МРНТИ 27.29.17; 27.29.25; 27.33.19
УДК 517.968.78; 519.622

https://doi.org/10.51889/2021-1.1728-7901.03

Н.Б. Искакова[1*], *Г.С. Алиханова*[1], *А.Қ. Дүйсен*[2]

[1]*Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан*
[2]*Аль-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Универсистеті, Алматы қ., Қазақстан*
∗e-mail: narkesh@mail.ru

ПАРАМЕТРІ БАР ИНТЕГРАЛ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН СЫЗЫҚТЫҚ ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ БІР ӘДІСІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Бұл жұмыста шектеулі кесіндіде параметрі бар интеграл-дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылады. Интегралдық мүшенің өзегі азынған деп саналады және берілген интеграл-дифференциалдық теңдеудің шешімін және параметрдің мәндерін табуға мүмкіндік беретін қосымша шарттар ретінде берілген кесіндінің алғашқы және соңғы нүктелеріндегі шешім мәндері беріледі. Қарастырылып отырған шеттік есеп Д.С. Джұмабаевтың параметрлеу әдісімен зерттеледі. Параметрлеу әдісіне сүйене отырып, қосымша параметрлер енгізіледі. Ізделінді параметрдің бекітілген мәні бойынша азынған өзегі бар интеграл-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши арнайы есебінің шешілімділігі тағайындалады. Интеграл-дифференциалдық теңдеудің дифференциалдық бөлігінің іргелі матрицасын қолдана отырып және Коши арнайы есебінің шешілімділігін ескере отырып, бастапқы шеттік есеп енгізілген қосымша параметрлерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесіне келтіріледі. Бұл жүйенің шешімінің болуы зерттелінді есептің шешілімділігін қамтамасыз етеді. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін құру және шешуге негізделген, бастапқы есептің шешімін табудың алгоритмі ұсынылған.

Түйін сөздер: шеттік есеп, интеграл-дифференциалдық теңдеу, параметр, параметрлеу әдісі, алгоритм.

Аннотация

Н.Б. Искакова[1], *Г.С. Алиханова*[1], *А.Қ. Дүйсен*[2]
[1]*Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан*
[2]*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан*

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПАРАМЕТР

В настоящей работе на ограниченном отрезке рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Ядро интегрального члена предполагается вырожденным и в качестве дополнительных условий, позволяющих найти значения параметра и решение заданного интегро-дифференцального уравнения даны значения решения в начальной и конечной точках заданного отрезка. Рассматриваемая краевая задача иследуется методом параметризации Д.С. Джумабаева. На основе метода параметризации вводятся дополнительные параметры. При фиксированном значении искомого параметра устанавливается разрешимость специальной задачи Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений с вырожденным ядром. Используя фундаментальную матрицу дифференциальной части интегро-дифференциального уравнения и предполагая разрешимость специальной задачи Коши, исходная краевая задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно введенных дополнительных параметров. Существование решения этой системы обеспечивает разрешимость исследуемой задачи. Предложен алгоритм нахождения решения исходной задачи, основанный на построении и решений системы линейных алгебраических уравнениий.

Ключевые слова: краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение, параметр, метод параметризации, алгоритм.

Abstract

ON A METHOD FOR SOLVING A LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS CONTAINING THE PARAMETER

Iskakova N.B. [1], *AlihanovaG.S.* [1], *Duisen A.K.* [2]
[1]*Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

In the present work for a limited period, we consider the system of integro-differential equations of containing the parameter. The kernel of the integral term is assumed to be degenerate, and as additional conditions for finding the values of the parameter and the solution of the given integro-differential equation, the values of the solution at the initial and final points of the given segment are given. The boundary value problem under consideration is investigated by D.S. Dzhumabaev's parametrization method. Based on the parameterization method, additional parameters are introduced. For a fixed value of the desired parameter, the solvability of the special Cauchy problem for a system of integro-differential equations with a degenerate kernel is established. Using the fundamental matrix of the differential part of the integro-differential equation and assuming the solvability of the special Cauchy problem, the original boundary value problem is reduced to a system of linear algebraic equations with respect to the introduced additional parameters. The existence of a solution to this system ensures the solvability of the problem under study. An algorithm for finding the solution of the initial problem based on the construction and solutions of a system of linear algebraic equations is proposed.

Keywords: boundary value problem, integro-differential equation, parameter, parameterization method, algorithm.

Кіріспе. Есептің қойылуы.

