $f(z)$ будет звездообразной порядка β в круге $|z| \leq r^*$, если r^* – корень уравнения (12). Заметим, что r^* является единственным корнем уравнению (12) на $(0;1)$. Это следует из того, что функция $\mu_1(r) = (1+(1-2\alpha)r)/(1+r)$ убывает на $[0;1]$ от 1 до $1-\alpha$, а функция

$$\mu_2(r) = \frac{\gamma(1+a_1)r}{(1-r)(1+a_1 r)} + \frac{\delta(1+b_1)r}{(1-r)(1+b_1 r)} + \beta$$

возрастают на $[0;1)$ от $\beta \in [0;1)$ до $+\infty$.

Чтобы доказать неулучшаемость радиуса звездообразности r^*, воспользуемся функцией (10). Для нее

$$z\frac{f_0'(z)}{f_0(z)} = \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z} + \frac{\gamma(1+a_1)z}{(1+z)(1-a_1 z)} + \frac{\delta(1+b_1)z}{(1+z)(1-b_1 z)}.$$

Поэтому в точке $z = -r^*$ получаем

$$\mathrm{Re}\ \left(z\frac{f_0'(z)}{f_0(z)}\right) = \frac{1-(1-2\alpha)r^*}{1+r^*} - \frac{r^*}{1-r^*}\left(\gamma\frac{1+a_1}{1+a_1 r^*} + \delta\frac{1+b_1}{1+b_1 r^*}\right) = \beta.$$

То есть, радиус звездообразности порядка β улучшить нельзя.

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим некоторые следствия.

Пусть $\delta = 0$, $b \to \infty$. Тогда $g(z) \equiv h(z)$ и класс $K_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)$ преобразуется в класс $K_\alpha^*(a,\gamma) \coloneqq K_\alpha^*(a,\gamma,\infty,0)$ почти звездообразных функций. В силу этого из теорем 1-2 вытекает

Следствие 1. Пусть $f \in K_\alpha^*(a,\gamma)$, то есть функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left|\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| < a,\ \ 0 < \gamma \leq 1, a > \frac{1}{2},$$

где $g \in S^*(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$. Тогда при $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, справедлива точная оценка

$$\frac{(1-r)^\gamma}{(1+(1-1/a)r)^\gamma}\frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |f(z)| \leq \frac{(1+r)^\gamma}{(1-(1-1/a)r)^\gamma}\frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}$$

и точный радиус звездообразности порядка β класса $K_\alpha^*(a,\gamma)$ равен единственному на интервале $(0;1)$ корню уравнения

$$\frac{1-(1-2\alpha)r}{1+r} - \frac{r}{1-r}\frac{\gamma(2-1/a)}{(1+(1-1/a)r)} - \beta = 0.$$

Рассмотрим частные случаи следствия 1.

1) Пусть $\gamma = 1$ и $\alpha = 0$.

Тогда при $a \to \infty$ получаем класс K^* функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $Re\frac{f(z)}{g(z)} > 0$, где $g \in S^*$, для которого справедлива оценка

$$\frac{r(1-r)}{(1+r)^3} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)}{(1-r)^3}$$

и радиус звездообразности порядка β $r_1^*(\beta) = \left(2-\sqrt{3+\beta^2}\right)/(1+\beta)$. Заметим, что при $\beta = 0$ получаем радиус звездообразности класса K^*, равный $r_1^*(0) = 2-\sqrt{3}$, который ранее был получен в [2, теорема 3].

Если $a = 1$, то в классе $K^*(1)$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$, где $g \in S^*$, получаем оценку

$$\frac{r(1-r)}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)}{(1-r)^2} \tag{14}$$

и радиус звездообразности порядка β класса $K^*(1)$ определяется по формуле

$$r_2^*(\beta) = \begin{cases} \dfrac{\left(3-\sqrt{9-4\beta(1-\beta)}\right)}{2\beta}, & \beta \neq 0 \\ 1/3, & \beta = 0 \end{cases}. \tag{15}$$

Заметим, что радиус звездообразности $r_2^*(0) = 1/3$ класса $K^*(1)$ получен в [2, теорема 4].

