МРНТИ 27.29.19, 27.31.21
УДК 517.9

https://doi.org/10.51889/2020-3.1728-7901.08

Ж. Қайырбек[1], Г. Аузерхан[1], Л.Қ. Жапсарбаева[1]

[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ, Қазақстан

ТОПЫРАҚТЫҢ ІСІНУІНІҢ МОДЕЛІНДЕ ПАЙДА БОЛАТЫН ОПЕРАТОРДЫҢ МЕНШІКТІ ФУНКЦИЯСЫ МЕН МЕНШІКТІ САНЫНЫҢ БАҒАЛАУЫ

Аңдатпа

Құрылымдарда қолданылатын материалдардың ісінуінен пайда болатын күш құрылымдық деформациялар мен тұрақсыздықты тудыруы мүмкін. Ісінуден қорғайтын күштер кеңейіп келе жатқан қатты зат пен қатты-сұйық заттың тепе-теңдігінің арасындағы өзара әсерінің қиындығына байланысты жоғары ретті сызықты емес болып табылады. Бұл жұмыс – Эйлердің серпімді теориясы мен ісіну күшінің кейбір моделіне негізделген жеңілдетілген бастапқы-шекаралық есептерді зерттеуге арналған алғашқы әрекетіміз болып табылады. Бұл жұмыста білікшенің теңдеуі үшін сызықтық емес есепті зерттейміз. Эйлер теңдеулері үшін сызықтық емес есептерге сәйкес келетін оператордың өзіне өзі түйіндес оператор екендігі дәлелденді. Қарастырылып отырған оператордың меншікті мәндерінің екі жақты бағаулары орнатылды. Білікшенің теңдеуі үшін бастапқы-шекаралық есепке сәйкес келетін оператордың меншікті функцияларының екі жақты бағалаулары алынды.

Түйін сөздер: Эйлер консольді білікшесі; ісіну қысымы; білікше теңдеуі; өзіне өзі түйіндес оператор; меншікті мәндер; меншікті функциялар; екіжақты бағалаулар.

Abstract

ESTIMATES OF THE EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS OF OPERATOR ARISING IN SWELLING PRESSURE MODEL

Kaiyrbek Zh.[1], Auzerkhan G.[1], Zhapsarbaeva L.K.[1]
[1]Al Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

Swelling forces from materials confined by structures can cause structural deformations and instability. Due to the complexity of interactions between expansive solid and solid-liquid equilibrium, the forces exerting on retaining structures from swelling are highly nonlinear. This work is our initial attempt to study a simplistic initial/boundary value problem based on the Euler-elastic beam theory and some swelling force model. In this paper, we study a nonlinear problem for the equation of a beam. The self-adjointness of the operator corresponding to the nonlinear problem for the Euler equations is proved. Two-sided estimates of the eigenvalues of the operator in question are established. Two-sided estimates of the eigenfunctions of the operator of the initial-boundary value problem for the beam equation are also obtained.

Keywords: Cantilever Euler beam; swelling pressure; beam equation; self-adjoint operator; eigenvalues; eigenfunctions; two-sided estimates.

Аннотация

Ж. Кайырбек[1], Г. Аузерхан[1], Л.К. Жапсарбаева[1]
[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА, ВОЗНИКАЮЩЕГО В МОДЕЛИ НАБУХАНИЯ ГРУНТА

Усилие набухания от материалов, образованных конструкциями, может вызвать структурные деформации и нестабильность. Игнорирование любой такой нагрузки в конструкции может привести к неадекватной конструкции и возможного выхода из строя системы. Из-за сложности взаимодействий между расширяющимся твердым телом и равновесием твердое тело-жидкость силы, действующие на удерживающие структуры от набухания, являются в высшей степени нелинейными. Эта работа является нашей первоначальной попыткой изучить упрощенную начально-краевую задачу, основанную на теории упругой балки Эйлера и некоторой модели силы набухания. В данной работе изучена нелинейная задача для уравнения балки. Доказана самосопряженность оператора, соответствующий нелинейной задаче для уравнений Эйлера. Установлены двусторонние оценки собственных значений рассматриваемого оператора. А также получены двусторонние оценки собственных функций оператора начально-краевой задачи для уравнения балки.

