

А.Б. Биргебаев¹, Г.О. Жұмағұл^{1*}

¹Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
*e-mail: zhumagul.gaziza@bk.ru

$L_p(R)$ КЕҢІСТІГІНДЕГІ БІР ОПЕРАТОРДЫҢ БӨЛІКТЕНУІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Табиғаттың физикалық заңдарының көпшілігін жай және дербес туындылы теңдеулер тілінде тұжырымдауға болады. Мысал ретінде Штурм-Лиувилл, Навье - Стокс теңдеуін, кванттық механикадағы Шредингер теңдеулерін келтіруге болады. Бұл теңдеулердің барлығында да физикалық құбылыстар кеңістіктің және уақыттың туындылары тілінде сипатталады. Теңдеулердегі туындылардың қатысуы маңызды физикалық шамаларды сипаттайды. Олар жылдамдық, үдеу, күш, үйкеліс, ағым, ток және т.б. Сонымен, құрамында анықтауды қажет ететін дифференциалдық теңдеу пайда болады. Дифференциалдық теңдеулер үшін қойылатын есептердің ішінде шешімі бар, жалғыз болуы, тегістігі және есептің бастапқы шарттарынан үзіліссіз түрде тәуелді қисынды қойылатын есептер класы ерекше маңызды. Бұл мақаланың мақсаты салмақты коэффициентті Штурм-Лиувилл теңдеуінің шешімінің бар болуының және шешімнің тегістігінің жеткілікті шарттарын анықтау. Мақсатқа жету барысында берілген дифференциалдық теңдеу операторлар әдісімен зерттелді. Есеп Банах кеңістігінде қарастырылып операторлардың, функционалдық кеңістіктердің қасиеттері пайдаланылды. Кванттық механиканың көптеген сұрақтары дербес жағдайда Гильберт кеңістігінде элетромагниттік толқындардың сәуле шашуы сингулярлы дифференциалдық операторлардың кері операторларының бар болуы және бөліктенетін есептерге келетіні мәлім. Сондай операторлардың бірі реті жоғары туындыларында салмақтылығы бар Штурм-Лиувилл операторлары. Бұл жұмыста функционалдық анализ әдістерімен аталған оператор зерттелген. Банах кеңістігінде осы операторға сәйкес дифференциалдық теңдеудің шешімінің бар болатындығы және оператордың бөліктенуінің жеткілікті шарттары табылған.

Түйін сөздер: функционалдық талдау, Банах кеңістігі, оператордың бөліктенуі, Штурм-Лиувилль операторы, ерекшеленген дифференциалдық операторлар, шешімнің тегістігі.

А.Б. Биргебаев¹, Г.О. Жумагул¹

¹Казахский Национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан
О РАЗДЕЛИМОСТИ ОДНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p(R)$

Аннотация

Большинство физических законов природы можно сформулировать на языке простых и независимых производных уравнений. Примерами служат уравнения Штурма-Лиувилля, Навье-Стокса и уравнения Шредингера в квантовой механике. Во всех этих уравнениях физические явления описываются на языке производных пространства и времени. Наличие производных в уравнениях описывает важные физические величины. Это скорость, ускорение, сила, трение, поток, ток и так далее. Среди задач, поставленных для дифференциальных уравнений, особое значение имеет класс логически поставленных задач, которые имеют решение, являются единственными, гладкими и непрерывно зависят от начальных условий задачи. Цель этой статьи - определить достаточные условия существования решения уравнения Штурм-Лиувилля с весомым коэффициентом и гладкостью решения. В ходе достижения цели заданное дифференциальное уравнение изучалось методом операторов функциональном пространстве. Задача рассматривалась в Банаховом пространстве, использовались свойства функциональных пространств. Известно, что многие вопросы квантовой механики сводятся к задачам, в которых излучение элетромагнитных волн в гильбертовом пространстве в частном случае определяется наличием обратных операторов сингулярных дифференциальных операторов и делимостью. Одним из таких операторов является оператор Штурма-Лиувилля с весом при старшей производной. Данной работе исследуется названный оператор

методами функционального анализа. Найденый достаточные условия существования решения и разделимости оператора в Банаховом пространстве.

Ключевые слова: функциональный анализ, Банахово пространство, разделимость оператора, оператор Штурма-Лиувилля, сингулярные дифференциальные операторы, гладкость решений.

