

К. Бисембаев^{1,2*}, Н. Altenbach³, Т. Дикамбай²

¹Институт механики и машиноведения им. акад. У.А.Джолдасбекова, г. Алматы, Казахстан

²Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

³Магдебургский университет Отто фон Герике, Факультет машиностроения,
г. Магдебург, ФРГ

*e-mail: kuat_06@mail.ru

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ РЕЗЕРВУАРА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ЖИДКОСТЬЮ НА ВИБРООПОРАХ СО СПРЯМЛЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Аннотация

В работе приводятся решения задач о движении жидкости в частично заполненных резервуарах цилиндрической формы на опорах качения, ограниченных поверхностями вращения высокого порядка. Получены системы уравнений движения резервуара с частично заполненными жидкостью на опорах качения со спрямленными поверхностями и найдены значения гидродинамических коэффициентов для случая полости в виде кругового цилиндра. Приведены формулы для определения гидродинамических сил и моментов взаимодействия жидкости со стенками цилиндрических резервуаров на виброопорах качения при горизонтальном кинематическом возмущении. Исследованы резонансные режимы колебательного движения резервуара с жидкостью на опорах качения со спрямленными поверхностями. Установлено, что при частоте колебаний резервуара с жидкостью на опорах качения ограниченных поверхностями вращения высокого порядка, много меньшей собственной частоты, жидкость будет перемещаться вместе с сосудом как одно целое. Резонансное явление здесь следует понимать не как неограниченное возрастания величины амплитуды колебаний жидкости в сосуде, а как указание на то, что колебания жидкости происходят при весьма малых амплитудах колебаний сосуда. При резонансной частоте сосуд вовсе не должен смещаться, так как это есть частота колебаний жидкости в неподвижном сосуде.

Ключевые слова: виброзащитные устройства, сейсмозащита зданий, опора качения, колебательное движения резервуара с жидкостью, резонансные явления.

K. Bissembayev^{1,2}, N. Altenbach³, T. Dikambay²

¹Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan

²Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

³Institut für Mechanik, Fakultät für Maschinenbau, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg,
Magdeburg, Germany

OSCILLATORY MOTION OF A CYLINDRICAL TANK WITH LIQUID ON VIBRATION MOUNTS WITH STRAIGHTENED SURFACES

Abstract

The paper presents solutions to problems of fluid motion in partially filled cylindrical reservoirs on rolling bearings bounded by high-order surfaces of revolution. Systems of equations of motion of a reservoir partially filled with fluid on rolling bearings with straightened surfaces are obtained, and the values of hydrodynamic coefficients are found for the case of a cavity in the form of a circular cylinder. Formulas are given for determining the hydrodynamic forces and moments of interaction of fluid with the walls of cylindrical reservoirs on rolling vibration mounts under horizontal kinematic disturbance. Resonance modes of oscillatory motion of a reservoir with fluid on rolling bearings with straightened surfaces are investigated. It is established that at a frequency of oscillations of a reservoir with fluid on rolling bearings bounded by high-order surfaces of revolution, much less than the natural frequency, the fluid will move together with the vessel as a single whole. The resonance phenomenon here should be understood not as an unlimited increase in the magnitude of the amplitude of the oscillations of the liquid in the vessel, but as an indication that the oscillations of the liquid occur at very small amplitudes of the oscillations of the vessel. At the resonant frequency, the vessel should not shift at all, since this is the frequency of oscillations of the liquid in a stationary vessel.

Keywords: vibration protection devices, seismic protection of buildings, rolling bearing, oscillatory motion of a tank with liquid, resonance phenomena.

К. Бисембаев^{1,2}, Н. Altenbach³, Т. Дикамбай²

¹Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты, г. Алматы, Қазақстан

²Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, г. Алматы қ., Қазақстан

³Отто фон Герике атындағы Магдебург университеті, Машинажасау факультеті, Магдебург қ., Германия Федеративтік Республикасы

ТҮЗЕТІЛГЕН БЕТТЕРМЕН ШЕКТЕЛГЕН ТЕҢСЕЛМЕЛІ ДІРІЛТІРЕКТЕР ОРНАТЫЛҒАН СҰЙЫҚТЫҒЫ БАР ЦИЛИНДРЛІК РЕЗЕРВУАРДЫҢ ТЕРБЕЛМЕЛІ ҚОЗҒАЛЫСЫ

Аңдатпа

Жұмыста жоғары ретті айналу беттерімен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған жартылай толтырылған цилиндрлік резервуарлардағы сұйықтың қозғалысы зерттелген. Түзетілген беттері бар теңселмелі тірекке орнатылған ішінара сұйықтықпен толтырылған резервуардың қозғалыс теңдеулерінің жүйелері алынған, ал дөңгелек цилиндр түріндегі қуыс үшін гидродинамикалық коэффициенттердің мәндері табылған. Көлденең кинематикалық қоздырулар кезінде теңселмелі тірекке орнатылған цилиндрлік резервуарлардың қабырғаларымен сұйықтың әрекеттесуінің гидродинамикалық күштері мен моменттерін анықтау қажетті формулалар табылған. Түзетілген беттермен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған сұйықтығы бар цилиндрлік резервуарлардың тербелмелі қозғалысының резонанстық режимдері зерттеледі. Жоғары ретті айналу беттерімен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған сұйықтығы бар резервуардың тербеліс жиілігі, меншікті жиіліктен әлдеқайда аз, болғанда сұйықтық ыдыспен бірге біртұтас қозғалатыны тағайындалды. Мұндағы резонанс құбылысын ыдыстағы сұйықтықтың тербеліс амплитудасының шамасының шексіз ұлғаюы ретінде емес, ыдыс тербелістерінің өте аз амплитудаларында сұйықтықтың тербелістерінің аз болатынының көрсеткіші деп түсіну керек. Резонанстық жиілікте ыдыс мүлде орын ауыстырмауы керек, өйткені бұл қозғалмайтын ыдыстағы сұйықтықтың тербеліс жиілігі.

Түйін сөздер: дірілден қорғау құрылғылары, ғимаратты жерсілкінісінен қорғау теңселмелі тірек, сұйықтығы бар резервуардың тербелмелі қозғалысы, резонанстық құбылыстар.

Введение

Сейсмически активные районы составляют примерно 30% территории Казахстана. В этих районах осуществляется в грандиозных масштабах строительства гражданских, промышленных, энергетических и других объектов. Дополнительные затраты на антисейсмические мероприятия возрастают с каждым годом вместе с увеличением объемов всех видов строительства.