Ключевые слова: Консольная балка Эйлера; давление набухания; уравнение балки; самосопряженный оператор; собственные значения; собственные функций; двусторонние оценки.

1. Кіріспе

Эластомер, гидрогель және ісінетін балшық сияқты ісіну ерітінділері ісінуге байланысты тірек қабырғаларында қысым пайда болған кезде айтарлықтай проблемалар туғызады. Мысал ретінде [1] және [2] нақты қарауға болады. Ісіну қысымы әсер ететін қабырға [3] мен құбырлардың [4] деформация мен иілулерін анықтау осындай құбырлар мен қабырғаларды жобалау үшін маңызды.

1994 жылы Месри және басқалар [5], [6], [7] мен [8] жұмыстарында берілген формула бойынша жұмылдырылған көлемнің деформациясы функциясы ретінде ісіну қысымының жеңілдетілген теңдеуін жасады

$$p(x) = p_{sl} e^{-\alpha \vartheta(x)},$$

мұндағы p_{sl} - өткізбейтін қабырғаның ісіну қысымы, α -қатты зат пен сұйықтың тепе-теңдігіне тәуелді тұрақты шама, ал $\vartheta(x)$ - соңы бекітілген білікше бойынан x нүктесінде бекітілген консольді білікше ретінде модельденген қабырғаның ауытқуы. Серпімді Эйлер-Бернулли білікшенің бір ұшы бекітілген, екінші ұшы бос кездегі ісіну қысымын ескеріп, бастапқы-шекаралық есепті қарастырамыз.

Құрылымдарда қолданылатын материалдардың ісінуінен пайда болатын күш құрылымдық деформациялар мен тұрақсыздықты тудыруы мүмкін. Ісінуден қорғайтын күштер кеңейіп келе жатқан қатты зат пен қатты-сұйық заттың тепе-теңдігінің арасындағы өзара әсерінің қиындығына байланысты жоғары ретті сызықты емес болып табылады. Бұл жұмыс – Эйлердің серпімді теориясы мен ісіну күшінің кейбір моделіне негізделген жеңілдетілген бастапқы-шекаралық есептерді зерттеуге арналған алғашқы әрекетіміз болып табылады. Бұл жұмыста біліктің теңдеуі үшін сызықтық емес есепті зерттейміз. Эйлер теңдеулері үшін сызықтық емес есептерге сәйкес келетін оператордың өзіне өзі түйіндес оператор екендігі дәлелденді. Қарастырылып отырған оператордың меншікті мәндерінің екі жақты бағаулары орнатылды. Біліктің теңдеуі үшін бастапқы-шекаралық есепке сәйкес келетін оператордың меншікті функцияларының екі жақты бағалаулары алынды.

2. Білікшенің теңдеуі үшін сызықтық емес есепке сәйкес келетін оператордың меншікті функцияларының екі жақты бағалаулары

$G = \{(x,t): 0 < x < L, 0 < t < T\}$ (мұндағы T –қандайда бір оң сан) облысында сызықтық емес

$$\rho A \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^4} = F(\vartheta, t) \tag{1}$$

есебін қарастырайық. Мұндағы $F(\vartheta, t) = p_{sl} e^{-\alpha\vartheta} + g(t)$.