A.B. Birgebaev¹, G.O. Zhumagul¹

¹Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan
ON THE SEPARATION OF A SINGLE OPERATOR IN THE SPACE $L_p(R)$

Abstract

Most of the physical laws of nature can be formulated in the language of simple and independent derived equations. Examples are the Sturm-Liouville, Navier-Stokes, and Schrodinger equations in quantum mechanics. In all these equations, physical phenomena are described in the language of derivatives of space and time. The presence of derivatives in equations describes important physical quantities. These are speed, acceleration, force, friction, flow, current, and so on. Among the problems posed for differential equations, a class of logically posed problems is of particular importance, which have a solution, are the only ones that are smooth and continuously depend on the initial conditions of the problem. The purpose of this article is to determine sufficient conditions for the existence of a solution to the Sturm-Liouville equation with a weighty coefficient and smoothness of the solution. In the course of achieving the goal, the given differential equation was studied by the method of operators in a functional space. The problem was considered in a Banach space, and the properties of functional spaces were used. It is known that many questions of quantum mechanics are reduced to problems in which the emission of electromagnetic waves in a Hilbert space is determined in the special case by the presence of inverse operators of singular differential operators and separability. One of these operators is the Sturm-Liouville operator with weight at the highest derivative. In this paper, the named operator is investigated by the methods of functional analysis. Sufficient conditions for the existence of a solution and separability of an operator in a Banach space are found.

Keywords: functional analysis, Banach space, operator separability Sturm-Liouville, operator Singular differential operators.

Кіріспе

Әлемде болып жатқан келген физикалық құбылыстардың, жаратылыстану ғылымдарының, медицина саласының шешетін мәселелері математикалық моделдеуге әкелетіні мәлім. Бұл ретте, берілген мәліметтер бойынша дифференциалдық тендеулер құрылады. Мысал ретінде Штурм-Лиувилл, Навье - Стокс тендеуін, кванттық механикадағы Шредингер тендеулерін келтіруге болады, қала берді, медицина аппараттарының (МРТ, УЗИ т.б) өзі математикадағы кері есептер негізінде жұмыс істейді. Бұл тендеулердің барлығында да физикалық құбылыстар жылдамдық, үдеу кеңістіктің элементтері және уақыттың туындылары тілінде сипатталады. Сол себептен де жоғары туындылары салмақты Штур-Лиувилл тендеуін зерттеу маңызды. Кәзіргі таңда функционалдық анализдің қарқынды дамуына байланысты дифференциалдық тендеулерді сәйкес дифференциалдық операторлар түрінде жазып, оны функционалдық анализдің теоремаларын пайдаланып операторлар әдісімен шешу нақты нәтижелер беруде. Оған мақала соңындағы әдебиеттер және ондағы сілтемелер дәлел. Бұл жұмыста Штурм-Лиувилл операторының модификациясы болып табылатын оператор қарастырылып оның шешімінің бар болуының және тегіс болуының жеткілікті шарттары, Банах кеңістігінде табылған. Алынған нәтижелер жаңа және оның әдістері жоғары ретті салмақты туындылары бар сызықтық емес оператор үшін де жалпыланады.

Зерттеу әдіснамасы

Есептің қойылымы және зерттеу әдісі. Берілген мақалада $C_0^\infty(R)$ кеңістігінде анықталып $L_p(R)$ кеңістігінде тұйықталуы болып табылатын

$$L_0 y = -(p y')' + q(x) y, \quad (1.1)$$

$$\rho(x) \in C'(R), q(x) \in C(R), \rho(x) > 0, q(x) \geq 1$$

теңдігімен анықталған дифференциалдық оператордың бөліктенуі қарастырылған.

Анықтама Штурма –Лиувилл операторы бөліктенеді деп аталады егер

$Ly \in L_p(R), y \in L_p(R)$ жататынынан $y'' \in L_p(R)$ шықса. Бұл есептің қойылуы ең алғаш рет [1,2] жұмыстарда қарастырылып [3 – 5] жұмыстарда жалғасын тапқан.

Мұнда біз [6] Титчмарш жұмысының моддификациясы болып табылатын [7] жұмыстың әдістерін пайдаланамыз. Осыған ұқсас жұмыстар [8 – 11] зерттелген. Ол жұмыстарда тақ ретті туындылары бар сызықты немесе сызықты емес дифференциалдық теңдеулер Гильберт кеңістіктерінде шешіліп, шешімдердің бар болуы және тегістігінің қажетті шарттары табылған.

Алдымен $\rho(x), q(x)$ функцияларына қойылатын талаптарды қарастырайық.

