




МАТЕМАТИКА ЖӘНЕ ФИЗИКАЛЫҚ ПРОЦЕСТЕР МЕН МЕХАНИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL PROCESSES AND MECHANICAL SYSTEMS

МРНТИ 28.15.15

10.51889/2959-5894.2025.91.3.001

С.Б. Беркімбаева¹ , Қ.С. Дальбекова^{1*} , З.А. Каденова² ,
А.К. Искакова¹, Р.С. Аккозиева¹

¹ Университет международного бизнеса, г. Алматы, Казахстан

² Институт Математики Национальной академии наук Республики Кыргызстан, г. Бишкек

*e-mail: dk57777@mail.ru

КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Аннотация

Понятие абсолютной устойчивости является одним из важных явлений при изучении различных процессов в реальной действительности. Абсолютная устойчивость систем с распределенными параметрами означает стабильную работу системы при любых допустимых нелинейностях, что делает ее важной для практического применения. Как следствие возникает потребность изучить такие методы исследования, которые обеспечивали бы устойчивость в некоторой области изменения параметров системы. Абсолютную устойчивость гибридной системы описываемой гиперболическими уравнениями в частных производных можно получить в виде частотного неравенства. Так как проверка частотного условия в пространстве параметров системы является довольно сложной задачей, то для ее решения можно осуществить переход от частотного условия к алгебраическому критерию абсолютной устойчивости на основе метода Штурма, применяемого к квазиполиномам. В данной статье рассматривается гибридная система, описываемая гиперболическими уравнениями в частных производных. Абсолютную устойчивость такой системы можно получить в виде частотного неравенства, согласно частотного критерия типа В.М. Попова. Так как проверка частотного условия в пространстве параметров системы является довольно сложной задачей, в предлагаемой работе осуществлен переход от частотного условия к алгебраическому критерию абсолютной устойчивости.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, граничные условия, гурвицева матрица, абсолютная устойчивость движения, системы с распределенными параметрами, квазиоптимальное управление.

С.Б. Беркімбаева¹, Қ.С. Дальбекова¹, З.А. Каденова², А.К. Искакова¹, Р.С. Аккозиева¹

¹Халықаралық бизнес университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Қырғыз Республикасы Ұлттық ғылым академиясының Математика институты, Бішкек қ.

ТАРАТЫЛҒАН ПАРАМЕТРЛІ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ БІР КЛАСЫН КВАЗИТИІМДІ БАСҚАРУ

Аңдатпа

Нақты болып жатқан әртүрлі үрдістерді зерттеу кезінде маңызды ұғымдардың бірі-қозғалыс тұрақтылығы туралы ұғымымен кездесуіміз мүмкін. Таратылған параметрлері бар жүйелердің

абсолютті тұрақтылығы жүйенің кез келген рұқсат етілген бейсызықтық жағдайында тұрақты жұмыс істеу қабілетін білдіреді, бұл жағдай оны практикалық қолдану үшін маңызды етеді. Нәтижесінде жүйе параметрлерінің белгілі бір өзгерістер диапазонында тұрақтылықты қамтамасыз ететін әдістерін зерттеу қажеттілігі туындайды. Қозғалыс тұрақтылығы теориясының негіздерін өткен ғасырдың соңында ұлы орыс ғалымы А.М. Ляпунов жасаған. Өзімізге белгілі, Ляпуновтың тұрақтылығы шексіз уақыт аралығында қарастырылады, бұл көптеген қосымшалар үшін үлкен кедергі болып табылады, өйткені зерттеу объектілерінің көпшілігі шектеулі уақыт аралығында жұмыс істейді. Жұмыстың мақсаты-сызықты емес жүйелердің қозғалысының тұрақтылығын шектеулі уақыт аралығында зерттеу. Мақалада гиперболалық дербес дифференциалдық теңдеулер арқылы сипатталған гибриді жүйе қарастырылады. Мұндай жүйенің абсолютті тұрақтылығын В.М. Поповтың жиілік критерийі негізінде жиілік теңсіздік түрінде алуға болады. Бірақ, жүйелік параметрлер кеңістігінде жиілік критерийін тексеру өте күрделі есеп болып табылады. Осыған байланысты ұсынылып отырған жұмыс жиілік шартынан абсолютті тұрақтылықтың алгебралық критерийіне көшуді жүзеге асырады.

Түйін сөздер: дербес дифференциалдық теңдеулер, шекаралық шарттар, Гурвиц матрицасы, қозғалыстың абсолютті тұрақтылығы, бөлінген параметрлері бар жүйелер, квазиоптайлы басқару.