Келесі бастапқы шарттарымен

$$\begin{cases} \vartheta(x,0) = \vartheta_0(x) \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t}(x,0) = \vartheta_1(x), 0 < x < L \end{cases} \tag{2}$$

және шекаралық шарттарымен

$$\begin{cases} \vartheta(0,t) = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x}(0,t) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}(L,t) = \dfrac{\partial^3 \vartheta}{\partial x^3}(L,t) = 0,\ 0 < t < T. \end{cases} \tag{3}$$

берілген (1) теңдеуді

$$B\vartheta \equiv \rho A \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^4} = F(\vartheta, t) \tag{4}$$

түрінде жазайық. Жоғары ретті дифференциалдық теңдеулер үшін спектральды есептерге [9], [10], [11], [12] жұмыстарға сілтеме жасаймыз. Бұл жұмыс Эйлер балкасы мен ісіну қысымының моделінің қысқартылған негізіне арналған біздің алғашқы спектральды есебіміз. Осы оператордың меншікті мәніне арналған көптеген талдаулар [13] көрсетілген. Осы мақалада (1) сызықсыз теңдеуге сәйкес келетін [13] жұмыстың нәтижесі оператордың меншікті мәні ретінде қолданылды. $\tilde{B}$ арқылы

$$\varphi''''(x) = f(x), 0 < x < L,$$

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0, \varphi''(L) = 0, \varphi'''(L) = 0$$

шекаралық шарттарына сәйкес келетін тұйық операторды белгілейміз. $\tilde{B}$ операторының анықталу облысы $D(\tilde{B})$ ол $L_2(0,L)$ сызықты кеңістікте тығыз болады [14].

Лемма 1. $\tilde{B}$ *операторы* $L_2(0,L)$ *кеңістігінде өзіне-өзі түйіндес.*

Дәлелдеуі. $D(\tilde{B})$-ның кез-келген екі $\varphi(x), \psi(x)$ элементтері үшін

$$\left(\tilde{B}\varphi, \psi\right) = \int_0^L \varphi^{IV}(x)\psi(x)dx =$$

$$\varphi'''(x)\psi(x)\Big|_0^L - \varphi''(x)\psi'(x)\Big|_0^L + \varphi'(x)\psi''(x)\Big|_0^L - \varphi(x)\psi'''(x)\Big|_0^L +$$

$$\int_0^L \varphi(x)\psi^{IV}(x)dx = \int_0^L \varphi(x)\psi^{IV}(x)dx = \left(\varphi, \tilde{B}\psi\right).$$

Симметриялы $\tilde{B}$ операторының мәндер облысы $L_2(0,L)$-мен сәйкес келгендіктен, $\tilde{B}$ операторы өзіне-өзі түйіндес болады. Лемма дәлелденді.

$\tilde{B}$ операторында дискретті спектр бар екені айқын. $\tilde{B}$ операторының меншікті мәндерін $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k \le$ кему ретімен нөмерлейік.

Келесі леммада меншікті мәндерінің бірнеше қасиеті келтірілген.

Лемма 2. $\tilde{B}$ *операторының меншікті мәндерінің бәрі оң және сонымен қатар*

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < \sqrt{\lambda_1} < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < \sqrt{\lambda_2} < \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{(4k+1)^2}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < \sqrt{\lambda_{2k+1}} < (2k+1)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2,$$

$$(2k+1)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < \sqrt{\lambda_{2k+2}} < \frac{(4k+3)^2}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2,\ k = 1,2,..$$

теңсіздігі орынды.

Дәлелдеуі. $\tilde{B}$ операторының спектры

$$\Delta(\lambda) := \cos rL \cosh rL + 1 \tag{5}$$

бүтін функцияның нөлдерімен бірмәнді анықталатыны белгілі [13]. Мұндағы $r^4=\lambda$. $\tilde{B}$ операторы өзіне-өзі түйіндес болғандықтан, бүтін $\Delta(\lambda)$ функцияның нөлдері нақты болады. Енді $t=r^2L^2$ деп белгілеу енгізелік. Олай болса $\Delta(\lambda)$ функциясының нөлдерін

$$\cosh\sqrt{t}=-\frac{1}{\cos\sqrt{t}} \tag{6}$$

теңдеуінен таба аламыз.