$C \geq 1 (C < \infty)$ тұрақты сандары табылып, мына төмендегі шарттар орындалсын

$$C^{-1} \leq \frac{\rho(x)}{\rho(\eta)}, \frac{q(x)}{q(\eta)} \leq C, \text{ при } |x - \eta| \leq 2 \quad (1.2)$$

$$\sup_{|x-\eta| \leq 2} \frac{\rho(x)}{(q(\eta)+\lambda)^{\frac{\alpha}{2}-\varepsilon}} < \infty, \varepsilon > 0, \quad (1.3)$$

$$\sup_{|x-\eta| \leq 2} \frac{\rho^+(\eta)}{(q(x)+\lambda)^{\frac{\alpha}{2}-\varepsilon}} < \infty, \rho^+(\eta) = \sup_{|x-\eta| \leq 2} |\rho'(x)|, \quad (1.4)$$

$$|(q(\eta) + \lambda)\rho(\eta)^{-1} - (q(x) + \lambda)\rho(x)^{-1}| \leq C_1 \lambda |x - \eta|^\alpha |q(x)|^a \rho(x)^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad (1.5)$$

$$0 < a < \frac{\alpha}{2}, \alpha \in (0,1].$$

Зерттеу нәтижелері

Теорема 1.1. (1.2)-(1.5) шарттары орындалсын. Онда $\lambda \geq \lambda_0$ болғанда (λ_0 -жеткілікті деңгейдегі оң сан).

- а) $L + \lambda E$ операторының $L_p(R)$ кеңістігінде шенелген кері операторы бар болады.
- б) L операторы бөліктенеді.

Теореманы дәлелдеу үшін төмендегі екі лемма қажет болады:

Лемма 1.1. K ядросы $K(x, \eta)$ локалді үзіліссіз болатын интегралдық оператор болсын

$$(Kf)(x) = \int K(x, \eta)f(\eta)d\eta, \text{ онда}$$

$$\|K\|_p \leq \sup_{\eta \in R} \int_{-\infty}^{+\infty} (|K(x, \eta)| + |K(\eta, x)|) d\eta.$$

Бұл лемманың дәлелдеуін [7] жұмыстан көруге болады.

Мынандай ядроларды енгізейік ($\lambda > 0$)

$$M_0(x, \eta, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho(x)^{-\frac{\alpha}{2}} (q(x) + \lambda)^{-\frac{\alpha}{2}} \exp \left[\frac{-(\eta - x)\sqrt{q(x) + \lambda}}{\sqrt{\rho(x)}} \right] & \text{при } \eta > x \\ \frac{1}{2} \rho(x)^{-\frac{\alpha}{2}} (q(x) + \lambda)^{-\frac{\alpha}{2}} \exp \left[\frac{(\eta - x)\sqrt{q(x) + \lambda}}{\sqrt{\rho(x)}} \right] & \text{при } \eta < x \end{cases}$$

$$M_1(x, \eta, \lambda) = \rho(\eta)[\rho(\eta)^{-1}(q(\eta) + \lambda) - (q(x) + \lambda)\rho(x)^{-1}]M_0(x, \eta, \lambda)\tau(\eta - x),$$

$$M_2(x, \eta, \lambda) = -\rho(\eta) [2M'_{o\eta}(x, \eta, \lambda)\tau^{(\eta-x)} + M_0(x, \eta, \lambda)\tau''(\eta - x)],$$

$$M_3(x, \eta, \lambda) = M_0(x, \eta, \lambda)\tau(\eta - x),$$

$$M_4(x, \eta, \lambda) = \rho'(\eta) \left[M_0(x, \eta, \lambda)\tau^{(\eta-x)} + \operatorname{sgn}(x - \eta)\tau(\eta - x)\rho(x)^{-1} \exp\left(\frac{-(\eta - x)\sqrt{q(x) + \lambda}}{\sqrt{\rho(x)}}\right) \right]$$

мұндағы $\tau(t) \in C_0^\infty(R)$

$$\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{при } t > 2 \end{cases} \quad (1.6)$$

шартын қанағаттандыратын функция.

$M_j(\lambda)$ операторын мына формуламен анықтайық

$$(M_j(\lambda)f)(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} M_j(x, \eta, \lambda)f(x)dx \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (1.7)$$

Лемма 1.2. Егер $f(x) \in C_0^\infty(R)$, онда $M_3(\lambda)f \in \mathcal{D}(L)$ және мына теңдік

$$(L + \lambda E)M_3(\lambda)f = f + M_1(\lambda)f + M_2(\lambda)f + M_4(\lambda)f,$$

орынды болады

Дәлелдеуі. $M_3(\lambda)$ операторының анықтамасынан $(M_3(\lambda)f)(\eta) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\eta} \rho(x)^{-\frac{\alpha}{2}} (q(x) + \lambda)^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left(\frac{(x-\eta)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right) \tau(\eta - x)f(x)dx + \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\infty} \rho(x)^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{q(x) + \lambda}{\lambda}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left(\frac{(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right) \tau(\eta - x)f(x)dx$ болатыны шығады.

Осыдан және (1.6) теңдігінен $M_3(\lambda)f \in C_0^1(R)$ жататыны белгілі.