2) Пусть $\gamma = 1$ и $\alpha = 1/2$.

В [11] показано, что если $g \in S^0$, то $g \in S^*(1/2)$. Поэтому, аналогично предыдущему, при $a \to \infty$ и при $a = 1$ получаем следующие результаты.

В классе K_0^* функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $Re\frac{f(z)}{g(z)} > 0$, где $g \in S^0$, имеет место оценка (14) и радиус $r_3^*(\beta)$ звездообразности порядка β класса K_0^* определяется по формуле (15). Заметим, что в частном случае, при $\beta = 0$, радиус звездообразности $r_3^*(0) = 1/3$ класса K_0^* получен в [3, теорема 3].

В классе $K_0^*(1)$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $\left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$, где $g \in S^0$, имеет место оценка

$$\frac{r(1-r)}{(1+r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r)}{(1-r)}$$

и радиус $r_4^*(\beta)$ звездообразности порядка β класса K_0^* определяется по формуле $r_4^*(\beta)=\left(\sqrt{1+(1-\beta)^2}-1\right)/(1-\beta)$. При $\beta=0$ получаем радиус звездообразности $r_4^*(0)=\sqrt{2}-1$ класса $K_0^*(1)$ из [3, теорема 4].

Определение 5. Пусть $\widehat{K}_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)$ – класс функций $f(z)$ из $\mathcal{N}$, удовлетворяющих условию

$$\left|\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{1/\gamma}-a\right|<a,\quad \left|\left(\frac{(1-z)^{2(1-\alpha)}}{z}g(z)\right)^{1/\delta}-b\right|<b,$$

где $0<\gamma,\delta\le 1,\ a,b>1/2,\ 0\le\alpha<1$.

Поскольку $h_0(z)=\frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}\in S^*(\alpha)$, то $\widehat{K}_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)\subset K_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)$.

В формуле экстремальной функции $f_0(z)$ из (10) теорем 1 и 2 содержится функция $h_0(z)$. В силу этого, теоремы 1 и 2 остаются справедливыми, если вместо произвольной функции $h(z)$ класса $S^*(\alpha)$ используется конкретная функция $h_0(z)=\frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}$ этого класса.

То есть имеет место

Теорема 3. Пусть $f\in\widehat{K}_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)$ и пусть $a_1=1-1/a,\ b_1=1-1/b$. Тогда при $|z|=r$, $0\le r<1$, справедлива точная оценка (9) и точный радиус звездообразности порядка β класса $\widehat{K}_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)$ равен единственному на интервале $(0;1)$ корню уравнения (12).

В статьях [6-7] для ряда классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций найдены различные радиусы звездообразности, в том числе и радиусы звездообразности порядка β. Некоторые из выше отмеченных классов являются подклассами класса $\widehat{K}_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)$. Поэтому из теоремы 3, как частные случаи, вытекают радиусы звездообразности порядка β классов $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$ из [6], Π_1, Π_2 из [7] и в дополнение к ним – теоремы роста данных классов:

1) $\mathcal{F}_1=K_{1/2}^*(\infty,1,\infty,1)=\left\{f(z){:}\ Re\,\frac{f(z)}{g(z)}>0, Re\left(\frac{1-z}{z}g(z)\right)>0\right\}$,

$$\frac{r(1-r)^2}{(1+r)^3}\le|f(z)|\le\frac{r(1+r)^2}{(1-r)^3},\ \ r(\mathcal{F}_1,\beta)=\frac{2(1-\beta)}{5+\sqrt{25-4\beta(1-\beta)}};$$

2) $\mathcal{F}_2=K_{1/2}^*(1,1,\infty,1)=\left\{f(z){:}\ \left|\frac{f(z)}{g(z)}-1\right|<1, Re\left(\frac{1-z}{z}g(z)\right)>0\right\}$,

$$\frac{r(1-r)^2}{(1+r)^2}\le|f(z)|\le\frac{r(1+r)^2}{(1-r)^2},\ \ r(\mathcal{F}_2,\beta)=\frac{1-\beta}{2+\sqrt{4+(1-\beta)^2}};$$