Миттаг-Леффлер теоремасы [14] бойынша мераморфты $f(t)=-\dfrac{1}{\cos\sqrt{t}}$ функциясы полюсте

$$-\frac{1}{\cos\sqrt{t}}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)}(2n-1)}{t-\dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4}}$$

Лоран қатарына басты бөлікпен [14] жіктеле алады. Сондықтан (6) теңдеу

$$\cosh\sqrt{t}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)}(2n-1)}{t-\dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4}} \tag{7}$$

түрде жазылады. (7) теңдеуді графиктік тәсілмен шешейік.

Ол үшін

$$y_1=\cosh\sqrt{t},$$

$$y_2=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)}(2n-1)}{t-\dfrac{(2n-1)^2\pi^2}{4}}$$

екі графиктің қиылысуын табамыз. Олар үшін

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2<t_1<(\pi)^2,$$

$$(\pi)^2<t_2<\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2<t_3<(3\pi)^2,$$

$$(3\pi)^2<t_4<\left(\frac{7\pi}{2}\right)^2$$

теңсіздіктері орындалады.

$\sqrt{\lambda_k}=r_k^2=\dfrac{t_k}{L^2}$ болғандықтан, лемма 2 орындалатындығы шығады. Лемма дәлелденді.

Лемма 2-ден

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_{2k+1}}{(4k+1)^4}=\frac{\pi^4}{16L^4},$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_{2k}}{(4k+3)^4}=\frac{\pi^4}{16L^4}$$

теңдіктері шығады.

Ескерту. Барлық $k \geq 1$ үшін $\cosh\sqrt{t_k} > 1$ болатынын айта кетейік. Сондықтан барлық $k \geq 1$ үшін $\cos\sqrt{t_k} < 0$ болады , сонымен қатар $\cosh\sqrt{t_k} = -\dfrac{1}{\cos\sqrt{t_k}}$.

Олай болса

$$(4k+1)\frac{\pi}{2} < \sqrt{t_{2k+1}} < (2k+1)\pi,$$

$$(2k+1)\pi < \sqrt{t_{2k}} < (4k+3)\frac{\pi}{2}$$

теңсіздіктері де ақиқат болады. Сондықтан $\sin\sqrt{t_{2k+1}} > 0, \sin\sqrt{t_{2k}} < 0$ теңсіздіктері орындалады.

Олай болса

$$\sin\sqrt{t_{2k+1}} = \sqrt{1-\cos^2\sqrt{t_{2k+1}}},$$

$$\sin\sqrt{t_{2k}} = -\sqrt{1-\cos^2\sqrt{t_{2k}}}$$

теңсіздіктері де ақиқат болады.

Бұл жұмыста спектр табиғаты, $\tilde{B}$ операторының меншікті мәндерінің үлестірімі мен меншікті функцияның бағасы зерттеледі. Кейбір меншікті функцияларды жинақталу мен қосындылау бойынша жіктеу теоремаларын дәлелдеу кезінде меншікті меншікті функция үшін бағалау керек. Соған байланысты $\tilde{B}$ операторының меншікті функциясы үшін екіжақты бағалау алумен тоқталамыз.

Әрі қарай $\tilde{B}$ операторының $\{\tilde{y}_k(x)\}$ меншікті функцияларының жүйесін $k \geq 1$ болғанда

$$\tilde{y}_k(x) =$$

$$\frac{\left(\cos\sqrt{t_k} + \cosh\sqrt{t_k}\right)\left(\cos\sqrt{t_k}\frac{x}{L} + \cosh\sqrt{t_k}\frac{x}{L}\right) - \left(\sin\sqrt{t_k} - \sinh\sqrt{t_k}\right)\left(\sin\sqrt{t_k}\frac{x}{L} + \sinh\sqrt{t_k}\frac{x}{L}\right)}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^2}$$