Сонымен қатар мынандай қарапайым теңдіктер орынды,

$$M'_{o\eta}(x, \eta, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{\rho(x)} \exp\left(\frac{-(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right), & \eta > x \\ \frac{1}{2} \frac{1}{\rho(x)} \exp\left(\frac{(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right), & \eta < x \end{cases} \quad (1.8)$$

$$M''_{o\eta}(x, \eta, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{q(x) + \lambda}}{\rho(x)\sqrt{\rho(x)}} \exp\left(\frac{-(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right), & \eta > x \\ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{q(x) + \lambda}}{\rho(x)\sqrt{\rho(x)}} \exp\left(\frac{(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right), & \eta < x \end{cases}$$

немесе

$$M''_{o\eta}(x, \eta, \lambda) = (q(x) + \lambda)\rho(x)^{-1}M_0(x, \eta, \lambda). \quad (1.9)$$

Енді $M_3(\lambda)f$ өрнегіне $(L + \lambda E)$ операторымен әсер ету келесі түрде жүргізіледі

$$(L + \lambda E)M_3(\lambda)f = -\frac{d}{d\eta} \left(\rho \frac{d}{d\eta} M_3(\lambda)f + q(\eta) + \lambda \right) M_3(\lambda)f = -\rho'(\eta) \frac{d}{d\eta} M_3(\lambda)f - \rho(\eta) \frac{d}{d\eta^2} M_3(\lambda)f + (q(\eta) + \lambda)M_3(\lambda)f ,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} M_3(\lambda)f &= \frac{d}{d\eta} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\eta} \rho(x)^{-\frac{\alpha}{2}} (q(x) + \lambda)^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left(\frac{-(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right) \tau(\eta-x) dx + \\ \frac{d}{d\eta} \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\infty} \rho(x)^{-\frac{\alpha}{2}} (q(x) + \lambda)^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left(\frac{(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right) f(x) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\rho(\eta)\sqrt{q(\eta)+\lambda}} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{\sqrt{\rho(\eta)\sqrt{q(\eta)+\lambda}}}\right) f(\eta) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\eta} \frac{d}{d\eta} \left[\rho(x)^{-\frac{\alpha}{2}} \times (q(x) + \lambda)^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left(\frac{-(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right) \tau(\eta-x) \right] f(x) dx + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d}{d\eta} \left[\rho(x)^{-\frac{\alpha}{2}} (q(x) + \lambda)^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left(\frac{(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right) \tau(\eta-x) \right] f(x) dx = \right. \\ \left. \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [M'_{o\eta}(x, \eta, \lambda)\tau(\eta-x) + M_o(x, \eta, \lambda)\tau'(\eta-x)] f(x) dx , \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\eta} \frac{d}{d\eta} \left[-\frac{1}{\rho(x)} \exp\left(-\frac{(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right) \tau(\eta-x) + \rho(x)^{-\frac{\alpha}{2}} (q(x) + \right. \\ \left. \lambda)^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left(\frac{-(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right) \tau'(\eta-x) \right] f(x) dx + \int_{\eta}^{\infty} \int_{-\infty}^{\eta} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{\rho(x)} \exp\left(\frac{(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right) \tau(\eta-x) + \right. \\ \left. \rho(x)^{-\frac{\alpha}{2}} (q(x) + \lambda)^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left(\frac{(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right) \tau'(\eta-x) \right] f(x) dx = -\frac{f(x)}{\rho(x)} + \\ \int_{-\infty}^{+\infty} M''_{o\eta}(x, \eta, \lambda)\tau(\eta-x) + 2M'_{o\eta}(x, \eta, \lambda)\tau'(\eta-x) + M_o(x, \eta, \lambda)\tau''(\eta-x) f(x) dx . \end{aligned}$$

Жоғарыдағы өрнектен мынаны табамыз

$$\begin{aligned} -\rho'(\eta) \frac{d}{d\eta} M_3(\lambda)f &= -\int_{-\infty}^{\infty} \rho'(\eta) [M'_{o\eta}(x, \eta, \lambda)\tau(\eta-x) + M_o(x, \eta, \lambda)\tau'(\eta-x)] f(x) dx - \\ \rho(\eta) \frac{d^2}{d\eta^2} M_3(\lambda)f &= f(\eta) - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\eta) [M''_{o\eta}(x, \eta, \lambda)\tau(\eta-x) + 2M'_{o\eta}(x, \eta, \lambda)\tau'(\eta-x) + \\ M_o(x, \eta, \lambda)\tau''(\eta-x)] f(x) dx . \end{aligned}$$