Большой размах строительства в сейсмических районах Казахстана предприятий химической и некоторых других отраслей промышленности поставил новые задачи перед наукой о сейсмическом строительстве. В частности, возникла необходимость в разработке методов расчета на действие сейсмических сил больших подземных и наземных резервуаров, а также многоэтажных каркасных конструкций, несущих резервуары.

Исследования колебаний жидкости в резервуарах цилиндрической формы представляют большой интерес в связи с необходимостью решения комплекса проблем, связанных со строительством и эксплуатацией конструкций, имеющих в своем составе цилиндрические емкости с жидкостью. Они также постоянно стимулируются запросами авиационной, морской, ракетной и космической техники, а также ужесточением требований к проектированию таких гражданских объектов как наземные хранилища экологически небезопасных жидкостей, морских платформ и водонапорных башен, построенных в сейсмически опасных районах. Особо подчеркнем существенную роль экспериментальных исследований, позволяющих строить общие и упрощенные (в виде механических аналогов) математические модели, которые могут адекватно описывать динамику этих сложных многокомпонентных систем. Этот тезис убедительно подтверждается работами Эл-Даматти и др. [1], Эл-Даматти и Свиден [2], Дутта и др. [3], Свиден [4], посвященными проблемам

динамики жидкости в хранилищах конической формы. Они существенно дополняют более ранние экспериментальные исследования Микишева и Дорожкина [5], а также Бауэра и др. [6]. Общая методика математического моделирования динамического поведения жидкости в упомянутых объектах при различных внешних воздействиях считается в достаточной степени разработанной к настоящему времени. Сформулированы необходимые задачи для определения поля скоростей и давления в жидком объеме, а в случае пространственных безвихревых движений идеальной жидкости хорошо изучены спектральная краевая задача о собственных колебаниях жидкости и краевая задача Неймана для определения потенциалов Стокса–Жуковского. Решения этих задач позволяют определить полную совокупность гидродинамических характеристик системы, включая и моменты инерции жидких масс.

Для случая конических баков, за редким исключением, не существует точных решений упомянутых краевых задач, что требует построения специализированных приближенных методов их решения. Наиболее широкое применение нашли вариационные методы, а также различные версии методов конечных и граничных элементов. Особо подчеркнем важную роль вариационных методов, позволяющих строить приближенные решения в аналитической форме. Это не только упрощает анализ решения базовых краевых задач, но и существенно для дальнейшего развития модальных подходов в линейной и нелинейной теории совместных движений твердых тел с жидкостью. Развитие вариационных методов для конических резервуаров имеет ряд специфических особенностей, связанных с геометрией полости. Они дискутировались в фундаментальных работах Докучаева [7-10].

В работе [11] исследованы вынужденные колебания упругих конструкций переменного сечения на виброопорах со спрямленными поверхностями с учетом наличия трения качения на релаксирующих грунтах и содержатся результаты по оценке влияния параметров упругих конструкций переменного сечения на амплитудную характеристику виброзащитных устройств.

В статье [12] исследуются нелинейные колебания виброизолирующих систем с опорами качения, с выпрямленными поверхностями, с учетом трения качения по релаксирующим грунтам при случайных кинематических возмущениях типа «белый шум». Статистический анализ выполняется с использованием аппарата марковских процессов.

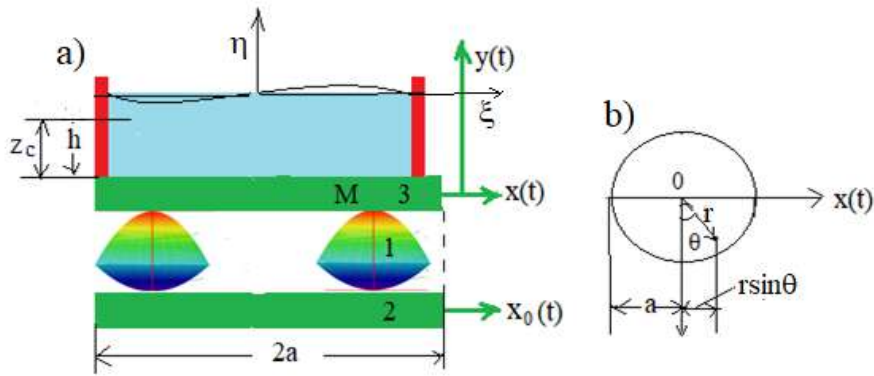
В данной статье выводятся уравнения движения, описывающие движение жидкости в цилиндрическом баке на опорах качения ограниченных поверхностями вращения высокого порядка, который совершает заданные малые поступательные перемещения, а также формулы для гидродинамических сил. В работе для широкого диапазона геометрических параметров приводятся численные значения гидродинамических коэффициентов, включая момент инерции жидкости. В статье исследованы, вынужденные горизонтальные колебания резервуара с частично заполненной жидкостью при наличии голономной связи, реализуемой виброопорами качения со спрямленными поверхностями и отсутствии трения.

Методология исследования

Механическая модель резервуара с жидкостью на опорах качения со спрямленными поверхностями

Динамику резервуара с жидкостью сейсмоизоляция, которого обеспечена опорами качения со спрямленными поверхностями, изучим на следующей механической модели. Пусть некоторые несущие тела имеет своей верхней границей плоскую поверхность и совершает поступательное движение. Будем считать, что по поверхностям тела перекатываются тела носители (опора качения со спрямленными поверхностями) заданной конфигурации, поддерживая носимое тело (резервуар с жидкостью) большой массы. Поверхности тел-носителей контактируют с поверхностями в нижнем плоском основании носимого тела (рисунки 1).

Тела-носители считаются одинаковыми и перед началом движения одинаково ориентированы в пространстве.



а) Расположения осей

б) Обозначения для круглого резервуара

Рисунок 1. Схема колебания резервуара с жидкостью на опорах качения с подвижными основаниями

Динамику описанной выше механической системы изучим, сделав следующие предположения:

1. Массой опорных элементов можно пренебречь по сравнению с массой носимого тела, т.е. тела-носители определяют кинематику системы, но не обладают инерцией.
2. При качении опорных элементов по поверхностям несущего тела и носимого тела проскальзывание отсутствует.
3. Опорные элементы являются абсолютно твердыми телами.
4. Резервуар представляет собой абсолютно жесткое тело с недеформируемым контуром. Это допущение является вполне оправданным, так как резервуар имеет большую пространственную жесткость.
5. Жидкость, заполняющая резервуар, будем считать несжимаемой, идеальной, в которой затухание отсутствуют.
6. Рассматриваем только горизонтальное движение резервуара.