түрінде аламыз. $\tilde{y}_k(x)$-ті осылай таңдауымыз, $\forall x \in [0, L], \forall k \geq 1$ болғанда

$$|\tilde{y}_k(x)| \leq 2$$

теңіздігінің орындалуын қамтамасыз етеді. Шыныменде, кез-келген $x \in [0, L]$ және $k \geq 1$ үшін

$$|\tilde{y}_k(x)| \leq$$

$$\frac{\left(\left|\cos\sqrt{t_k}\right| + \cosh\sqrt{t_k}\right)\left(\left|\cos\sqrt{t_k}\frac{x}{L}\right| + \cosh\sqrt{t_k}\frac{x}{L}\right) - \left(\left|\sin\sqrt{t_k}\right| - \sinh\sqrt{t_k}\right)\left(\left|\sin\sqrt{t_k}\frac{x}{L}\right| + \sinh\sqrt{t_k}\frac{x}{L}\right)}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^2} \leq$$

$$\frac{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right) + \left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^2} = 2$$

теңсіздіктер тізбегін қарастырайық.

Лемма 2 сәйкес, $\widetilde{B}$ операторының $\{\widetilde{y}_k(x)\}$ меншікті функцияларының жүйесі $L_2(0,L)$-де жүйе функциясына ортогональ болады, яғни $\widetilde{B}=\widetilde{B}^*$ болатынын еске салайық.

Теорема. $\widetilde{B}$ *операторының меншікті функциялары*

$$\frac{1}{1+\cosh\sqrt{t_k}} \le \left\|\widetilde{y}_k\right\|_{L_2(0,L)} \le 2\sqrt{L} \tag{8}$$

теңсіздіктерді қанағаттандырады.

Дәлелдеуі. Норманың квадратын жоғарыдан бағалаймыз.

$$\left\|\widetilde{y}_k\right\|^2_{L_2(0,L)} = \int_0^L \left|\widetilde{y}_k(x)\right|^2 dx \le 4L.$$

Енді норманың квадратын төменнен бағаласақ

$$\left\|\widetilde{y}_k\right\|^2_{L_2(0,L)} = \int_0^L \left|\widetilde{y}_k(x)\right|^2 dx \ge \int_0^\delta \left|\widetilde{y}_k(x)\right|^2 dx \ge \tag{9}$$

$$\int_0^\delta \left|\left(\cosh\sqrt{t_k}+\cos\sqrt{t_k}\right)\frac{\cosh\sqrt{t_k}\,\frac{x}{L}+\cos\sqrt{t_k}\,\frac{x}{L}}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^2} - \frac{\sin\sqrt{t_k}+\sinh\sqrt{t_k}}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^2}\left(\sin\sqrt{t_k}\,\frac{x}{L}+\sinh\sqrt{t_k}\,\frac{x}{L}\right)\right|^2 dx \ge$$

$$\int_0^\delta \left(\cosh\sqrt{t_k}+\cos\sqrt{t_k}\right)^2 \frac{\left(\cosh\sqrt{t_k}\,\frac{x}{L}+\cos\sqrt{t_k}\,\frac{x}{L}\right)^2}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^4}dx$$

$$-2\int_0^\delta \left|\left(\cosh\sqrt{t_k}+\cos\sqrt{t_k}\right)\frac{\cosh\sqrt{t_k}\,\frac{x}{L}-\cos\sqrt{t_k}\,\frac{x}{L}}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^2}\right| \times$$

$$\left|\frac{\sin\sqrt{t_k}+\sinh\sqrt{t_k}}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^2}\left(\sin\sqrt{t_k}\,\frac{x}{L}+\sinh\sqrt{t_k}\,\frac{x}{L}\right)\right|dx$$

$$-\int_0^\delta \left|\frac{\sin\sqrt{t_k}+\sinh\sqrt{t_k}}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^2}\right|^2 \left|\sin\sqrt{t_k}\,\frac{x}{L}+\sinh\sqrt{t_k}\,\frac{x}{L}\right|^2 dx \ge$$