Бұдан шығатыны

$$\begin{aligned} (L + \lambda E)M_3(\lambda)f &= f(\eta) + \int_{-\infty}^{\infty} (q(\eta) + \lambda)M_3(x, \eta, \lambda) f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\eta)\rho(x)^{-1} (q(x) + \\ \lambda)M_3(x, \eta, \lambda) f(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\eta) [M'_{o\eta}(x, \eta, \lambda)\tau'(\eta-x) + M'_{o\eta}(x, \eta, \lambda)\tau''(\eta-x)] f(x) dx - \\ \int_{-\infty}^{\infty} \rho'(\eta) [sgn(x-\eta)M'_{o\eta}(x, \eta, \lambda)\tau(\eta-x) + M_o(x, \eta, \lambda)\tau'(\eta-x)] f(x) dx &= f + M_1(\lambda)f + M_2(\lambda)f + M_4(\lambda)f . \end{aligned}$$

Лемма дәлелденді.

Енді $\|M_j(\lambda)\|_{\rho \rightarrow \rho}$ нормасын бағалайық ($j = 1, 2, 3, 4$).

Леммы 1.1 пайдаланып

$$\|M_1(\lambda)\|_{\rho} \leq \sup_{\eta \in R} \int_{-\infty}^{\infty} (|M_1(x, \eta, \lambda)| + |M_1(\eta, x, \lambda)|) dx \quad (1.10)$$

табамыз. (1.2), (1.5) шарттардан және (1.6) теңдігінен $\lambda > 0$ болғанда

$$|M_1(x, \eta, \lambda)| + |M_1(\eta, x, \lambda)| \leq \lambda C_1 \left| (q(\eta) + \lambda)^{\alpha - \frac{1}{2}} (x - \eta)^{\alpha} (\rho(\eta))^{-\frac{\alpha-1}{2}} \exp\left[-(x - \eta) \frac{\sqrt{q(x)+\lambda}}{\sqrt{\rho(x)}}\right] \right|$$

теңсіздігі шығады.

Сондықтан (5.10) пайдаланып,

$$\|M_1(\lambda)\|_p \leq C_1 \lambda (q(\eta) + \lambda)^{a-\frac{1}{2}} (\rho(\eta))^{-\frac{(\alpha-1)}{2}} \int_{(x-\eta)} (x-\eta)^\alpha \exp\left(\frac{-(x-\eta)}{\sqrt{\frac{\rho(x)}{c}}} \sqrt{\frac{q(x)}{c} + \lambda}\right) dx$$

бағалауы анықталады.

Мынандай ауыстыруларды пайдаланайық: $x - \eta = t$, $t \sqrt{\frac{q(\eta)+\lambda}{\rho(\eta)}} = u$.

Бұл ауыстыруларды $M_j(\lambda)$, $j = 1,2,3,4$ операторларын бағалағанда да пайдаланамыз, онда

$$\|M_1(\lambda)\|_p \leq C_2 \lambda (q(\eta) + \lambda)^{a-\frac{\alpha}{2}+1} \leq C_4 \lambda^{-\gamma}, \gamma = \frac{\alpha}{2} - a > 0.$$

Лемма 1.1. пайдалансақ $M_2(\lambda)$ операторы үшін

$$\|M_2(\lambda)\|_p \leq \sup_{\eta \in R} \int_{-\infty}^{\infty} (|\rho(x)M'_{o\eta}(x, \eta, \lambda)\tau'(\eta - x)| + |\rho(\eta)M'_{o\eta}(\eta, x, \lambda)\tau'(\eta - x)|) dx + \int_{-\infty}^{\infty} (|\rho(x)M_o(x, \eta, \lambda)\tau''(\eta - x)| + |\rho(\eta)M_o(\eta, x, \lambda)\tau''(\eta - x)|) dx$$
 теңсіздігі орынды.

$M_o(x, \eta, \lambda)$ ядросының өрнегіне байланысты және (1.8) ден

$$|\rho(x)M'_{o\eta}(x, \eta, \lambda)| \leq C_0 \exp\left(\frac{-(\eta-x)\sqrt{q(x)+\lambda}}{\sqrt{\rho(x)}}\right) (q(x) + \lambda)^{-\frac{1}{2}},$$

$$|\rho(x)M_o(x, \eta, \lambda)| \leq C_1 \exp\left(\frac{\sqrt{\rho(x)}}{\sqrt{q(x)+\lambda}}\left(\frac{-(\eta-x)\sqrt{q(x)+\lambda}}{\sqrt{\rho(x)}}\right)\right) (q(x) + \lambda)$$
 бағалауы шығады.