$[0,T)$ -да азынған өзегі бар интеграл-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)\mu+\varphi(t)\int_0^T\psi(s)x(s)ds+f(t),\ x\in R^2,\mu\in R^3, \tag{1}$$

параметрі бар, келесі шартты қанағаттандыратын

$$C_0\mu+C_1x(0)+C_2x(T)=d,\ d\in R^5, \tag{2}$$

екі нүктелі сызықтық шеттік есеп қарастырылады, мұнда $A(t),\varphi(t),\psi(t)$ матрицалары (2×2)өлшемді, $B(t)$матрицасы (2×3)өлшемді және $f(t)$ вектор-функциясы $[0,T]$-да үзіліссіз, C_1,C_2 – матрицалары (5×2)өлшемді, C_0 – матрицасы (5×3) өлшемді тұрақты матрицалар, d – тұрақты вектор,$\|x\|=\max\limits_i|x_i|$.

(1), (2) есебінің шешімі деп, ондағы $x^*(t)$ $[0,T]$-да үзіліссіз, $(0,T)$-да үзіліссіз дифференциалданатын функция болып табылатын, және $\mu=\mu^*$ болғанда (1) интеграл-дифференциалдық теңдеулер жүйесін, (2) шеттік шартты қанағаттандыратын $(x^*(t),\mu^*)$ жұбын айтамыз.

Параметрі бар интеграл-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер, механика, физика, химия, техника, биология, экономика және басқада түрлі үдерістердің математикалық моделі бола отырып, қолданбалы математиканың көптеген бөлімдерінде кездеседі. Интеграл-дифференциалдық теңдеулер үшін және параметрі бар интеграл-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердің шешілімділік, жәнеде олардың шешімін табу әдістерін құру мәселелері [1-10] жұмыстарда зерттелді.

Аталмыш мақала, іргелі матрицаны және Д.С. Джумабаевтың [11] параметрлеу әдісін қолдануға негізделген (1), (2) есебінің шешімін табу алгоритмін құруға арналған.

Зерттеу әдісі. $[0,T)$ аралығын келесі қадаммен $h>0:\ Nh=T\ \ (N\in\mathrm{N}):[0,\mathrm{T})=\bigcup\limits_{r=1}^{N}[(r-1)h,rh)$ бөліктерге бөлеміз.

(1), (2) есебі келесі эквивалентті көпнүктелік шеттік есепке келтіріледі

$$\frac{dx_r}{dt}=A(t)x_r+B(t)\mu+\varphi(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)h}^{jh}\psi(s)x_j(s)ds+f(t),\ t\in[(r-1)h,rh),\ r=1:N, \tag{3}$$

$$C_0\mu+C_1x_1(0)+C_2\lim_{t\to T-0}x_N(t)=d, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to ph-0}x_p(t)=x_{p+1}(ph),\ p=1:N-1, \tag{5}$$

мұнда $x(t)$ функциясының r - ші интервалға тарылуы $x_r(t)$, яғни $x(t)=x_r(t),\ r=1:N,$ (5) $-[0,T)$ бөліктеуінің ішкі нүктелеріндегі шешімді қабыстыру шарттары.

Қосымша параметрлер еңгіземіз $\lambda_0=\mu,\ \lambda_r=x_r((r-1)h),\ r=1:N,$ және әрбір $[(r-1)h,rh)$ интервалда $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$ функциясына алмастыру жасаймыз. Сонда (3)-(5) шеттік есебі параметрлі шеттік есепке келтіріледі

$$\frac{du_r}{dt}=A(t)(u_r+\lambda_r)+B(t)\lambda_0+\varphi(t)\sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)h}^{jh}\psi(s)(u_j(s)+\lambda_j)ds+f(t),\ t\in[(r-1)h,rh), \tag{6}$$

$$u_r((r-1)h)=0,\ r=1:N, \tag{7}$$

$$C_0\lambda_0+C_1\lambda_1+C_2\left(\lambda_N+\lim_{t\to T-0}u_N(t)\right)=d, \tag{8}$$

$$\lambda_p+\lim_{t\to ph-0}u_p(t)=\lambda_{p+1},\ p=1:N-1, \tag{9}$$

(6), (7) – параметрі бар интеграл-дифференциалдық теңдеу үшін арнайы Коши есебі.

(3)-(5) және (6)-(9) есептері эквивалентті.