Вышеописанная колебательная система является механической моделью системы сейсмоизоляции резервуара наполненной жидкостью с помощью опора качения, ограниченных поверхностями вращения высокого порядка с учетом трения качения на релаксирующих грунтах. Колебательное движение этой механической модели возникает вследствие взаимодействия сил инерции резервуара с жидкостью, сил тяжести, а также сил трения качения и внешнего воздействия.

Постановка задачи

В этом параграфе описываем принцип работы кинематического фундамента, опорными элементами которого являются опоры качения ограниченные поверхностями вращения высокого (n) порядка. Модель кинематического фундамента показана в рисунке 1а. Тело I – опора качения ограниченное снизу и сверху поверхностями вращения, выраженными соответственно формулами

$$y_1 = a_1 x_1^n, \quad y_2 = a_2 x_2^m, \quad (1)$$

и имеющими общую ось симметрии (рисунок 2), а тела 2 и 3 являются стационарными основаниями (фундаментом) и нижнего покрытия виброзащищаемого объекта. Специфика такой опоры заключается в том, что радиус кривизны в окрестности центральных опорных точек стремится к бесконечности и уменьшается по мере удаления от оси симметрии, т.е. имеет место спрямление опорных поверхностей в окрестности центральной точки. При стремлении n к бесконечности ($n \rightarrow \infty$) опора качения I примет цилиндрическую форму (рисунок 3).

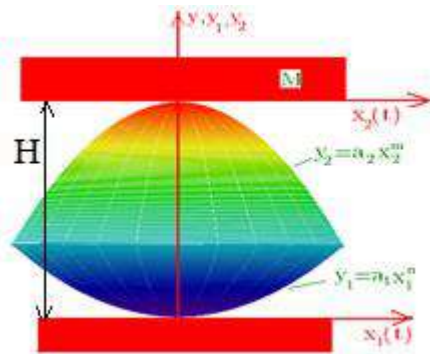


Рисунок 2. Схема опоры качения с опорными поверхностями высокого порядка

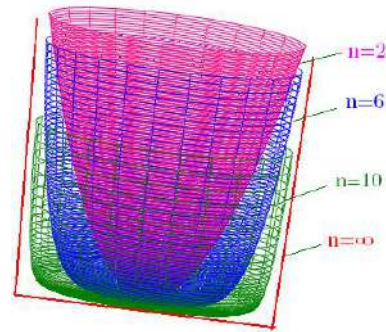


Рисунок 3. Форма опоры качения с несущей поверхностью высокого порядка

Для того чтобы движение виброзащищаемого тела было устойчивым, необходимо потребовать выполнения следующего соотношения между параметрами опоры качения при $n = 2$

$$H < \frac{a_1 + a_2}{2a_1a_2},$$

где H – высота опоры качения, a_1 и a_2 – параметры параболической поверхности, ограничивающей снизу и сверху опор качения соответственно. Для опор качения, несущие элементы которых ограничены поверхностями вращения более высокого порядка, это условие существенно усложняется. Устойчивость движения оказывается зависимой как от конструктивных параметров, так и от начальных условий. В системах восстанавливающая сила возникает за счет увеличения потенциальной энергии при поднятии тяжести опор или опор и виброзащищаемого объекта. Горизонтальное смещение основания обозначено $x_0(t)$. Через $x(t)$ обозначим смещение нижнего основания резервуара с жидкостью, опирающегося на опору качения. Зависимость между горизонтальными относительными перемещениями оснований резервуара с жидкостью на опорах качения и их вертикальными смещениями при $n = m$ имеет вид [13]

$$y = -\frac{1}{2H}(x - x_0)^2 + \frac{(n-1)}{(Hn)^{\frac{n}{n-1}}} \left(\frac{1}{(n-1)\sqrt[n]{a_1}} + \frac{1}{(n-1)\sqrt[n]{a_2}} \right) (x - x_0)^{\frac{n}{n-1}} \quad (2)$$

Выражение (2), определяющее зависимость между горизонтальными относительными перемещениями оснований тел на опорах качения со спрямленными поверхностями и их вертикальными смещениями, можно рассматривать в качестве голономных связей.

Уравнения движения резервуара с жидкостью на опорах со спрямленными поверхностями. Цилиндрический резервуар без колонн

Изучим движения жидкости в резервуаре цилиндрической формы, движущейся по определенному закону. Предположим, что резервуар совершает малые колебательные движения относительно статического положения равновесия в гравитационном поле относительно некоторой инерциальной системы координат, связанной с Землей. Рассмотрим горизонтальные поступательные движения резервуара в направлении оси $x(t)$ (см. рис.1а).

Введем неподвижную цилиндрическую систему координат, начало которой расположено в середине свободной поверхности (см. рис.1а). Обозначим через $\psi(r, \theta, \eta, t)$ потенциал абсолютных скоростей движения жидкости. Потенциал ψ должен удовлетворять уравнению Лапласа и следующим граничным и начальным условиям.

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \dot{x} \sin \theta; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-h} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{\eta=0} + g \xi = 0; \quad (5)$$

$$\psi \Big|_{t=0} = \psi_0; \quad \dot{\psi} \Big|_{t=0} = \dot{\psi}_0 \quad (6)$$

где g – ускорение силы тяжести; (5)- уравнение свободной поверхности.
Из условия (5) следует

$$\xi = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{\eta=0} \quad (7)$$

где $\xi(x, y)$ – уравнение свободной поверхности жидкости.

Условие (3) с физической точки зрения соответствует тому, что составляющая скорости жидкости у стенки резервуара в направлении радиуса соответствует скорости движения резервуара. Условие (4) соответствует отсутствию вертикальной составляющей скорости движения жидкости на дне резервуара. Условие (5) соответствует отсутствию давления на поверхности жидкости, а начальные условия (6) определяют значения ψ и его производной по времени в момент $t = 0$. Величину η можно рассматривать как смещение вдоль оси $O\eta$ частицы, находящиеся первоначально в плоскости $\eta = 0$. Будем искать потенциал в виде суммы двух потенциалов:

$$\psi = \psi_1(r, \theta, \eta, t) + \psi_2(r, \theta, \eta, t) \quad (8)$$

Потенциалы ψ_1 и ψ_2 должны удовлетворять уравнением Лапласа

$$\Delta \psi_1 = 0; \quad \Delta \psi_2 = 0 \quad (9)$$

а также следующим граничным и начальным условиям

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \dot{x} \sin \theta; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-h} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-h} = \dot{y}_0 - \dot{y} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} \Big|_{\eta=0} + g \xi_2 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \Big|_{\eta=0} - g \xi_1 \quad (13)$$

$$(\psi_1 + \psi_2) \Big|_{t=0} = \psi_0; \quad (\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) \Big|_{t=0} = \dot{\psi}_0 \quad (14)$$