3) $\mathcal{F}_3=K_{1/2}^*(\infty,1,\infty,0)=\left\{f(z){:}\ Re\left(\frac{1-z}{z}f(z)\right)>0\right\}$,

$$\frac{r(1-r)}{(1+r)^2}\le|f(z)|\le\frac{r(1+r)}{(1-r)^2},\ \ r(\mathcal{F}_3,\beta)=\frac{2(1-\beta)}{3+\sqrt{9-4\beta(1-\beta)}};$$

4) $\mathcal{F}_4=K_0^*(\infty,1,\infty,0)=\left\{f(z){:}\ Re\left(\frac{(1-z)^2}{z}f(z)\right)>0\right\}$

$$\frac{r(1-r)}{(1+r)^3}\le|f(z)|\le\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}, r(\mathcal{F}_4,\beta)=\frac{1-\beta}{2+\sqrt{3+\beta^2}};$$

5) $\Pi_1=K_0^*(\infty,1,\infty,1)=\left\{f(z){:}\ Re\frac{f(z)}{g(z)}>0, Re\left(\frac{(1-z)^2}{z}g(z)\right)>0\right\}$,

$$\frac{r(1-r)^2}{(1+r)^4}\le|f(z)|\le\frac{r(1+r)^2}{(1-r)^4},\ \ r(\Pi_1,\beta)=\frac{1-\beta}{3+\sqrt{8+\beta^2}};$$

6) $\Pi_2 = K_0^*(1,1,\infty,1) = \left\{f(z): \left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1, Re\left(\frac{(1-z)^2}{z} g(z)\right) > 0\right\}$.

$$\frac{r(1-r)^2}{(1+r)^3} \le |f(z)| \le \frac{r(1+r)^2}{(1-r)^3},\ \ r(\Pi_2, \beta) = \frac{2(1-\beta)}{5+\sqrt{4\beta^2 - 4\beta + 25}}.$$

Рассмотрим теперь дважды почти выпуклые функции.

Известно [12], что функция $F(z)$ из $\mathcal{N}$ называется почти выпуклой (close-to-convex functions), если существует функция $G \in S^0$ такая, что выполняется условие

$$Re\frac{F'(z)}{G'(z)} > 0, z \in E. \tag{16}$$

Класс почти выпуклых функций обозначают через K. Если в условии (16) функция $G(z)$ сама является почти выпуклой, то функция $F(z)$ называется дважды почти выпуклой (doubly close-to-convex functions) и класс таких функций обозначается через CK.

Наряду с классом K в исследованиях часто рассматривается класс $K(\gamma)$ функций [13, 14], почти выпуклых порядка γ, $0 < \gamma \le 1$, удовлетворяющих условию

$$\left|\arg\frac{F'(z)}{G'(z)}\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, z \in E, \tag{17}$$

где $G \in S^0$. При этом, $K(\gamma) \subset K(1) = K$.

Определение 6. Пусть $K_\alpha(a,\gamma)$ – класс функций $F(z)$ из $\mathcal{N}$, для каждой из которых существует функция $H \in S^0(\alpha)$, $0 \le \alpha < 1$, такая, что $\frac{F'(z)}{H'(z)} \in \mathcal{P}(a,\gamma)$, то есть функция $F(z)$ удовлетворяет условию

$$\left|\left(\frac{F'(z)}{H'(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| < a, \quad 0 < \gamma \le 1, a > \frac{1}{2}.$$

Определение 7. Пусть $K_\alpha(a,\gamma,b,\delta)$ – класс функций $F(z)$ из $\mathcal{N}$, для каждой из которых существует функция $G \in K_\alpha(b,\delta)$ такая, что выполняется условие $\frac{F'(z)}{G'(z)} \in \mathcal{P}(a,\gamma)$, где $0 < \gamma, \delta \le 1$, $a, b > 1/2$.

То есть функция $F \in K_\alpha(a,\gamma,b,\delta)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\left|\left(\frac{F'(z)}{G'(z)}\right)^{1/\gamma} - a\right| < a, \quad \left|\left(\frac{G'(z)}{H'(z)}\right)^{1/\delta} - b\right| < b, \tag{18}$$

где $H \in S^0(\alpha)$, $0 \le \alpha < 1$.