S.B. Berkimbaeva¹, K.S. Dalbekova¹, Z.A. Kadenova², A.K. Iskakova¹, R.S. Akkozieva¹

¹University of international business, Almaty, Kazakhstan

²Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek

QUASI-OPTIMAL CONTROL OF ONE CLASS OF SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

Abstract

The concept of absolute stability is one of the important phenomena in the study of various processes in reality. Absolute stability of systems with distributed parameters means stable operation of the system under any admissible nonlinearities, which makes it important for practical application. As a consequence, there is a need to study such research methods that would ensure stability in a certain range of changes in the system parameters. Absolute stability of a hybrid system described by hyperbolic partial differential equations can be obtained in the form of a frequency inequality. Since checking the frequency condition in the space of system parameters is a rather complex task, then for its solution it is possible to make a transition from the frequency condition to an algebraic criterion of absolute stability based on the Sturm method applied to quasi-polynomials. This article considers a hybrid system described by hyperbolic partial differential equations. Absolute stability of such a system can be obtained in the form of a frequency inequality, according to the frequency criterion of the V.M. Popov type. But checking the frequency condition in the space of system parameters is a rather complex task. In this regard, the proposed work makes a transition from the frequency condition to the algebraic criterion of absolute stability.

Keywords: partial differential equations, boundary conditions, Gurvits matrix, absolute stability of motion, systems with distributed parameters, quasi-optimal control.

Введение

Абсолютная устойчивость систем с распределенными параметрами равносильно стабильной работе системы при любых допустимых нелинейностях, что означает ее важность практического применения. Из сказанного следует потребность в изучении таких методов исследования, которые обеспечивали бы устойчивость в некоторой области изменения параметров системы. Абсолютную устойчивость гибридной системы описываемой гиперболическими уравнениями в частных производных можно получить в виде частотного неравенства. Так как проверка частотного условия в пространстве параметров системы является довольно сложной задачей, то для ее решения можно осуществить переход от частотного условия к алгебраическому критерию абсолютной устойчивости на основе метода Штурма, применяемого к квазиполиномам.

Как известно, задача абсолютной устойчивости возникла в теории автоматического регулирования и в общей теории устойчивости движения примерно в 40-е годы двадцатого века. В конце 50-х и начале 60-х годов интерес к проблеме начал ослабевать, так как казались

исчерпанными возможности прямого метода Ляпунова, который повсеместно использовался для решения задач абсолютной устойчивости [1]-[3]. В 60-е годы появились исследования румынского ученого Василе-Михая Попова, в которых был развит новый подход к проблеме абсолютной устойчивости и были получены весьма изящные и сильные результаты в этой области. Эти работы вновь стимулировали интерес к проблеме абсолютной устойчивости и породили ряд новых исследований [4],[5].

Методология исследования

В работе рассматривается гибридная система, описываемая гиперболическими уравнениями в частных производных. Для достижения абсолютной устойчивости данной системы осуществляется переход от частотного критерия типа В.М. Попова к алгебраическому критерию абсолютной устойчивости. Рассмотрим систему, описываемую совокупностью обыкновенного дифференциального уравнения, уравнения в частных производных и алгебраического уравнения [6]. Пусть звено с распределенными параметрами описывается гиперболической системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = b \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

$$(u = u(x, t), \quad v = v(x, t)) \quad (2)$$

где a, b – постоянные, $x \in (0, l)$, $t > 0$,

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0.$$

Звено с сосредоточенными параметрами описывается обыкновенным дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + B\varphi(u) + Cw(0, t) + Dw(l, t) \quad (3)$$

$$y(0) = y_0,$$

где $w(x, t) = (u(x, t), v(x, t))^*$,

A – постоянная матрица порядка $n \times n$; B – n – мерный вектор;

C, D – постоянные матрицы порядка $n \times 2$; $\varphi(u)$ – характеристика нелинейного элемента, удовлетворяющая условию

$$k_1 u^2 \leq \varphi(u)u \leq k_2 u^2, \quad k_1 \geq 0, k_2 \geq 0 \quad (4)$$

Уравнения (1) и (3) связаны граничным условием

$$\Gamma_1 w(0, t) + \Gamma_2 w(l, t) = h\sigma(t) + Hy(t), \quad \sigma = c^*y \quad (5)$$

где h – постоянный вектор 2×1 , H – постоянная матрица $2 \times n$, c – вектор $n \times 1$,

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} m_0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & n_0 \end{pmatrix}$$

или

$$m_0 u(0, t) + v(0, t) = H_1^* y$$

$$u(l, t) + n_0 v(l, t) = H_2^* y,$$

где

$$hc^* + H = T = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

d_1, d_2 – векторы $l \times n$.

Частным примером систем, описываемых уравнениями (1) – (5), является система регулирования скорости турбины.

Задача. Для систем, записываемых совокупностью уравнений (1) – (5) найти управление

$$u(t) = s(t) - \alpha\sigma(t)$$

из условия минимума функционала $I(s, \alpha, c)$, где

$$J = \int_0^{\infty} \sigma^2(t) dt \leq I(s, \alpha, c) \quad (6)$$

при условии, что несобственный интеграл сходится. Здесь $I(s, \alpha, c)$ – квадратичный функционал, определенный ниже, α – постоянное число, c – постоянный вектор, $u \in L_2(0, \infty)$.

Решение задачи. Из условия (4) следует, что

$$\varphi(u) = k_1 u + \psi(u)$$

где $0 \leq \psi(u)u \leq ku^2$, $k = k_2 - k_1$.