Егер $(x^*[t],\mu^*)$, мұнда $x^*[t]=(x_1^*(t),x_2^*(t),\ldots,x_N^*(t))$,– (3)-(5) есебінің шешімі болса, онда $\lambda^*=(\lambda_0^*,\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_N^*)$, $\lambda_0^*=\mu^*$, $\lambda_r^*=x_r^*((r-1)h)$, $r=1:N$, $u^*[t]=(u_1^*(t),u_2^*(t),\ldots,u_N^*(t))$, $u_r^*(t)=x_r^*(t)-x_r^*((r-1)h)$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=1:N$, элементтерімен $(\lambda^*,u^*[t])$ (6)-(9) есебінің шешімі болады. Және, керісінше, егер $(\tilde{\lambda},\tilde{u}[t])$, мұнда $\tilde{\lambda}=(\tilde{\lambda}_0,\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\ldots,\tilde{\lambda}_N)$, $\tilde{u}[t]=(\tilde{u}_1(t),\tilde{u}_2(t),\ldots,\tilde{u}_N(t))$– (6)-(9) есебінің шешімі болса, онда $(\tilde{x}[t],\tilde{\mu})$, мұндағы $\tilde{x}[t]=(\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t),\ldots,\tilde{x}_N(t))$, келесі теңдіктермен анықталады $\tilde{x}_r(t)=\tilde{\lambda}_r+\tilde{u}_r(t)$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=1:N$, $\tilde{\mu}=\tilde{\lambda}_0$, (3)-(5) есебін қанағаттандырады.

$\dfrac{dy}{dt}=A(t)y,\ t\in[0,T]$ жәй дифференциалдық теңдеуінің фундаменталдық матрицасы $X(t)$ болсын. $X(t)$ матрицасын қолдану (6), (7) есепті параметрлердің бекітіліп алынған мәндерінде интегралдық теңдеулердің эквивалентті жүйесіне келтіруді қамтамасыз етеді

$$u_r(t)=X(t)\int_{(r-1)h}^{t}X^{-1}(\tau)\left[A(\tau)\lambda_r+B(\tau)\lambda_0+\varphi(\tau)\sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)h}^{jh}\psi(s)(u_j(s)+\lambda_j)ds+f(\tau)\right]d\tau,$$
$$t\in[(r-1)h,rh),\qquad r=1:N. \tag{10}$$

Белгілеу еңгіземіз $\hat{\alpha}=\sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)h}^{jh}\psi(s)u_j(s)ds.$ Онда (10) мына түрде жазылады

$$u_r(t)=X(t)\int_{(r-1)h}^{t}X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau\cdot\hat{\alpha}+$$
$$+X(t)\int_{(r-1)h}^{t}X^{-1}(\tau)\left\{A(\tau)\cdot\lambda_r+B(\tau)\cdot\lambda_0+\varphi(\tau)\cdot\sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)h}^{jh}\psi(s)ds\cdot\lambda_j+f(\tau)\right\}d\tau, \tag{11}$$
$$t\in[(r-1)h,rh),\qquad r=1:N.$$

(11)-де , $t=\tau$ деп алып, екі жағында $\psi(\tau)$-ға көбейтіп, τ бойынша $[(r-1)h,rh)$-да интегралдап, және, сол және оң жақтарын r бойынша қосып, $\hat{\alpha}$ -ға қатысты сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$[I-G(h)]\cdot\hat{\alpha}=\sum_{r=0}^{N}V_r(h)\cdot\lambda_r+\Phi(h), \tag{12}$$

мұнда

$$G(h)=\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\psi(\tau)X(\tau)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)\varphi(\tau_1)d\tau_1 d\tau,\ V_0(h)=\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\psi(\tau)X(\tau)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)B(\tau_1)d\tau_1 d\tau, \quad (13)$$

$$V_r(h)=\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\psi(\tau)X(\tau)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)A(\tau_1)d\tau_1 d\tau+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\psi(\tau)X(\tau)\int\limits_{(j-1)h}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)\varphi(\tau_1)d\tau_1 d\tau\cdot\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\psi(s)ds,\ r=1:N, \quad (14)$$

$$\Phi(h)=\sum_{r=1}^{N}\int\limits_{(r-1)h}^{rh}\psi(\tau)X(\tau)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 d\tau, \quad (15)$$

сонымен бірге $G(h), V_r(h),\ r=1:N,$ – матрицалар, өлшемі (2×2), $V_0(h)$ –матрица, өлшемі (2×3), $\Phi(h)$ – вектор-функция, өлшемі (2×1), I – бірлік матрица.