По определению также будем считать, что при $\alpha = 0$ имеют место соотношения $K(a,\gamma) \coloneqq K_0(a,\gamma)$ и $K(a,\gamma,b,\delta) \coloneqq K_0(a,\gamma,b,\delta)$. Тогда $K(\gamma) = K(\infty,\gamma)$.

Между классами $K_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)$ и $K_\alpha(a,\gamma,b,\delta)$ имеется простая связь. Если обозначить

$$f(z) = zF'(z),\ \ g(z) = zG'(z),\ \ h(z) = zH'(z), \tag{19}$$

то условия (18) преобразуются в условия (8) и обратно. То есть с помощью равенств (19) между классами $K_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)$ и $K_\alpha(a,\gamma,b,\delta)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие: $F \in K_\alpha(a,\gamma,b,\delta) \iff f = zF' \in K_\alpha^*(a,\gamma,b,\delta)$. Учитывая также, что каждое из равенств (19) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами S^*

звездообразных функций и S^0 выпуклых функций, на основе теорем 1-2 получаем теорему искажения и радиус выпуклости порядка β класса $K_\alpha(a,\gamma,b,\delta)$.

Теорема 4. Пусть $a_1 = 1 - 1/a$, $b_1 = 1 - 1/b$. Если $F \in K_\alpha(a,\gamma,b,\delta)$, то при $|z| = r$, $0 \le r < 1$, справедлива точная оценка

$$\frac{(1-r)^{\gamma+\delta}}{(1+a_1r)^{\gamma}(1+b_1r)^{\delta}}\frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \le |F'(z)| \le \frac{(1+r)^{\gamma+\delta}}{(1-a_1r)^{\gamma}(1-b_1r)^{\delta}}\frac{1}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}.$$

и точный радиус выпуклости порядка β класса $K_\alpha(a,\gamma,b,\delta)$ равен единственному на интервале $(0;1)$ корню уравнения (12). Экстремальная функция задается формулой

$$F_0(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t}{1-a_1t}\right)^{\gamma}\left(\frac{1+t}{1-b_1t}\right)^{\delta}\frac{dt}{(1-t)^{2(1-\alpha)}}.$$

При конкретных значениях параметров α,β и a,γ,b,δ из теоремы 4 вытекает ряд известных результатов. Например, при $\alpha = \beta = 0$ случаям $\gamma = \delta = 1$ и $a \to \infty$, $b \to \infty$ соответствуют классы $CC(a,b)$ и $\mathcal{L}(\gamma,\delta)$ из [15, 16] дважды почти выпуклых функций, удовлетворяющих условиям

$$CC(a,b):\ \left|\frac{F'(z)}{G'(z)} - a\right| < a, \quad \left|\frac{G'(z)}{H'(z)} - b\right| < b,\ \ H(z) \in S^{\mathrm{o}},$$
$$\mathcal{L}(\gamma,\delta):\ \left|\arg\frac{F'(z)}{G'(z)}\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \left|\arg\frac{G'(z)}{H'(z)}\right| < \delta\frac{\pi}{2},\ \ H(z) \in S^{\mathrm{o}},$$

и из теоремы 4 вытекают следствия 2 и 3.

Следствие 2 [15]. Пусть $F \in CC(a,b)$, $a,b > 1/2$, и пусть $a_1 = 1 - 1/a$, $b_1 = 1 - 1/b$. Тогда при $|z| = r$, $0 \le r < 1$, справедлива точная оценка

$$\frac{(1-r)^2}{(1+a_1r)(1+b_1r)}\frac{1}{(1+r)^2} \le |F'(z)| \le \frac{(1+r)^2}{(1-a_1r)(1-b_1r)}\frac{1}{(1-r)^2}$$

и точный радиус выпуклости класса $CC(a,b)$ равен единственному на интервале $(0;1)$ корню уравнения

$$\frac{1-r}{1+r} - \frac{r}{1-r}\left(\frac{1+a_1}{1+a_1r} + \frac{1+b_1}{1+b_1r}\right) = 0.$$