Онда (1.2), (1.3) шарттары орындалғанда және $\tau(\eta - x)$ функциясының қасиетін пайдаланып, келесі бағалауды аламыз

$$\|M_2(\lambda)\|_p \leq \frac{C}{\lambda^\varepsilon}, \varepsilon > 0.$$

Мына теңсіздікті ескерсек

$$M_3(x, \eta, \lambda) \leq C (q(x) + \lambda)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-(\eta-x)\sqrt{q(x)+\lambda}}{\sqrt{\rho(x)}}\right),$$

(1.2) шартынан 1.2 лемманы пайдаланып, $\|M_3(\lambda)\|_p \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}$ бағалауын аламыз.

$M_4(\lambda)$ операторы келесі үш оператордың қосындысы түрінде өрнектеледі

$$K_1 f = \int_{-\infty}^{\infty} \rho'(\eta)\tau'(\eta - x)M_o(x, \eta, \lambda)f(x)dx,$$

$$K_2 f = \int_{-\infty}^{\eta} \rho'(\eta)\tau(\eta - x)(\rho(x))^{-1} \exp\left(\frac{-(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right) f(x)dx,$$

$$K_3 f = \int_{\eta}^{\infty} \rho'(\eta)\tau(\eta - x)(\rho(x))^{-1} \exp\left(\frac{-(\eta-x)}{\sqrt{\rho(x)}} \sqrt{q(x) + \lambda}\right) f(x)dx.$$

$\rho^+ = \sup_{|x-\eta| \leq 2} \rho'(\eta)$ деп белгілейік. Лемма 1.1 бойынша

$$\|K_1\|_p \leq C\rho + \sup_{t \in R} \int_{|\eta-x| \leq 2} (|M_o(x, \eta, \lambda)| + |M_o(\eta, x, \lambda)|) dx.$$

(1.2), (1.4) ескере отырып (1.8) теңсіздігінен

$$\|K_1\|_p \leq \frac{C}{\lambda^\varepsilon}, \varepsilon > 0 \text{ болады.}$$

Осындай жолменен $\|K_2\|_p$ және $\|K_3\|_p$ бағаланады.

Сонымен (1.2)-(1.5) шарттары орындалған жағдайда мына бағалаулар орынды болады

$$\|M_1(\lambda)\|_p \leq C\lambda^{-\gamma}, \gamma = \frac{\alpha}{2} - a > 0 \quad (1.11)$$

$$\|M_2(\lambda)\|_p \leq C\lambda^{-\varepsilon}, \varepsilon > 0 \quad (1.12)$$

$$\|M_3(\lambda)\|_p \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \quad (1.13)$$

$$\|M_4(\lambda)\|_p \leq \frac{C}{\lambda^\varepsilon}, \varepsilon > 0 \quad (1.14)$$

Бұл жерде $\lambda \geq \lambda_0$ болғанда $M_j(\lambda)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) операторларының қосындысы бірден кіші болатынын атап өту керек.

Теореманы дәлелдеу үшін келесі теңдіктің орынды болатынын көрсетейік:

$$(L + \lambda E)^{-1} = M_3(\lambda)[E + B(\lambda)],$$

$$\text{мұндағы } B(\lambda) = M_1(\lambda) + M_2(\lambda) + M_4(\lambda) \quad (1.15)$$

Лемма 1.2 нәтижесінен көретініміздей λ оң және жеткілікті үлкен болғанда $C_0^\infty(R)$ кеңістігінде анықталған және шенелген $(L + \lambda E)^{-1}$ операторы бар болады. (5.11)- (5.14) ден $\lambda \geq \lambda_0$ болғанда $S(\lambda) = E + B(\lambda)$ операторы кері операторымен бірге шенелген болады, демек $N = \{g, g = S(\lambda)f, f \in C_0^\infty(R)\}$ жиыны $L_p(R)$ кеңістігінде тығыз.

Леммы 1.2 бойынша $q = S(\lambda)f$ тең болғанда, $f \in C_0^\infty(R)$

$$M_3(\lambda)g = M_3(\lambda)S^{-1}(\lambda)g \in D(L),$$

$$(L + \lambda E)M_3(\lambda)B^{-1}(\lambda)g = (L + \lambda E)M_3(\lambda)f = S(\lambda)f = g,$$

$$(L + \lambda E)M_3(\lambda)S^{-1}(\lambda) = E \text{ теңдіктерін аламыз.}$$

N жиыны $L_p(R)$ кеңістігінде тығыз болғандықтан, $(L + \lambda E)^{-1} = M_3(\lambda)S^{-1}(\lambda)$ орынды.

Теореманың бірінші бөлігі дәлелденді. Енді теореманың екінші бөлігін дәлелдеу үшін $q(x)(L + \lambda E)^{-1}$ операторының $L_p(R)$ кеңістігінде шенелген екенін көрсету жеткілікті.