$I-G(h)$ матрицасы қайтарымды болғанда , (12)-ден мынаны анықтаймыз

$$\hat{\alpha}=[I-G(h)]^{-1}\left\{\sum_{r=0}^{N}V_r(h)\lambda_r+\Phi(h)\right\}, \quad (16)$$

(16) –ны (11)-дің оң жағына қойып, $u_r(t)$, $r=1:N$, -ны λ_r, $r=0:N$, параметрлері арқылы және $f(t)$ вектор-функциясын табамыз:

$$u_r(t)=X(t)\int\limits_{(r-1)h}^{t}X^{-1}(\tau)\{B(\tau)+\varphi(\tau)[I-G(h)]^{-1}V_0(h)\}d\tau\cdot\lambda_0+X(t)\int\limits_{(r-1)h}^{t}X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\cdot\lambda_r+$$

$$+X(t)\int\limits_{(r-1)h}^{t}X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau\cdot\sum_{j=1}^{N}\left\{[I-G(h)]^{-1}V_j(h)+\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\psi(s)ds\right\}\cdot\lambda_j+ \quad (17)$$

$$X(t)\int\limits_{(r-1)h}^{t}X^{-1}(\tau)\{f(\tau)+\varphi(\tau)[I-G(h)]^{-1}\Phi(h)\}d\tau,\quad r=1:N.$$

(17)-ден , $\lim\limits_{t\to rh-0}u_r(t),\ r=1:N,$ шекті анықтай отырып және оны (8) және (9) –ға қоя отырып, λ_r, $r=0:N$ белгісіз параметрлеріне қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\left[C_0+C_2X(T)\int\limits_{(N-1)h}^{T}X^{-1}(\tau)\{B(\tau)+\varphi(\tau)[I-G(h)]^{-1}V_0(h)\}d\tau\right]\cdot\lambda_0+$$

$$+\left[C_1+C_2X(T)\int\limits_{(N-1)h}^{T}X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau\left\{[I-G(h)]^{-1}V_1(h)+\int\limits_{0}^{h}\psi(s)ds\right\}\right]\cdot\lambda_1+$$

$$+C_2X(T)\int\limits_{(N-1)h}^{T}X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau\sum_{j=2}^{N-1}\left\{[I-G(h)]^{-1}V_j(h)+\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\psi(s)ds\right\}\lambda_j+$$

$$+C_2\left[I+X(T)\int\limits_{(N-1)h}^{T}X^{-1}(\tau)\left\{A(\tau)+\varphi(\tau)\left([I-G(h)]^{-1}V_N(h)+\int\limits_{(N-1)h}^{T}\psi(s)ds\right)\right\}\right]\cdot\lambda_N=$$

$$=d-X(T)\int\limits_{(N-1)h}^{T}X^{-1}(\tau)\{f(\tau)+\varphi(\tau)[I-G(h)]^{-1}\Phi(h)\}d\tau, \quad (18)$$

$$X(ph)\int\limits_{(p-1)h}^{ph}X^{-1}(\tau)\{B(\tau)+\varphi(\tau)[I-G(h)]^{-1}V_0(h)\}d\tau\cdot\lambda_0+$$

$$+X(ph)\int\limits_{(p-1)h}^{ph} X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau\sum_{j=1}^{p-1}\left\{[I-G(h)]^{-1}V_j(h)+\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\psi(s)ds\right\}\lambda_j +$$

$$+\left[I+X(ph)\int\limits_{(p-1)h}^{ph} X^{-1}(\tau)\left\{A(\tau)+\varphi(\tau)\left([I-G(h)]^{-1}V_p(h)+\int\limits_{(p-1)h}^{ph}\psi(s)ds\right)\right\}d\tau\right]\cdot\lambda_p +$$

$$+\left[-I+X(ph)\int\limits_{(p-1)h}^{ph} X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\left([I-G(h)]^{-1}V_{p+1}(h)+\int\limits_{ph}^{(p+1)h}\psi(s)ds\right)d\tau\right]\cdot\lambda_{p+1} +$$

$$+X(ph)\int\limits_{(p-1)h}^{ph} X^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau\sum_{j=p+1}^{N}\left\{[I-G(h)]^{-1}V_j(h)+\int\limits_{(j-1)h}^{jh}\psi(s)ds\right\}\lambda_j =$$

$$=-X(ph)\int\limits_{(p-1)h}^{ph} X^{-1}(\tau)\left\{f(\tau)+\varphi(\tau)[I-G(h)]^{-1}\Phi(h)\right\}d\tau,\quad p=1:N-1. \tag{19}$$

Алынған (18), (19) жүйені мына түрде жазамыз

$$Q(h)\cdot\lambda=-F(h),\ \lambda\in R^{2N+3}. \tag{20}$$

Лемма. $Nh=T,\quad h>0$ болатындай, $N\in \mathrm{N}$ саны табылатын болсын. Сонда орынды:

а) $\lambda_r^*,\ r=1:N$ компоненттері (1), (2) есебінің бөліктеу нүктелеріндегі $x^*(t)$ шешімінің мәндерінен құрастырылған $\lambda^*=\left(\lambda_0^*,\ \lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_N^*\right)\in R^{2N+3}$ векторы $\lambda_r^*=x^*((r-1)h),\ r=1:N,$ (20) – ны қанағаттандырады;