Следствие 3 [16]. Пусть $F \in \mathcal{L}(\gamma,\delta)$, $0 < \gamma,\delta \le 1$. Тогда при $|z| = r$, $0 \le r < 1$, справедлива точная оценка

$$\frac{(1-r)^{\gamma+\delta}}{(1+r)^{\gamma+\delta+2}} \le |F'(z)| \le \frac{(1+r)^{\gamma+\delta}}{(1-r)^{\gamma+\delta+2}}$$

и точный радиус выпуклости класса $\mathcal{L}(\gamma,\delta)$ равен

$$r^0(\gamma,\delta) = 1 + \gamma + \delta - \sqrt{(\gamma+\delta)(2+\gamma+\delta)}.$$

Если $\alpha = \beta = 0$, $b \to \infty$, $\delta \to 0$, то из теоремы 4 получаем

Следствие 4. Пусть $F \in K(a,\gamma)$, то есть выполняется условие

$$\left|\left(\frac{F'(z)}{H'(z)}\right)^{1/\gamma}-a\right|<a,$$

где $H\in S^0$. Тогда при $|z|=r$, $0\le r<1$, имеет место оценка

$$\frac{(1-r)^\gamma}{(1+(1-1/a)r)^\gamma(1+r)^2}\le|F'(z)|\le\frac{(1+r)^\gamma}{(1-(1-1/a)r)^\gamma(1-r)^2},$$

и радиус выпуклости $r^0(a,\gamma)$ класса $K(a,\gamma)$ – единственный на $(0;1)$ корень уравнения

$$[a+(a-1)r](1-r)^2-(2a-1)\gamma r(1+r)=0. \qquad (20)$$

Если $a\to\infty$, то класс $K(a,\gamma)$ трансформируется в класс $K(\gamma)$ и из следствия 4 получаем теорему искажения класса $K(\gamma)$ из [13]

$$\frac{(1-r)^\gamma}{(1+r)^{\gamma+2}}\le|F'(z)|\le\frac{(1+r)^\gamma}{(1-r)^{\gamma+2}}$$

и радиус выпуклости $r_0=1+\gamma-\sqrt{\gamma(2+\gamma)}$ класса $K(\gamma)$ из [17].

При $a=1$ уравнение (20) приобретает вид $(1-\gamma)r^2-(2+\gamma)r+1=0$, откуда получаем радиус выпуклости

$$r_0=\begin{cases}\dfrac{2+\gamma-\sqrt{\gamma(8+\gamma)}}{2(1-\gamma)} & \text{при } \gamma\ne1,\\ 1/3 & \text{при } \gamma=1,\end{cases}$$

класса функций $F(z)$, удовлетворяющих условию $\left|\left(\frac{F'(z)}{H'(z)}\right)^{1/\gamma}-1\right|<1$, где $0<\gamma\le1$, $H\in S^0$. При $\gamma=1$ отсюда следует радиус выпуклости [18-19] $r_0=1/3$ подкласса почти выпуклых функций, удовлетворяющих условию $|F'(z)/H'(z)-1|<1$, $H\in S^0$.

Дискуссия

Исследование классов дважды почти звездообразных и дважды почти выпуклых функций представляет собой одно из активно развивающихся направлений современной математической науки. Эти классы функций отражают как локальные, так и глобальные особенности математических объектов, что делает их особенно ценными при анализе сложных динамических систем. Функции данного типа находят широкое применение в разнообразных областях – от теоретических аспектов анализа и оптимизации до прикладных задач в физике, инженерии, экономике и биомеханике. Их использование позволяет учитывать важнейшие характеристики процессов: устойчивость, адаптивность, плавность переходов и чувствительность к изменениям условий. Таким образом, изучение дважды почти звездообразных и дважды почти выпуклых функций находится на пересечении фундаментальных и прикладных исследований. Это делает данное направление не только актуальным, но и стратегически важным как для развития математической теории, так и для практических приложений в наукоёмких и технологических сферах.