где

$$\xi_1 = \int_0^t \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} dt, \quad \xi_2 = \int_0^t \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} dt \quad (15)$$

Решение первого уравнения (9), т.е в качестве потенциала ψ_1 примем

$$\psi_1 = (r, \theta, \eta, t) = \dot{x} \cdot r \cdot \sin \theta \quad (16)$$

где \dot{x} - скорость поступательного движения Резервуара по направлению оси $x(t)$. Таким образом ψ_1 является потенциалом абсолютного движения жидкости при указанных выше условиях. Потенциал ψ_2 определяет движение жидкости в неподвижном сосуде, вызванное неравномерным давлением при движении с потенциалом ψ_1 .

Решение второго уравнения (9) возьмем в следующем виде

$$\psi_2 = \dot{f}^* Y(\eta) H(\theta) R(r) \quad (17)$$

где $\dot{f}^*(t)$ - некоторая функция, зависящая от времени.

Разделяя переменные во втором уравнении (9), получим следующую систему уравнений для определения $Y(\eta)$, $H(\theta)$, и $R(r)$:

$$\begin{aligned} Y''(\eta) - \lambda^2 Y(\eta) &= 0 \\ H''(\theta) - s^2 H(\theta) &= 0 \\ R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \left(\lambda^2 - \frac{s^2}{r^2} \right) R(r) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Решение уравнений (18), удовлетворяющих граничным условиям (11) и (12), принимая $s=1$, возьмем в следующем виде:

$$\begin{aligned} Y(\eta) &= ch \left(\chi_n \frac{\eta + h}{a} \right), \\ H(\theta) &= \sin \theta, \\ R(r) &= J_1 \left(\chi_n \frac{r}{a} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

где J_1 - функция Бесселя первого порядка, а χ_n является корнем уравнения

$$J_1(\chi) = 0 \quad (20)$$

Это уравнение имеет бесчисленное множество корней. Первые пять корней имеют следующие значения: $\chi_n = 1,84; 5,33; 8,53; 11,71; 14,86$

Разность между последующим и предыдущим корнями с увеличением номера корня стремится к π . Беря сумму независимых решений, получим

$$\psi_2(r, \theta, \eta, t) = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \dot{f}^*(t) \frac{ch \left(\chi_n \frac{\eta + h}{a} \right)}{ch \left(\chi_n \frac{h}{a} \right)} J_1 \left(\chi_n \frac{r}{a} \right) \quad (21)$$

Для того чтобы определить функцию $\dot{f}^*(t)$, подставим (21) в условие (13). Тогда получим

$$\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \dot{f}^*(t) J_1 \left(\chi_n \frac{r}{a} \right) + g \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(t) J_1 \frac{\chi_n}{a} th \left(\chi_n \frac{h}{a} \right) J_1 \left(\chi_n \frac{r}{a} \right) = -\ddot{x} r \sin \theta \quad (22)$$

Воспользуемся разложением Дини для r , по которому

$$\chi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_\nu \left(\lambda_n \frac{r}{a} \right), \quad (23)$$

где λ_n - положительные корни уравнения

$$zJ'_\nu(\lambda) + \tilde{H}J_\nu(\lambda) = 0 \quad (24)$$

а b_n определяется формулой

$$b_n = \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 - \nu^2)J_\nu^2(\lambda_n) + \lambda_n^2 J_\nu'^2(\lambda_n)} \int_0^1 t \chi(t) J_\nu(\lambda_n t) dt \quad (25)$$

Принимая $\chi(r) = r, \nu = 1, \tilde{H} = 0, \lambda_n = \chi_n$ получим

$$b_n = \frac{2\chi_n^4 J_2(\chi_n)}{[(\chi_n^2 - 1)J_\nu^2(\chi_n) + \chi_n^2 J_\nu'^2(\chi_n)]\chi_n^3} = \frac{2}{(\chi_n^2 - 1)J_1(\chi_n)} \quad (26)$$

и

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_1 \left(\chi_n \frac{r}{a} \right) \quad (27)$$

подставляя (27) в (22) и $f_n^*(t) = f_n(t)b_n a$ получим уравнение для определения функции $f_n(t)$

$$\ddot{f}_n(t) + \tilde{\omega}_n^2 f_n(t) = -\frac{\ddot{x}}{a} \quad (28)$$

где
$$\tilde{\omega}_n^2 = \frac{g}{a} \chi_n \operatorname{th} \left(\chi_n \frac{h}{a} \right) \quad (29)$$

Окончательно потенциал скоростей абсолютного движения определяется по формуле

$$\psi = a^2 \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n^*(t) \frac{\operatorname{ch} \left(\chi_n \frac{\eta + h}{a} \right)}{\operatorname{ch} \left(\chi_n \frac{h}{a} \right)} + \frac{\dot{x}}{a} \right] b_n J_1 \left(\chi_n \frac{r}{a} \right) \quad (30)$$

Начальные условия (6) являются также начальными условиями для функции $f_n(t)$. Имея значение потенциала скоростей ψ можно определить гидродинамическое давление жидкости на стенки резервуара и днище.

Воспользуемся для этой цели уравнением Бернулли для потенциального (неустановившегося) течения жидкости

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{g^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\eta = f(t) \quad (31)$$

Это уравнение называется обобщенным уравнением Бернулли. Функцию $f(t)$ стоящая в правой части уравнения (31), может быть без ограничения общности положенной равной

нулю. В самом деле, поскольку составляющие вектора скорости являются производными от потенциала скорости по координатам, мы всегда имеем возможность прибавить к потенциалу $\psi(x, y, z, t)$ любую функцию времени т.е так как

$$\psi^*(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) + f(t) \quad (32)$$

Поставив (32) в (31) получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{g^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\eta = 0 \quad (33)$$

Будем рассматривать «медленное» движение жидкости. Тогда полное давление в любой точке жидкости можно определить по формуле (33) отбросив в нем член, содержащий квадрат скорости и имеет вид

$$P(r, \theta, \eta, t) = -\rho \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + g\eta \right] \quad (34)$$

где ρ – плотность жидкости.