б) егер $\tilde\lambda=\left(\tilde\lambda_0,\ \tilde\lambda_1,\ \tilde\lambda_2,\ldots,\tilde\lambda_N\right)\in R^{2N+3}$ (20) жүйенің шешімі, ал $\tilde u[t]=\left(\tilde u_1(t),\tilde u_2(t),\ldots,\tilde u_N(t)\right)$ функциялар жүйесі (6), (7) Коши есебінің шешімі болатын болса, онда $\left(\tilde x(t),\tilde\mu\right)$ жұбы, мұнда $\tilde x(t)$ функциясы, келесі теңдіктермен анықталады $\tilde x(t)=\tilde\lambda_r+\tilde u_r(t),\ t\in[(r-1)h,rh),\ r=1:N,$ $\tilde x(T)=\tilde\lambda_N+\lim\limits_{t\to T-0}\tilde u_N(t),$ параметр $\tilde\mu=\tilde\lambda_0$, (1), (2) есебінің шешімі болып табылады.

Лемманы қолдана отырып, $I-G(h)$ матрицасы қайтарымды болғанда (1), (2) есебінің шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарты, (20) жүйенің шешімі болуы, ал бір мәнді шешілімділіктің нышаны - $Q(h)$ матрицасының қайтарымдылығы болып табылатынын аңғару қиын емес.

Шешу алгоритмі. Аталмыш алгоритмнің негізгі құрастырушысы болып, жәй дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі болып табылады

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+P(t),\ x(t_{r-1})=0,\ t\in[(r-1)h,rh),\ r=1:N, \tag{20}$$

бұл арада $P(t)$ - не матрица, не вектор-функция.

Ал $a_r(P,t)=X(t)\int\limits_{(r-1)h}^{t}X^{-1}(\tau)P(\tau)d\tau,\ r=1:N,$ арқылы (20) – ның шешімін белгілейміз.

I. $[0,T)$ интервалының бөліктеуі жүргізілген болсын. Коши есебін шеше отыроып

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+\varphi(y),\ y(t_{r-1})=0,\ t\in[(r-1)h,rh),\ r=1:N, \tag{20}$$

$$\frac{dy}{dt}=A(t)y+A(y),\ y(t_{r-1})=0,\ t\in[(r-1)h,rh),\ r=1:N, \tag{21}$$

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(y),\ y(t_{r-1}) = 0,\ t \in [(r-1)h, rh),\ r = 1:N, \tag{22}$$

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(y),\ y(t_{r-1}) = 0,\ t \in [(r-1)h, rh),\ r = 1:N, \tag{23}$$

$t \in [(r-1)h, rh)$ -да $a_r(\varphi, t),\ a_r(A,t),\ a_r(B,t)$ матрицалық функцияларын және $a_r(f,t),\ r = 1:N$ векторларын табамыз.

II. Интегралды есептейміз

$$\hat{\psi}_r = \int_{(r-1)h}^{rh} \psi(\tau)d\tau,\ \hat{\psi}_r(\varphi) = \int_{(r-1)h}^{rh} \psi(\tau)a_r(\varphi,\tau)d\tau,\ \hat{\psi}_r(A) = \int_{(r-1)h}^{rh} \psi(\tau)a_r(A,\tau)d\tau,$$

$$\hat{\psi}_r(B) = \int_{(r-1)h}^{rh} \psi(\tau)a_r(B,\tau)d\tau,\ \hat{\psi}_r(f) = \int_{(r-1)h}^{rh} \psi(\tau)a_r(f,\tau)d\tau, \quad r = 1:N. \tag{24}$$

(13)-(15) –ті ескере отырып, мынаны аламыз

$$\hat{G} = \sum_{r=1}^{N} \hat{\psi}_r(\varphi),\ \hat{V}_0 = \sum_{r=1}^{N} \hat{\psi}_r(B),\ \hat{V}_r = \hat{\psi}_r(A) + \sum_{j=1}^{N} \hat{\psi}_j(\varphi)\cdot\hat{\psi}_r,\ r = 1:N,\ \hat{\Phi} = \sum_{r=1}^{N} \hat{\psi}_r(f).$$

III. $I - \hat{G}$ матрицасының қайтарымдылығын болжамдай отырып, $\lambda_r,\ r = 0:N$ белгісіздеріне қатысты сызықтық теңдеулер жүйесін құрамыз. Осы жүйені шеше отырып, параметрлерді табамыз $\lambda_r^*,\ r = 0:N$.