Заключение

В статье рассмотрена задача исследования скорости роста и радиуса звездообразности одного достаточно широкого класса дважды почти звездообразных функций. Особенностью работы является то, что широта исследуемого класса позволяет использовать в качестве базовой для построения класса почти звездообразных функций не только звездообразные функции, но и выпуклые функции. Это позволяет существенно расширить применимость полученных результатов к ранее исследованным и новым классам аналитических функций.

Получены точная теорема роста и точный радиус звездообразности данного класса функций. Установлены связи с ранее известными результатами других авторов, многие из которых получены как следствия основных результатов данной статьи.

Список использованных источников

[1]Reade M.O. On close-to-close univalent functions // Michigan Math. J., 1955, Vol. 3, P. 59-62.

[2]MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions // Proc. Amer. Math. Soc., 1963, No. 14, P. 514-520.

[3]MacGregor T.H. The radius of univalence of certain analytic functions, II // Proc. Am. Math. Soc., 1963, No. 14, P. 521-524. DOI: http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5

[4]Chichra P. On the radii of starlikeness and convexity of certain classes of regular functions // J. of the Australian Math. Soc., 1972, Vol. 13, No. 2, P. 208-218. DOI: https://doi.org/10.1017/S1446788700011290

[5]Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Ысмағұл Р.С. Точные оценки регулярных функций и радиусы выпуклости и звездообразности некоторых классов звездообразных и почти звездообразных функций. // Вестник Казахстанско-Британского технического университета, 2024, Т. 21, № 2, С.127-138. doi: https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138

[6]Sebastianc A., Ravichandran V., Radius of starlikeness of certain analytic functions // Math. Slovaca, 2021, Vol. 71. No. 1, P.83-104. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.06999

[7]El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. Starlikeness of certain analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11734 – 2020. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734

[8]Kanaga R., Ravichandran V. Starlikeness for certain close-to-star functions // Hacet. J. Math. Stat., 2021, Vol. 50, No. (2, P. 414-432. DOI: https://doi.org/10.15672/hujms.702703

[9]Khatter K., Lee S.K., Ravichandran V. Radius of starlikeness for classes of analytic functions // arXiv preprint arXiv:2006.11744. – 2020. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744

[10] Ma W., Minda D. A unified treatment of some special classes of functions // Proc. Conf. on Complex Analysis, Tianjin, 1992, Conference Proceedings and Lecture Notes in Analysis, Vol. 1 (International Press, Cambridge, MA, 1994, 157–169). https://www.researchgate.net/publication/ 245129813_ A_unified_treatment_of_some_special_classes_of_functions

[11] Strohhäcker E. Beiträge zur theorie der schlichten funktionen // Mathematische Zeitschrift, 1933, No. 37, P. 356-380.

[12] Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions // Michigan Math. J., 1952, Vol. 1, No. 2, P.169–185. DOI: https://10.1307/mmj/1028988895

[13] Renyi A. Some remarks on univalent functions // An. Univ. Maria Curie-Sklodowska, Sec., A.3, 1959, P. 111-121. http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf

[14] Reade M.O. The coefficients of close-to-convex functions // Duke Math. J., 1956, Vol. 23, No. 3, P. 459-462. DOI: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0

[15] Raducanu D. Bounded doubly close-to-convex functions // Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, Article ID 804095, 2014, P. 1-7. DOI: http://dx.doi.org/10.1155/2014/804095

[16] Dorff M., Naraniecka I., Szynal J. Doubly close-to-convex functions // J. Math. Anal. Appl., 2004, Vol. 290, P. 55-62. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.08.050

[17] Hayman W.K. Multivalent functions. Cambridge Tracts in Mathematics #110, 1994, 276 p.

[18] Vasudevarao A., Sokół J., Thomas D.K. On a close-to-convex analogue of certain starlike functions // Bull. Aust. Math. Soc., 2020, Vol. 102, Is. 2, P. 268-281. DOI: https://doi.org/10.1017/S0004972719001606

[19] Ratti J.S. The radius of convexity of certain analytic functions II. Intern. J. of Math. and Math. Scie., 1980, Vol. 3, No.3, P. 483-489. DOI: https://doi.org/10.1155/s0161171280000361

References

[1]Reade M.O. (1955) On close-to-close univalent functions. Michigan Math. J., Vol. 3, pp. 59-62.