Как видно из формулы (34), полное давление жидкости $P(r, \theta, \eta, t)$ складывается из двух воздействий:

1. Гидродинамического

$$P_g(r, \theta, \eta, t) = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (35)$$

2. Гидростатического

$$p_c = -\rho g\eta \quad (36)$$

По формуле (35) определяется давление жидкости на стенки резервуара в зависимости от характера его движений.

Подставляя (30) в (35), получим для $r = a$

$$p(a, \theta, \eta, t) = -2\rho a^2 \sin \theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ddot{f}_n(t)}{\ddot{x}} a \frac{ch\left(\chi_n \frac{\eta+h}{a}\right)}{ch\left(\chi_n \frac{h}{a}\right)} + 1 \right] d_n \frac{\ddot{x}}{a} \quad (37)$$

где
$$d_n = \frac{1}{(\chi_n^2 - 1)} \quad (38)$$

Для изучения колебаний виброзащитных устройств на опорах качения несущего резервуара, необходимо определить величины результирующей гидродинамических сил. Для этого необходимо значение p_g умножить на $a \sin \theta$ и полученное выражение проинтегрировать дважды по η и θ в пределах от $-h$ до 0 и от 0 до 2π .

В результате получим

$$P_x = X = -a\rho \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \Big|_{r=a} \sin \theta d\theta d\eta \quad (39)$$

Подставляем (30) в (39), после проведения всех выкладок получим

$$X = -2\pi\rho a^3 h \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a}{h\chi_n} th\left(\chi_n \frac{h}{a}\right) \frac{\ddot{f}_n(t)}{\ddot{x}} a + 1 \right] d_n \frac{\ddot{x}}{a} \quad (40)$$

Расстояние z_c от точки приложения этой силы до дна определяется как координата центр тяжести по формуле

$$z_c = h - \frac{\int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{r=a} \sin \theta d\theta (h - \eta) d\eta}{\int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{r=a} \sin \theta d\theta d\eta}$$

После проведения всех выкладок получим $\frac{h}{a} = h_0$

$$z_c = h \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{h_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[th(\chi_n, h_0) - \frac{1}{\chi_n h_0} \left(\frac{1}{ch(\chi_n h_0)} \right) - 1 \right] \frac{\ddot{f}}{\ddot{x}} a}{1 + \frac{1}{h_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n th(\chi_n h_0) \frac{\ddot{f}}{\ddot{x}} a} \quad (41)$$

Во всех формулах определяющих гидродинамическое давление и положения координаты приложения равнодействующей этих сил z_c , имеется неизвестная функция $f_n(t)$, зависящая от характера движения резервуара на опорах качения и определяемая из уравнения (28).

Результаты исследования

Уравнения движения резервуара наполненной жидкостью на опорах качения со спрямленными поверхностями. Будем рассматривать только поступательное движение резервуара на опорах качения со спрямленными поверхностями, пренебрегая вращением и вертикальным движением. Выведем дифференциальное уравнение движение резервуара частично заполненного жидкостью на опорах качения ограниченных сверху и снизу параболами высшего порядка. Кинетическая и потенциальная энергия резервуара с жидкостью выражена в виде

$$T = \frac{1}{2} [M + m] (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \Pi = [M + m] g (y - y_0) \quad (42)$$

Три составления уравнения движения резервуара с жидкостью на опорах качения со спрямленными поверхностями необходимо учитывать гидродинамические силы и силы трения качения определяемых следующими формулами:

Гидродинамическая сила

$$X = -2\pi\rho a^3 h \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a}{h\chi_n} th\left(\chi_n \frac{h}{a}\right) \frac{\ddot{f}_n(t)}{\ddot{x}} a + 1 \right] d_n \frac{\ddot{x}}{a} \quad (43)$$

Для вывода дифференциальных уравнений движения резервуара с жидкостью на опорах качения воспользуемся уравнениями Феррерса, рассматривая $x(t)$ и $y(t)$, как обобщенные координаты, уравнения (2) в качестве голономной связи, наложенной на вертикальное перемещение резервуара, а выраженными (43) как обобщенные силы.

Уравнения движения резервуара с жидкостью на опорах качения будут иметь вид:

$$\ddot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) = -\frac{\ddot{x}}{a}$$

$$(M+m)\ddot{x} - \lambda \left\{ -\frac{1}{H}(x-x_0) + \frac{n}{(Hn)^{\frac{n}{n-1}}} \left[\frac{1}{(a_1)^{\frac{1}{n-1}}} + \frac{1}{(a_1)^{\frac{1}{n-1}}} \right] (x-x_0)^{\frac{1}{n-1}} \right\} =$$

$$-2\pi\rho a^3 h \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a}{h\chi_n} th\left(\chi_n \frac{h}{a}\right) \frac{\ddot{f}_n(t)}{\ddot{x}} a + 1 \right] d_n \frac{\ddot{x}}{a}$$

$$(M+m)\ddot{y} + (M+m)g + \tilde{\lambda} = 0$$

где $\tilde{\lambda}$ - неопределенный множитель Лагранжа. Присоединяя к этим уравнениям уравнение связи (2), получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Исключая $\tilde{\lambda}$ и y с помощью уравнения связи (2), получим следующие системы дифференциального уравнения.

$$\ddot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) = -\frac{\ddot{x}}{a} \tag{45}$$

$$\ddot{x} + \left(1 + \frac{\ddot{y}_0}{g}\right) \left[\Phi(x-x_0) - \omega_0^2(x-x_0) \right] = -\frac{2m}{m+M} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a}{h\chi_n} th\left(\chi_n \frac{h}{a}\right) \frac{\ddot{f}_n(t)}{\ddot{x}} a + 1 \right] d_n \ddot{x} \tag{46}$$

где $\Phi(x-x_0) = \omega_0^2 N_n (x-x_0)^{\frac{1}{n-1}}$, $\omega_0^2 = \frac{g}{H}$, $N_n = \frac{1}{(nH)^{\frac{1}{n-1}}} \left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{a_1}} + \frac{1}{\sqrt[n-1]{a_2}} \right)$

Нелинейное уравнение (46) описывает движение резервуара с жидкостью на опорах качения ограниченных параболами высокого порядка с учетом трения качения на релаксирующих грунтах при смещении оснований по горизонтальному и вертикальному направлениям. Систему дифференциальных уравнений (45), (46) преобразуем к виду

$$\ddot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) = -\frac{\ddot{x}}{a}$$

$$\ddot{x} + (1 + \frac{\ddot{y}_0}{g}) \frac{1}{\frac{\sigma m}{M+m}} \left[\Phi(x-x_0) - \omega_0^2(x-x_0) \right] = -\frac{\gamma m}{M+m} \ddot{f}_n(t) \tag{47}$$

где $\sigma = 2 \sum_{n=1}^{\infty} d_n$, $\gamma = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a^2 d_n}{h\chi_n} th\left(\chi_n \frac{h}{a}\right) \right]$

Дискуссия

Рассмотрим колебательное движение резервуара с жидкостью, массы которого много раз меньше массы основания при горизонтальном смещении несущего тела.