IV. $\hat{\alpha}^* = \left[I - \hat{G}\right]^{-1}\left\{\sum_{r=0}^{\mathrm{N}} \hat{V}_r \lambda_r^* + \hat{\Phi}\right\}$-ны табамыз, және (1), (2) шеттік есебінің шешімін мына теңдіктермен анықтаймыз

$$x^*(t) = X(t)X^{-1}((r-1)h)\lambda_r^* + X(t)\int_{(r-1)h}^{t} X^{-1}(\tau)\left\{B(\tau)\cdot\lambda_0^* + \varphi(\tau)\cdot\left\{\hat{\alpha}^* + \sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)h}^{jh}\psi(s)ds\cdot\lambda_j^*\right\} + f(\tau)\right\}d\tau, \tag{25}$$

$$t \in [(r-1)h, rh), \qquad r = 1:N,$$

$$x^*(T) = X(T)X^{-1}((N-1)h)\lambda_N^* + X(T)\int_{(N-1)h}^{T} X^{-1}(\tau)\left\{B(\tau)\cdot\lambda_0^* + \varphi(\tau)\cdot\left\{\hat{\alpha}^* + \sum_{j=1}^{N}\int_{(j-1)h}^{jh}\psi(s)ds\cdot\lambda_j^*\right\} + f(\tau)\right\}d\tau. \tag{26}$$

(25), (26) көрсетілім (1), (2) есептің шешімінің аналитикалық формасын береді.

Белгілі болғандай, фундаменталдық матрицаны әруақытта тұрғызу мүмкін емес, сондықтан (1), (2) есептің шешімін табу алгоритмін сандық жүзеге асыру ұсынылады. $A(t), B(t), \varphi(t), \psi(t)$ матрицалары және $f(t)$ вектор-функциясы $[0,T]$-де үшінші ретке дейін үзіліссіз дифференциалданады деп болжамдаймыз. Сонда шеттік есептің шешімінің төртінші ретке дейін үзіліссіз туындысы болады. (20)–(23) Коши есебін төртінші ретті Рунге–Кутт әдісімен шешеміз. Бұл үшін әрбір $[(r-1)h, rh),\ r = 1:N$, интервалды $\tilde{h} = h/\tilde{N}$ қадамымен $\tilde{N}$ жұп бөлікке бөлеміз. Әрі қарай, Симпсон формуласының көмегімен (24) интегралды есептей отырып, мыналарды аламыз $\hat{G}^{\tilde{h}}, \hat{V}_r^{\tilde{h}},\ r = 1:N,\ \hat{\Phi}^{\tilde{h}}$. $I - \hat{G}^{\tilde{h}}$ матрицасының қайтарымды болуын болжамдай отырып, белгісіз параметрлерге қатысты сызықтық теңдеулер жүйесін құрамыз

$$Q^{\tilde{h}}(h)\cdot\lambda = -F^{\tilde{h}}(h),\ \lambda \in R^{2N+3},$$

$\lambda^{\tilde{\mathrm{h}}} = \left(\lambda_0^{\tilde{\mathrm{h}}}, \lambda_1^{\tilde{\mathrm{h}}}, \lambda_2^{\tilde{\mathrm{h}}}, ..., \lambda_N^{\tilde{\mathrm{h}}}\right)$-ны табамыз.

Сонымен табатынымыз:

а) параметр $\mu^{\tilde{h}} = \lambda_0^{\tilde{h}}$;

б) сан $\hat{\alpha}^{\tilde{h}} = \left[I - \hat{G}^{\tilde{h}}\right]^{-1} \left\{ \sum_{r=0}^{N} \hat{V}_r^{\tilde{h}} \lambda_r^{\tilde{h}} + \hat{\Phi}^{\tilde{h}} \right\}$;

в) $x_r^*(t)$ сандық шешімінің интервалшалардың алғашқы нүктелеріндегі мәндері, яғни $x_r^{\tilde{h}}((r-1)h) = \lambda_r^{\tilde{h}}$, $r = 1:N$.