(1.15) теңдігін ескере отырып Леммы 1.1 пайдаланып

$$\|q(x)(L + \lambda E)^{-1}\|_p = \|q(x)M_3(\lambda)\|_p \leq \sup_{\eta \in R} \int_{-\infty}^{\infty} (|q(x)M_3(x, \eta, \lambda)| + |q(\eta)M_3(\eta, x, \lambda)|) dx \leq$$

$$C_1 \sup_{\eta \in R} q(\eta + \lambda)^{\alpha/2} \rho(\eta)^{-\alpha/2} \int_{|x-\eta| \leq 2} \exp \left[\frac{-(x-\eta)\sqrt{q(\eta)+\lambda}}{\sqrt{\rho(\eta)}} \right] dx \leq C_2 \text{ болатынын аламыз.}$$

Теорема толық дәлелденді.

Талқылау және қорытынды

Сонымен қарастырылып отырған оператор үшін Теорема 1.1. тілінде (1.1) операторының кері операторының бар болуы яғни сәйкес дифференциалдық теңдеудің шешімі бар болатындығының, бөліктенуі яғни сәйкес дифференциалдық теңдеудің шешімі тегіс болатынының жеткілікті шарттары алынған. Осы жұмыстың нәтижелері сызықтық емес

$$Ly = -(\rho y')' + q(x, y)y$$

операторы үшін де орынды. Бұл жағдайда коэффициенттерге қойылатын шарттар басқаша түрде анықталады.

Мысалдар. Мысал 1.

$Ly = -(\rho y')' + e^{\beta(x)}y \in L_p(R)$, $1 \leq \rho < \infty$ операторын қарастырайық, мұндағы $\rho(x)$ – тегіс, $e^{|\cdot|}$ – қа тең болатын функция, $|x| \geq 1$ болсын.

$\rho(x) = e^{|\cdot|} > 0$, $q(x) = e^{\beta|\cdot|} \geq 1$ тегіс әрі (1.2)-(1.5) шарттарды қанағаттандыратындықтан 1.1 теоремасы бойынша $(L + \lambda E)$ операторының керісі бар және $e^{\beta|\cdot|}y \in L_p(R)$.

Мысал 2.

$Ly = -(\rho y')' + (|x| + 1)^2 y \in L_p(R)$, мұндағы $|x| \geq 1$ болғанда $\rho(x) = |x| + 1$ бұл оператордың бөліктенуі алдыңғы мысалдағыдай көрсетіледі.

АЛҒЫС

Мақала 03.04.2025 жылғы Ректор грантының қаржыландыру негізінде жазылды.

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

[1] W. N. Everitt and M. Giertz, "Some properties of the domains of certain differential operators," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 23, no. 3, pp. 301–304, 1971. doi: [10.1112/plms/s3-23.2.301](https://doi.org/10.1112/plms/s3-23.2.301).

[2] W. N. Everitt and M. Giertz, "Some inequalities associated with certain ordinary differential operators," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 126, pp. 308–326, 1972. doi: [10.1007/BF01110336](https://doi.org/10.1007/BF01110336).

[3] М. Б. Муратбеков, Теоремы разделимости и спектральные свойства одного класса дифференциальных операторов с нерегулярными коэффициентами: автореферат диссертации доктора физико-математических наук: 01.01.02, Алматы, 1994, 30 с. [Онлайн]. Доступно: <https://search.rsl.ru/ru/record/01000325573>.

[4] М. Б. Муратбеков и Н. Отелбаев, "Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера," *Известия вузов. Серия Математика*, no. 3, pp. 44–47, 1999. [Онлайн]. Доступно: <https://www.mathnet.ru/rus/fpm976>.

[5] М. Отелбаев, "Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^m ," Труды МИАН, 1983. [Онлайн]. Доступно: <https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?paperid=>.

[6] А. Биргебаев, Гладкость решений нелинейных дифференциальных уравнений и теоремы разделимости: диссертация кандидата физико-математических наук: 01.01.02, Алма-Ата, 1984, 100 с. [Онлайн]. Доступно: <https://cyberleninka.ru/>.

[7] E. M. E. Zayed and S. A. Omran, "Separation of the Tricomi Differential Operator in Hilbert Space with Application to the Existence and Uniqueness Theorem," *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 6, no. 8, pp. 353–364, 2019.

[8] A. S. Berdyshev, A. B. Birgebaev, and A. Cabada, "On the smoothness of solutions of the third order nonlinear differential equation," *Boundary Value Problems*, May 2019, pp. 1–11. doi: [10.1186/s13661-017-0799-4](https://doi.org/10.1186/s13661-017-0799-4).

[9] A. Birgebayev and M. Muratbekov, "Smoothness of solutions (separability) of the nonlinear stationary Schrödinger equation," *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, vol. 115, no. 3, pp. 25–35, Sep. 2022. doi: [10.26577/JMMCS.2022.v115.i3.03](https://doi.org/10.26577/JMMCS.2022.v115.i3.03).