Предположим, что $M \gg m$, $y_0(t) = 0$

Рассмотрим несколько характерных случаев движения резервуара с тяжелым основанием на опорах качения со спрямленными поверхностями.

Вычисления проводились при следующих значениях параметров:

$$n = 4, H = 300 \text{ см}, a_1 = 6.25 \cdot 10^{-8} \text{ см}, a_2 = 1.481 \cdot 10^{-7} \text{ см}, N_n = 41.497 \text{ см}, \omega_0 = 1.807 \frac{1}{\text{с}}$$

$$K_1 = 1,148, K_{23} = 0.196, K_5 = 0.048$$

$$\begin{aligned} n = 4; & \quad a_1 = 6,25 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-3}; & \quad a_2 = 15 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-3}; \\ n = 6; & \quad a_1 = 1,56 \cdot 10^{-12} \text{ см}^{-5}; & \quad a_2 = 6,6 \cdot 10^{-12} \text{ см}^{-5}; \\ H = 3 \text{ м}; & \quad \omega_0^2 = 3,26 \text{ с}^{-2}; & \quad g = 9,8 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Исследуем свободные незатухающие колебания виброзащитных устройств на опорах качения, состоящих из резервуара с жидкостью. В этом случае в систему уравнения движения (47) необходимо положить $x_0 = 0$. Тогда получим

$$\ddot{f}_n(t) + \omega_n^2 f_n(t) = -\frac{\ddot{x}}{a} \quad (48)$$

$$\ddot{x} + \Phi(x) - \omega_0^2(x) = 0 \quad (49)$$

где
$$\Phi(x) = \omega_0^2 N_n x^{\frac{1}{n-1}}, N_n = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{a_1}} + \frac{1}{\sqrt[n-1]{a_2}} \right); \omega_0^2 = \frac{g}{H} \quad (50)$$

В соответствии с численно-аналитическим методом тригонометрической коллокации [13] представим решение и нелинейный член уравнения (10) в виде усеченного тригонометрического ряда соответственно

$$x = \sum_{k=1}^{\nu} A_{2k-1} \sin(2k-1)\omega t, \quad (51)$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\nu} b_{2k-1} \sin(2k-1)\omega t. \quad (52)$$

Ограничиваясь тремя членами для первого приближения, полагая, что $A_1 \neq 0$, $A_3 = A_5 = 0$ методом коллокации определим коэффициенты b_1, b_3, b_5 нелинейного члена уравнений (49) в виде

$$b_1 = \omega_0^2 N K_1 A_1^{\frac{1}{n-1}}, b_3 = \omega_0^2 N K_3 A_1^{\frac{1}{n-1}}, b_5 = \omega_0^2 N K_5 A_1^{\frac{1}{n-1}} \quad (53)$$

где

$$K_1 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2^{\frac{1}{n-1}}} + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}} + 1 \right], K_2 = \frac{1}{3} \left[2^{\frac{n-2}{n-1}} - 1 \right], K_3 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2^{\frac{1}{n-1}}} - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\frac{1}{n-1}} + 1 \right]$$

Подставляя (51), (52) и (53) в уравнение (49) и приравнивая члены с одинаковыми $\cos(2k-1)$, определим

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{N_n K_1}{A_1^{\frac{n-2}{n-1}}} - 1}, A_3 = \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{9\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}}, A_5 = \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{25\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} \quad (54)$$

Учитывая (51), (52) и (54), представим решения уравнения (49) в виде

$$x = A_1 \cos(\omega t) + \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{9\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} \cos(3\omega t) + \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{25\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} \cos(5\omega t) \quad (55)$$

Общее решение дифференциального уравнения (9) (48) представим в виде.

$$f_n = B_1 \cos(\omega t) + B_3 \cos(3\omega t) + B_5 \cos(5\omega t) + B_0 \cos(\omega_n t) \quad (56)$$

Подставляя (56) и (58) в (48) находим

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\omega^2}{a(\omega_n^2 - \omega^2)} A_1 \\ B_3 &= \frac{9\omega^2}{a(\omega_n^2 - 9\omega^2)} \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{9\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} \\ B_5 &= \frac{25\omega^2}{a(\omega_n^2 - 25\omega^2)} \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{25\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned} \quad (57)$$

Коэффициент B_0 решение (56) определяется при начальных условиях $t=0$; $f_n=0$ и имеет вид

$$B_0 = - \left(\frac{\omega^2}{a(\omega_n^2 - \omega^2)} A_1 + \frac{9\omega^2}{a(\omega_n^2 - 9\omega^2)} \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{9\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} + \frac{25\omega^2}{a(\omega_n^2 - 25\omega^2)} \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{25\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} \right) \quad (58)$$

Учитывая выражения (57) и (58), перепишем общее решения (17) (56) уравнений (9) и (48) в виде

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{\omega^2}{a(\omega_n^2 - \omega^2)} A_1 (\cos(\omega t) - \cos(\omega_n t)) + \frac{9\omega^2}{a(\omega_n^2 - 9\omega^2)} \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{9\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} (\cos(3\omega t) - \cos(\omega_n t)) + \\ &+ \frac{25\omega^2}{a(\omega_n^2 - 25\omega^2)} \frac{\omega_0^2 N_n K_1}{25\omega^2 + \omega_0^2} A_1^{\frac{1}{n-1}} (\cos(5\omega t) - \cos(\omega_n t)) \end{aligned} \quad (59)$$

Зависимости перемещения основания резервуара, наполненного жидкостью $x(t)$ от времени t показаны на рисунке 4. Сплошная линия (кривая 1) построена по результатам аналитических решений, а линия из точек (кривая 2) построена по результатам численных решений уравнений (49). Похожие кривые, показанные на рис. 4, дают представление о близости результатов аналитического и численного решений. Графическая иллюстрация решений уравнения (48) дана в рис. 5. Кривая 1 построена по формуле (59), кривая 2 построена по результатам численных решений при следующих значениях параметров:

$$a = 10 \text{ см}, h = 0.36 \cdot 10^2 \text{ см}, \rho = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \chi_1 = 1.84, h_0 = \frac{h}{a}$$

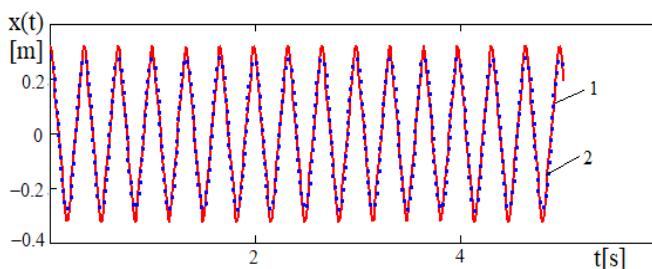


Рисунок 4. График зависимости $x(t)$ от t .