$$\frac{4\left(\cosh\sqrt{t_k}+\cos\sqrt{t_k}\right)^2}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^4} -$$

$$-2\int_0^{\delta}\left(\left|\sin\sqrt{t_k}\right|+\left|\sinh\sqrt{t_k}\right|\right)dx-2\int_0^{\delta}\left(\left|\sin\sqrt{t_k}\right|^2+\left|\sinh\sqrt{t_k}\right|^2\right)dx$$

болады, себебі

$$\cosh\sqrt{t_k}\frac{x}{L}-\cos\sqrt{t_k}\frac{x}{L}=\cosh\sqrt{t_k}\frac{x}{L}+\frac{1}{\cosh\sqrt{t_k}\frac{x}{L}}\geq 2,$$

$$\left(\cosh\sqrt{t_k}+\cos\sqrt{t_k}\right)\frac{\cosh\sqrt{t_k}\frac{x}{L}-\cos\sqrt{t_k}\frac{x}{L}}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^2}\leq 1,$$

$$\frac{\left|\sin\sqrt{t_k}\right|+\sinh\sqrt{t_k}}{1+\cosh\sqrt{t_k}}\leq 1.$$

Енді (9) теңсіздіктен ізделінді норманың квадратының төменнен бағалауын

$$\left\|\tilde{y}_k\right\|^2_{L_2(0,L)}\geq\frac{4\left(\cosh\sqrt{t_k}+\cos\sqrt{t_k}\right)^2}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^2}-2\alpha(\delta)$$

аламыз, мұндағы

$$\alpha(\delta)=\int_0^{\delta}\left(\left|\sin\sqrt{t_k}\frac{x}{L}\right|+\sinh\sqrt{t_k}\frac{x}{L}\right)dx+\int_0^{\delta}\left(\left|\sin\sqrt{t_k}\frac{x}{L}\right|^2+\left(\sinh\sqrt{t_k}\frac{x}{L}\right)^2\right)dx.$$

$\lim\limits_{\delta\to+0}\alpha(\delta)=0$ болатыны түсінікті. Сондықтан $\delta>0$ деп аламыз, сонда

$$\left|\alpha(\delta)\right|<\frac{\left(\cosh\sqrt{t_k}+\cos\sqrt{t_k}\right)^2}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^4}$$

орындалады. Нәтижесінде

$$\left\|\tilde{y}_k\right\|_{L_2(0,L)}\geq\frac{\cosh\sqrt{t_k}+\cos\sqrt{t_k}}{\left(1+\cosh\sqrt{t_k}\right)^2}$$

немесе

$$\frac{1}{\left\|\tilde{y}_k\right\|_{L_2(0,L)}}\leq 1+\cosh\sqrt{t_k}$$

бағалауларын аламыз. Теореманың дәлелденуі осымен аяқталды.

Алғыс

Бұл жұмыс ҚР БҒМ ҒК ғылыми-техникалық бағдарламалар мен жобаларды гранттық қаржыландыруының қолдауымен жүзеге асырылды (Жобалар № AP05131292, № AP05131845).

Пайдаланған әдебиеттер тізімі:

1 Lou Y., A. Robisson A., Cai S., Suo Z. Journal of applied physics. -2012. -URL http://dx.doi.org/ 10.1063/1.4745878.

2 Mansour E. Swell pressures and retaining wall design in expansive soils. 2011.

3 Illeperuma W. R. K.,Sun J.-Y., Suo Z.,J. Vlassak. The Royal Society of Chemistry-Soft -0Matter.-2013.-URL http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:14023007.