[10] А. Биргебаев и А. М. Сахабаева, "Дифференциалдық операторлардың бөліктенуі мәселелерін оқытудың пән аралық байланысы мен бағыттары," *Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «Физико-математические науки»*, № 4 (80), с. 89–96, 2022. doi: [10.51889/2005.2022.64.37.010](https://doi.org/10.51889/2005.2022.64.37.010).

[11] А. Биргебаев и Ж. Д. Байшемиров, "Дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің тегістігін дәлелдеудің физикалық үдерістердегі сипаты," *Материалы 1–2 Халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы ММИТОН, октябрь 2021.* [Онлайн]. Доступно: <https://bulletin-phmath.kaznpu.kz/index.php/ped/article/download/930/732/7063>.

References

- [1] Everitt W. N., Giertz M. Some properties of the domains of certain differential operators. *Proc. London Math. Soc.*, 23(3), 1971, 301–304. <https://doi.org/10.1112/plms/s3-23.2.301>
- [2] Everitt W. N., Giertz M. Some inequalities associated with certain ordinary differential operators. *Math. Z.*, 126, 1972, 308–326. <https://doi.org/10.1007/BF01110336>
- [3] Muratbekov M.B. (1994) *Teoremy razdelimosti i spektral'nye svoystva odnogo klassa differentsial'nykh operatorov s nereguljarnymi koeffitsientami: avtoreferat dissertacii doktora fiziko-matematicheskikh nauk: 01.01.02 [Theorems of separability and spectral properties of a class of differential operators with irregular coefficients].* Almaty, 30 p. (In Russian) <https://search.rsl.ru/ru/record/01000325573>
- [4] Muratbekov M.B., Otelbaev N. (1999) *Gladkost' i approksimativnye svoystva reshenij odnogo klassa nelinejnykh uravnenij tipa Shredingera [Smoothness and approximation properties of solutions of one class of nonlinear Schrödinger-type equations].* *Izvestiya vuzov. Seriya Matematika*, no. 3, pp. 44–47. (In Russian) <https://www.mathnet.ru/rus/fpm976>
- [5] Otelbaev M. (1983) *Koercitivnye ocenki i teoremy razdelimosti dlja ellipticheskikh uravnenij v R_m [Coercive estimates and theorems of separability for elliptic equations in R_m].* *Trudy MIAN*, 1983. (In Russian) <https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?paperid=>
- [6] Birgebaev A. (1984) *Gladkost' reshenij nelinejnykh differentsial'nykh uravnenij i teoremy razdelimosti: dissertaciya kandidata fiziko-matematicheskikh nauk: 01.01.02 [Smoothness of solutions of nonlinear differential equations and separability theorems: Candidate of Physical and Mathematical Sciences dissertation].* Alma-Ata, 100 p. (In Russian) <https://cyberleninka.ru/>
- [7] Zayed E.M.E., Omran S.A. Separation of the Tricomi Differential Operator in Hilbert Space with Application to the Existence and Uniqueness Theorem. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, Vol. 6, No. 8, pp. 353–364, 2019.
- [8] Berdyshev A.S., Birgebaev A.B., Cabada A. On the smoothness of solutions of the third order nonlinear differential equation. *Boundary Value Problems*, May 2019, pp. 1–11. <https://doi.org/10.1186/s13661-017-0799-4>
- [9] Birgebayev A., Muratbekov M. Smoothness of solutions (separability) of the nonlinear stationary Schrödinger equation. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science*, vol. 115, no. 3, pp. 25–35, Sep. 2022. <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2022.v115.i3.03>
- [10] Birgebaev A., Sakhabaeva A.M. (2022) *Differentsialdyk operatorlardyn boliktenui maselelerin okytudyn pan aralyk bajlanysy men bagyttary [Interdisciplinary connections and directions in teaching the problem of separability of differential operators].* *Vestnik KazNPU im. Abaya, seriya «Fiziko-matematicheskije nauki»*, №4(80), pp. 89–96. (In Kazakh) <https://doi.org/10.51889/2005.2022.64.37.010>
- [11] Birgebaev A., Bajshemirov Zh.D. (2021) *Differentsialdyk tendeulerdiñ sheshimderiniñ tegistigin däldeudiñ fizikalik yderisterdegi sipaty [The nature of proving the smoothness of solutions of differential equations in physical processes].* *MMITON, Materialy 1–2 Khalyqaralyk gylimi-praktikalyk konferencijasy*, October 2021. (In Kazakh) <https://bulletin-phmath.kaznpu.kz/index.php/ped/article/download/930/732/7063>