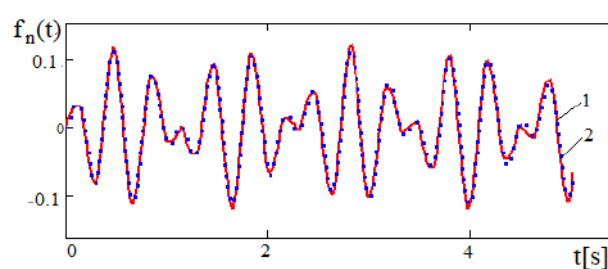


Рисунок 5. График зависимости $f_n(t)$ от t .

На рисунках 6 и 7 представлены осциллограммы решения уравнения (48) в случае резонанса и биений.

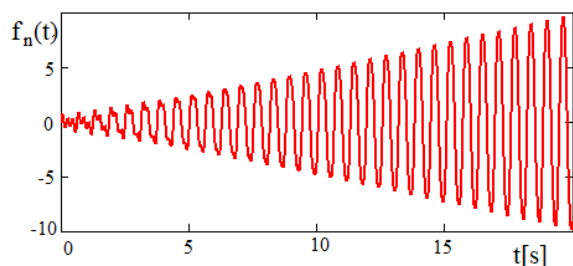


Рисунок 6. Осциллограммы резонансного решения уравнения (48)

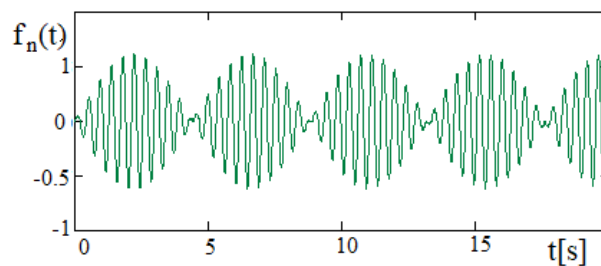


Рисунок 7. Осциллограммы решения уравнения (48) в случае биений

График результирующих гидродинамических сил действующей на стенку резервуара с жидкостью при наличии свободной поверхности в случае резонанса и биения, показан на рисунках 8 и 9 соответственно. На рисунке 8 кривая 1- осциллограммы, а кривая 2- амплитуды результирующих гидродинамических сил жидкостей, действующей на стенку резервуара.

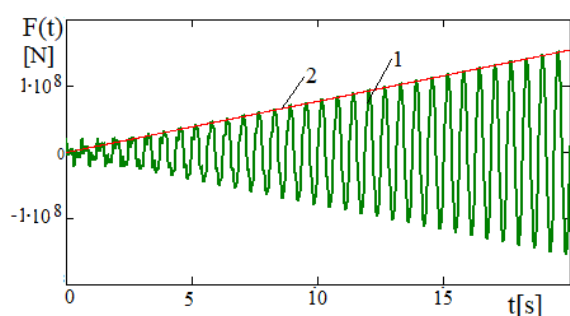


Рисунок 8. График результирующих гидродинамических сил жидкостей, действующих на стенку резервуара в случае резонанса

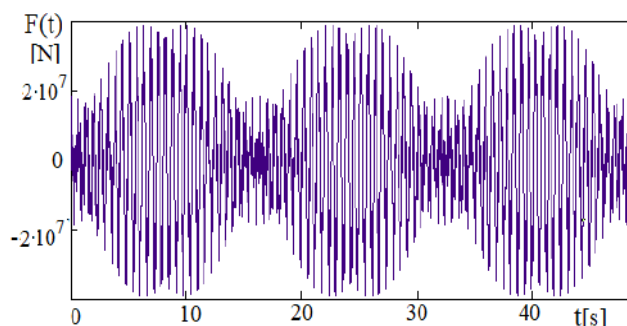


Рисунок 9. График результирующих гидродинамических сил жидкостей, действующих на стенку резервуара в случае биения

Заключение

Построена система дифференциальных уравнений движения резервуара цилиндрической формы с частично заполненной жидкостью на опорах, ограниченных поверхностями вращения высокого порядка. Полученные уравнения движения виброзащищаемого резервуара с жидкостью на виброопорах качения со спрямленными поверхности являются существенно нелинейными. Разработана аналитическая методология исследования вынужденных колебаний виброзащищаемого резервуара с жидкостью на опорах качения со спрямленными поверхностями и определены резонансные решения и решения в случае биений, которые отвечают стационарному режиму колебательного движения.

Благодарность

Авторы выражают искреннюю благодарность за финансовую поддержку, оказанную Министерством науки и высшего образования Республики Казахстан в рамках гранта фундаментальных исследований (номер гранта: BR20280990)

Список использованных источников

- [1] El Damatty A., Korol R. M., Tang L. M. Analytical and experimental investigation of the dynamic response of liquid-filled conical tanks // Proc. World Conf. Earthquake Eng..New Zeland, 2000.— Pap. 966, Topic 7.— P. 8. URL: <https://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/0966.pdf>
- [2] El Damatty A., Sweedan A. M. I. Equivalent mechanical analog for dynamic analysis of pure conical tanks // Thin-Wall. Struct.— 2006.— 44.— P. 429– 440. DOI: [10.1016/j.tws.2006.03.016](https://doi.org/10.1016/j.tws.2006.03.016)
- [3] Dutta S., Mandal A., Dutta S.C. Soil structure interaction in dynamic behaviour of elevated tanks with alternate frame staging configurations // J. Sound Vib. 2004. 277.P. 825–853. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.09.007>