Интервалшалардың басқа нүктелеріндегі сандық шешімнің мәндерін, төртінші ретті Рунге–Кутт әдісін мына түрдегі есепке қайтара қолданып табамыз

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + B(t)\lambda_0^{\tilde{h}} + \varphi(t) \cdot \left\{ \hat{\alpha}^* + \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)h}^{jh} \psi(s)ds \cdot \lambda_j^{\tilde{h}} \right\} + f(t), \qquad t \in [(r-1)h, rh),$$

$$z((r-1)h) = \lambda_r^{\tilde{h}}, \quad r = 1:N.$$

Параметрлеу әдісі негізінде (1), (2) есептің сандық шешімін табудың ұсынылған тәсілін көрнекілеу үшін келесі тестік есепті қарастырамыз

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} t^2 & 1 \\ e^t & t \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 2 \cdot t & 0 & 1 \\ -5 & 4-t & 2 \end{pmatrix} \cdot \mu + \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \cdot \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & s-1 \\ 2s & 0 \end{pmatrix} \cdot x(s)ds +$$

$$+ \begin{pmatrix} -t^4 - t^2 - \dfrac{43 \cdot t}{6} - \dfrac{9}{2} \\ \dfrac{t^2}{2} - e^t - t^2 \cdot e^t - 2 \cdot t + 23 \end{pmatrix}, \; t \in [0,1), \;\; x \in R^2, \mu \in R^3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \mu + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot x(0) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x(T) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Қарастырылып отырған есептің шешімі келесі жұп болып табылады $(x^*(t), \mu^*)$, мұнда

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ 1 - 2t \end{pmatrix}, \;\; \mu = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$N = 2$, $M = 20$, $\tilde{h} = 0.0025$ деп алып, және (20)-(23) Коши есебін төртінші ретті Рунге–Кутт әдісімен шеше отырып, Симпсон формуласының көмегімен (24) интегралды есептей отырып, белгісіз параметрлерге қатысты сызықтық теңдеулер жүйесін құрамыз:

$$Q^{\tilde{h}}(h) \cdot \lambda = -F^{\tilde{h}}(h), \; \lambda \in R^7,$$

мұнда

$$Q^{\tilde{h}}(h)=$$

$$=\begin{pmatrix} 1.6359054705 & 0.6714793228 & 0.7522302301 & 1.7473429406 & 1.9023274555 & 3.5264541561 & 1.1728396341 \\ 4.5506912345 & 0.5891160657 & -2.4560268974 & -1.618167934 & 3.0308396661 & -3.2345407634 & -2.2657647055 \\ -0.9147857639 & 7.0823632571 & 1.2082571275 & 1.3655108774 & 0.8714877894 & 6.7609949195 & 3.4386043396 \\ -8.9238846445 & 5.8896931574 & 4.863620232 & -1.6401820792 & 1.1028260909 & 2.6507139782 & 4.4516148483 \\ -1.6359054705 & 0.3285206772 & -1.2522302301 & 3.2526570594 & 3.0976725445 & -3.5264541561 & -1.1728396341 \\ -0.1861407485 & 0.6523185498 & 1.3052133857 & 1.6204069658 & 0.5606933148 & 0.1204656977 & 0.2701650267 \\ -2.7359068367 & 2.2319946618 & 1.5508837766 & 0.9125137303 & 1.3355997668 & 0.4583507314 & -0.8863546504 \end{pmatrix}.$$

Бұдан табатынымыз

$$\mu^{\tilde{h}}=\lambda_0^{\tilde{h}}=\begin{pmatrix} 5.0000000011 \\ -0.999999984 \\ 2.0000000044 \end{pmatrix},\ \lambda_1^{\tilde{h}}=\begin{pmatrix} 1.0000000012 \\ 0.9999999989 \end{pmatrix},\ \lambda_2^{\tilde{h}}=\begin{pmatrix} 1.2500000063 \\ 0.0000000049 \end{pmatrix}.$$

$[0,\,1]$ кесіндісінің бөліктеу нүктелеріндегі шеттік есептің сандық мәндері, келесі кестеде берілген.