[2]MacGregor T.H. (1963) The radius of univalence of certain analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 14, pp. 514-520.

[3]MacGregor T.H. (1963) The radius of univalence of certain analytic functions, II. Proc. Am. Math. Soc., Vol. 14, pp. 521–524. DOI: http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9939-1963-0148892-5

[4]Chichra P. (1972) On the radii of starlikeness and convexity of certain classes of regular functions. J. of the Australian Math. Soc., Vol. 13, No. 2, pp. 208-218. DOI: https://doi.org/10.1017/S1446788700011290

[5]Mayer F.F., Tastanov M.G., Utemisova A.A., Ysmaghul R.S. (2024) Tochnye otsenki regulyarnykh funktsiy i radiusy vypuklosti i zvezdobraznosti nekotorykh klassov zvezdobraznykh i pochti zvezdobraznykh funktsiy [Exact estimates of regular functions and radii of convexity and starlikeness for some classes of starlike and almost starlike functions]. Vestnik Kazakhstansko-Britanskogo tekhnicheskogo universiteta, Vol. 21, No. 2, pp. 127-138. doi: https://doi.org/10.55452/1998-6688-2024-21-2-127-138

[6]Sebastianc A., Ravichandran V. (2021) Radius of starlikeness of certain analytic functions. Math. Slovaca 71. No. 1, pp .83–104. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.06999

[7]El-Faqeer A.S.A., Mohd M.H., Ravichandran V., Supramaniam S. (2020) Starlikeness of certain analytic functions. arXiv preprint arXiv:2006.11734. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11734

[8]Kanaga R., Ravichandran V. (2021) Starlikeness for Certain Close-to-Star Functions. Hacet. J. Math. Stat., Vol. 50, No. 2, pp. 414-432. DOI: https://doi.org/10.15672/hujms.702703

[9]Khatter K., Lee S.K., Ravichandran V. (2020) Radius of starlikeness for classes of analytic functions. arXiv preprint arXiv:2006.11744. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11744

[10] Ma W., Minda D. A unified treatment of some special classes of functions. Proc. Conf. on Complex Analysis, Tianjin, 1992, Conference Proceedings and Lecture Notes in Analysis, Vol. 1 (International Press, Cambridge, MA, 1994, 157–169).

https://www.researchgate.net/publication/245129813_A_unified_treatment_of_some_special_classes_of_functions

[11] Strohhäcker E. (1933) Beiträge zur theorie der schlichten funktionen. Mathematische Zeitschrift, Vol. 37, pp. 356-380.

[12] Kaplan W. (1952) Close-to-convex schlicht functions, Michigan Math. J., Vol. 1, No. 2, pp.169–185. https://10.1307/mmj/1028988895

[13] Renyi A. (1959) Some remarks on univalent functions. An. Univ. Maria Curie-Sklodowska, Sec., A.3, pp. 111-121 . http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf

[14] Reade M.O. (1956) The coefficients of close-to-convex functions. Duke Math. J., Vol. 23, No. 3, pp. 459-462. DOI: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0

[15] Raducanu D. (2014) Bounded doubly close-to-convex functions. Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, Article ID 804095, 7 p. DOI: http://dx.doi.org/10.1155/2014/804095

[16] Dorff M., Naraniecka I. and Szynal J. (2004) Doubly close-to-convex functions. J. Math. Anal. Appl., Vol. 290, pp. 55-62. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.08.050

[17] Hayman W.K. Multivalent functions. Cambridge Tracts in Mathematics #110, 1994, 276 p.

[18] Vasudevarao A., Sokół J., Thomas D.K. (2020) On a close-to-convex analogue of certain starlike functions. Bull. Aust. Math. Soc., Vol. 102, Is. 2, pp. 268-281. DOI: https://doi.org/10.1017/S0004972719001606

[19] Ratti J.S. (1980) The radius of convexity of certain analytic functions II. Intern. J. of Math. and Math. Scie., Vol. 3, No. 3, pp. 483-489. DOI: https://doi.org/10.1155/s0161171280000361