- [4] Sweedan A. M. I. Equivalent mechanical model for seismic forces in combined tanks subjected to vertical earthquake excitation // *Thin-Wall. Struct.*– 2009.– 47.– P. 942–952. DOI: [10.1016/j.tws.2009.02.001](https://doi.org/10.1016/j.tws.2009.02.001)
- [5] Микишев Г. Н., Дорожкін Н. Я. Експериментальні дослідження свободних коливань жидкості в контейнерах // *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, мех. и машиностр.* 1961. N 4. С. 48–53. pdf
- [6] Bauer, H.F. (1982), “Sloshing in conical tanks”, *Acta Mechanica*, Vol. 43 Nos 3-4, pp. 185-200 pdf
- [7] Докучаев Л.В. К решению краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях // *Прикладная математика и механика*. 1964. Т. 28. №1. С. 151-154. pdf
- [8] Луковський І. О. До побудови розв'язку нелінійної задачі про вільні коливання рідини в посудинах довільної геометричної форми.– *Доп. АН УРСР. Сер. А*: 1969, N 3.– 207–210 с. pdf
- [9] Луковский И. А., Троценко В. А., Фещенко С. Ф. Расчет динамических характеристик жидкости в подвижных полостях.– К.: АН УССР, 1968.– 265 р. pdf
- [10] Луковський І. О. До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в конічних баках // *Доп. НАН України. Сер. А*.– 2002.– N 5.– P. 53–58. pdf
- [11] K. Bissembayev, Zh. Iskakov, Z. Ualiyev, A. Smanov. Forced oscillations investigation of elastic designs of variable cross-section with heavy base on vibration supports/ *IFTToMM Asian Mechanisms and Machine Science Conference, ASIAN MMS 2024*, p. 99-106. DOI: [10.1007/978-3-031-67569-0_12](https://doi.org/10.1007/978-3-031-67569-0_12)
- [12] Kuatbay Bissembayev, Amandyk Tuleshov, Askar Seidakhmet, Madi Kaliyev, and Kundyz Sultanova «Oscillations of a Body on Rolling Bearings with Straightened Surfaces Caused by a Random Movement of the Base», *IFTToMM WC 2023, Mechanisms and Machine Science, MMS 149*, pp. 873–883, 2024., https://doi.org/10.1007/978-3-031-45709-8_85.
- [13] Bissembayev, K., Jomartov, A., Tuleshov, A., Dikambay, T., Analysis of the oscillating motion of a solid body on vibrating bearers // *Machines*, 7(3), 58 (2019), p.1-21. DOI: [10.3390/machines7030058](https://doi.org/10.3390/machines7030058)

References

- [1] El Damatty A., Korol R. M., Tang L. M. Analytical and experimental investigation of the dynamic response of liquid-filled conical tanks // *Proc. World Conf. Earthquake Eng.– New Zeland*, 2000.– Pap. 966, Topic 7.– P. 8. URL: <https://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/0966.pdf>
- [2] El Damatty A., Sweedan A. M. I. Equivalent mechanical analog for dynamic analysis of pure conical tanks // *Thin-Wall. Struct.*– 2006.– 44.– P. 429– 440. DOI: [10.1016/j.tws.2006.03.016](https://doi.org/10.1016/j.tws.2006.03.016)
- [3] Dutta S., Mandal A., Dutta S.C. Soil structure interaction in dynamic behaviour of elevated tanks with alternate frame staging configuration *J. Sound Vib.* 2004.277.P. 825–853. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.09.007>
- [4] Sweedan A. M. I. Equivalent mechanical model for seismic forces in combined tanks subjected to vertical earthquake excitation // *Thin-Wall. Struct.*– 2009.– 47.– P. 942–952. DOI: [10.1016/j.tws.2009.02.001](https://doi.org/10.1016/j.tws.2009.02.001)
- [5] Mikishev G.N., Dorozhkin N.Ja. (1961) Eksperimental'nye issledovaniya svobodnyh kolebaniy zhidkosti v kontejnerah [Experimental studies of free oscillations of fluid in containers]. *Izv. AN SSSR. Otd. tehn. nauk, meh. i mashinostr.*, № 4, 48–53. pdf
- [6] Bauer, H.F. (1982), “Sloshing in conical tanks”, *Acta Mechanica*, Vol. 43 Nos 3-4, pp. 185-200 pdf
- [7] Dokuchaev L.V. (1964) K resheniju kraevoj zadachi o kolebaniyah zhidkosti v konicheskikh polostyah [On the solution of the boundary value problem of fluid oscillations in conical cavities]. *Prikladnaja matematika i mehanika*, Vol. 28, № 1, 151–154. pdf
- [8] Lukovs'kyj I.O. (1969) Do pobudovy rozv'jazku nelinejnoji zadachi pro vil'ni kolebannja ridyny v posudynah dovil'noji geometrichnoji formy [On the construction of the solution to the nonlinear problem of free oscillations of fluid in vessels of arbitrary geometric shape]. *Dop. AN URSSR. Ser. A*, № 3, 207–210. pdf
- [14] Lukovskij I.A., Trocenko V.A., Feshhenko S.F. (1968) Raschet dinamicheskikh harakteristik zhidkosti v podvizhnyh polostyah [Calculation of dynamic characteristics of fluid in moving cavities]. K.: AN USSR, 265 p. pdf
- [9] Lukovs'kyj I.O. (2002) Do rozv'jazuvannja spektral'nyh zadach linijnoji teorії kolivan' ridyny v konichnih bakah [On solving spectral problems of the linear theory of fluid oscillations in conical tanks]. *Dop. NAN Ukrainy. Ser. A*, № 5, 53–58. pdf
- [10] K. Bissembayev, Zh. Iskakov, Z. Ualiyev, A. Smanov. Forced oscillations investigation of elastic designs of variable cross-section with heavy base on vibration supports/ *IFTToMM Asian Mechanisms and Machine Science Conference, ASIAN MMS 2024*, p. 99-106. DOI: [10.1007/978-3-031-67569-0_12](https://doi.org/10.1007/978-3-031-67569-0_12)
- [11] Kuatbay Bissembayev, Amandyk Tuleshov, Askar Seidakhmet, Madi Kaliyev, and Kundyz Sultanova «Oscillations of a Body on Rolling Bearings with Straightened Surfaces Caused by a Random Movement of the Base», *IFTToMM WC 2023, Mechanisms and Machine Science, MMS 149*, pp. 873–883, 2024., https://doi.org/10.1007/978-3-031-45709-8_85.
- [12] Bissembayev, K., Jomartov, A., Tuleshov, A., Dikambay, T., Analysis of the oscillating motion of a solid body on vibrating bearers // *Machines*, 7(3), 58 (2019), p.1-21. DOI: [10.3390/machines7030058](https://doi.org/10.3390/machines7030058)