4 Rjeily Y. E. A., Khouri M. F. International Journal of Science and Research. 2014.-P.2592–2599.

5 Mesri G., Pakbaz M., Cepeda-Diaz A. F. Géotechnique. 1994. -V.44. -P. 129-145.

6 Editor G. H, Schwelldrucim Belchentunnel, Lucerne. -1972.

7 Gysel M. Rock Mechanics. -1977.-V.10.-P.55–71.

8 Gysel M. Rock Mechanics and Rock Engineering. 1987.-V.20.-P. 219-242.

9 Садовничий В.А., Кангужин Б.Е. О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями // Доклады Академии наук СССР. 1982. -Т.267. -С. 310-313.

10 Кангужин Б.Е., Токмаганбетов Н.Е. О формуле регуляризованного следа корректно возмущенного оператора m-Лапласа //Дифференциальные уравнения. 2015.-Т.51.-С.1583-1588.

11 Кангужин Б.Е., Анияров А.А. Корректные задачи для оператора Лапласа в проколотой области //Математические заметки. 2011.-Т.89.-С.856-867.

12 Collatz L. Eigenwertaufgaben mit technischen anwendungen. Leipzig: Geest and Portig K., 1963.

13 Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. -М: Наука, 1974. -808с.

14 Gamelin T. W. Complex Analysis. N.-Y.: Springer-Verlag, Inc., 2001. ISBN 0-387-95093-1.

References

1 Lou Y., A. Robisson A., Cai S., Suo Z. (2012) Journal of applied physics [Journal of applied physics]. URL http://dx.doi.org/ 10.1063/1.4745878. (In English)

2 Mansour E.(2011) Swell pressures and retaining wall design in expansive soils [Swell pressures and retaining wall design in expansive soils]. (In English)

3 Illeperuma W. R. K.,Sun J.Y., Suo Z.,J. Vlassak. (2013) The Royal Society of Chemistry [The Royal Society of Chemistry] Soft, 0Matter. URL http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:14023007. (In English)

4 Rjeily Y. E. A., Khouri M. F. (2014) International Journal of Science and Research [International Journal of Science and Research]. 2592–2599. (In English)

5 Mesri G., Pakbaz M., Cepeda-Diaz A. F. (1994) Géotechnique. V.44. 129-145. (In English)

6 Editor G. H, Schwelldrucim Belchentunnel, (1972) Lucerne. (In English)

7 Gysel M. Rock (1977) Mechanics. V.10. 55–71. (In English)

8 Gysel M. Rock (1987) Mechanics and Rock Engineering. V.20. 219-242. (In English)

9 Sadovnichij V.A., Kanguzhin B.E. (1982) O svjazi mezhdu spektrom differencial'nogo operatora s simmetricheskimi kojefficientami i kraevymi uslovijami [About the relationship between the spectrum of differential operator with symmetric coefficients and boundary conditions]. Doklady Akademii nauk SSSR. T.267. 310-313. (In Russian)

10 Kanguzhin B.E., Tokmaganbetov N.E. (2015) O formule reguljarizovannogo sleda korrektno vozmushhennogo operatora Laplasa [On the formula of the regularized trace of a correctly perturbed m-Laplace operator] //Differencial'nye uravnenija. T.51. 1583-1588. (In Russian)

11 Kanguzhin B.E., Anijarov A.A. (2011) Korrektnye zadachi dlja operatora Laplasa v prokolotoj oblasti [Correct problems for the Laplace operator in a punctured domain]. Matematicheskie zametki.T.89. 856-867. (In Russian)

12 Collatz L. (1963) Eigenwertaufgaben mit technischen anwendungen [Eigenwertaufgaben mit technischen anwendungen]. Leipzig: Geest and Portig K. (In German)

13 Sobolev S.L.(1974) Vvedenie v teoriju kubaturnyh formul [Introduction to the theory of cubature formulas]. Nauka. 808. (In Russian)

14 Gamelin T. W. (2001) Complex Analysis. N.Y.: Springer-Verlag, Inc. ISBN 0-387-95093-1. (In English)