Кесте. Шеттік есептің сандық және дәл шешімдерін есептеу нәтижелері

t	$\tilde{x}_1(t)$ (сандық шешім)	$x^*{}_1(t)$ (дәл шешім)	$\tilde{x}_2(t)$ (сандық шешім)	$x^*{}_2(t)$ (дәл шешім)
0	1.0000000012	1.0000000000	0.9999999989	1.0000000000
0.025	1.0006250014	1.0006250000	0.9499999992	0.9500000000
0.05	1.0025000017	1.0025000000	0.8999999995	0.9000000000
0.075	1.0056250019	1.0056250000	0.8499999998	0.8500000000
0.1	1.0100000022	1.0100000000	0.8000000001	0.8000000000
0.125	1.0156250024	1.0156250000	0.7500000003	0.7500000000
0.15	1.0225000027	1.0225000000	0.7000000006	0.7000000000
0.175	1.0306250030	1.0306250000	0.6500000009	0.6500000000
0.2	1.0400000032	1.0400000000	0.6000000012	0.6000000000
0.225	1.0506250035	1.0506250000	0.5500000015	0.5500000000
0.25	1.0625000038	1.0625000000	0.5000000018	0.5000000000
0.275	1.0756250040	1.0756250000	0.4500000021	0.4500000000
0.3	1.0900000043	1.0900000000	0.4000000024	0.4000000000
0.325	1.1056250046	1.1056250000	0.3500000027	0.3500000000
0.35	1.1225000048	1.1225000000	0.3000000030	0.3000000000
0.375	1.1406250051	1.1406250000	0.2500000033	0.2500000000
0.4	1.1600000053	1.1600000000	0.2000000037	0.2000000000
0.425	1.1806250056	1.1806250000	0.1500000040	0.1500000000
0.45	1.2025000058	1.2025000000	0.1000000043	0.1000000000
0.475	1.2256250060	1.2256250000	0.0500000046	0.0500000000
0.5	1.2500000063	1.2500000000	0.0000000049	0.0000000000
0.525	1.2756250065	1.2756250000	-0.0499999948	-0.0500000000
0.55	1.3025000067	1.3025000000	-0.0999999945	-0.1000000000
0.575	1.3306250069	1.3306250000	-0.1499999942	-0.1500000000
0.6	1.3600000070	1.3600000000	-0.1999999939	-0.2000000000
0.625	1.3906250072	1.3906250000	-0.2499999937	-0.2500000000
0.65	1.4225000073	1.4225000000	-0.2999999934	-0.3000000000
0.675	1.4556250074	1.4556250000	-0.3499999932	-0.3500000000
0.7	1.4900000075	1.4900000000	-0.3999999931	-0.4000000000
0.725	1.5256250076	1.5256250000	-0.4499999929	-0.4500000000
0.75	1.5625000076	1.5625000000	-0.4999999929	-0.5000000000
0.775	1.6006250076	1.6006250000	-0.5499999928	-0.5500000000
0.8	1.6400000075	1.6400000000	-0.5999999929	-0.6000000000
0.825	1.6806250074	1.6806250000	-0.6499999930	-0.6500000000
0.85	1.7225000072	1.7225000000	-0.6999999932	-0.7000000000

0.875	*1.7656250070*	*1.7656250000*	*-0.7499999935*	*-0.7500000000*
0.9	*1.8100000067*	*1.8100000000*	*-0.7999999940*	*-0.8000000000*
0.925	*1.8556250062*	*1.8556250000*	*-0.8499999946*	*-0.8500000000*
0.95	*1.9025000057*	*1.9025000000*	*-0.8999999953*	*-0.9000000000*
0.975	*1.9506250051*	*1.9506250000*	*-0.9499999963*	*-0.9500000000*
1	*2.0000000043*	*2.0000000000*	*-0.9999999974*	*-1.0000000000*

Кестеде көрсетілгендей, дәл және сандық шешімдердің арасындағы айырма $\varepsilon = 0.8 \times 10^{-8}$-нен аспайды.

References

1 Nesterenko O.B. Iteration method for the solution of integro-differential equations with constraints // Nonlinear Oscillations. - 2007. - Vol. 10, № 3. - P. 339-350.

2 Luchka A. Yu., Nesterenko O.B. Projection method for the solution of integro-differential equations with restrictions and control // Nonlinear Oscillations. - 2008. -Vol. 11, № 2. - P. 219-228.

3 Luchka A. Yu., Nesterenko O.B. Construction of solution of integro-differential equations with restrictions and control by projection-iterative method // Nonlinear Oscillations. -2009. - Vol. 12, № 1. - P. 85-93.

4 Nesterenko O.B. Modified projection-iterative method for weakly nonlinear integro differential equations with parameters // Journal of Mathematical Sciences. - 2014. - Vol. 198, № 3. - P. 328-335.

5 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential equations. – 2010. - Vol. 46, No 4. - P. 553-567.

6 Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2010. - Vol. 50, № 7. - P. 1150-1161.

7 Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation //Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2013. -Vol. 53, № 6. – P. 736-758.

8 Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential Equations. – 2013. - Vol. 49, № 9. - P 1087-1102.

9 Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary-value problems for the Fredholm integrodifferential equations //Ukranian Mathematical Journal. - 2015. – Vol. 66, № 8. – P. 1200-1219.

10 Bakirova E.A., Iskakova N.B., Uaisov B. (2017) Ob odnom algoritme resheniya linejnoj kraevoj zadachi dlya integro-differencial'nogo uravneniya Fredgol'ma s parametrom [On an algorithm for solving a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with a parameter]. Bulletin of the NAS RK. Physics and mathematics series. No. 3. from. 173-180. (on Russ)

11 Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1989. - Vol. 29, № 1. - P. 34-46.