Подставляя значение $\varphi(u)$ в уравнение (3) и применяя преобразование Лапласа, получим

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= (pE - A)^{-1}y_0 + (pE - A)^{-1}B(k_1\tilde{u} + \tilde{\psi}) + \\ &+ (pE - A)^{-1}Cw(0, p) + (pE - A)^{-1}Dw(l, p) \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим

$$u(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t)e^{-pt} dt, \quad v(x, p) = \int_0^{\infty} v(x, t)e^{-pt} dt,$$

и учитывая, что согласно преобразованию Лапласа

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{du(x, t)}{dx}, \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \frac{dv(x, t)}{dx},$$

при нулевых начальных условиях $u(x, 0) = v(x, 0) = 0$, предполагая здесь и в дальнейшем все условия для существования преобразования Лапласа из (1) имеем:

$$w(x, p) = \Phi(x, p)w(0, p),$$

$$\Phi(x, p) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\tau px} + e^{\tau px}}{2} & \frac{e^{-\tau px} - e^{\tau px}}{2} \\ \frac{b\tau(e^{-\tau px} + e^{\tau px})}{2} & \frac{e^{-\tau px} + e^{\tau px}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\tau px) & sh(\tau px) \\ b\tau sh(\tau px) & ch(\tau px) \end{pmatrix},$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{ab}}, \quad w(x, p) = (u(x, p), v(x, p))^*, \quad w(0, p) = (u(0, p), v(0, p))^*.$$

Здесь $\Phi(x, p)$ – фундаментальная матрица решений системы (1).

Тогда из (1) и (5) имеем:

$$\begin{aligned} w(0, p) &= W_1(p)\tilde{\sigma} + W_2(p)\tilde{y}, \\ w(l, p) &= W_3(p)\tilde{\sigma} + W_4(p)\tilde{y}, \end{aligned} \quad (8)$$

На основе выражений (7),(8) получим:

$$\tilde{\sigma} = \chi_2(p) + \chi_1(p)(k_1\tilde{u} + \tilde{\psi}), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_2(p) &= -F^{-1}(p)y_0//N(p), \quad \chi_1(p) = -F^{-1}(p)b//N(p), \\ F(p) &= pE - A - CW_2(p) - DW_4(p), \\ N(p) &= 1 - F^{-1}(p)(CW_1 + DW_2). \end{aligned}$$

Переходя к оригиналу с помощью интеграла свертки из (9) имеем:

$$\sigma(t) = f(t) + \int_0^t W(t-\tau)[k_1 u(\tau) + \psi(u(\tau))]d\tau, \quad (10)$$

где $\chi_2(p) \rightarrow f(t)$, $\chi_1(p) \rightarrow W(t)$.

Тогда из условия задачи, управление

$$\begin{aligned} u(t) &= s(t) - \alpha f(t) - \alpha \int_0^t W(t-\tau)[k_1 u(\tau) + \psi(u(\tau))]d\tau, \\ \mu &= k_1 + \frac{k}{2}, \end{aligned}$$

Учитывая $\int_0^t W(t-\tau)(k_1 u + \psi) d\tau = \int_0^t \mu W(t-\tau)u d\tau + \int_0^t W(t-\tau)(\psi - \frac{k}{2}u) d\tau$

и применяя преобразование Лапласа, получим

$$\tilde{u} = \tilde{s}_1 - \alpha \tilde{f}_1 - \alpha W_1(p)(\tilde{\psi} - \frac{k}{2}\tilde{u}), \quad (11)$$

где

$$\tilde{s}_1 = \tilde{s}/L_1, \quad \tilde{f}_1 = \chi_2(p)/L_1, \quad W_1(p) = \chi_1(p)/L_1, \quad L_1 = 1 + \alpha\mu\chi_1.$$

Переходя из (11) снова к оригиналу, имеем

$$u(t) = s_1(t) + \alpha f_1(t) - \alpha \int_0^t W_1(t-\tau) \left[\psi(u(\tau)) - \frac{k}{2}u(\tau) \right] d\tau \quad (12)$$

Из неравенства треугольника для норм и по формуле Парсеваля, получим

$$\|u(t)\| \leq \|s_1(t) - \alpha f_1(t)\| + |\alpha| \frac{k}{2} \max_{\omega} |W_1(i\omega)| \|u\|.$$

где $\|u\| = \left(\int_0^\infty u^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$

Следовательно,

$$\frac{1}{\beta} = 1 - |\alpha| \frac{k}{2} \max_{\omega} |W_1(i\omega)|.$$

Коэффициент α выбирается из условия $\beta > 0$. Как следует из выражения $W_1(p)$ такое α всегда существует.

Так как

$$\sigma^2 = \frac{1}{\alpha^2} (s(t) - u(t))^2 \leq \frac{2}{\alpha^2} (s^2(t) + u^2(t)),$$

то

$$J = \int_0^\infty \sigma^2(t)dt \leq \frac{2}{\alpha^2} \int_0^\infty [s^2(t) + \beta^2(s_1 - \alpha f_1)^2] dt \quad (13)$$

Теперь переходим к определению дифференциальных уравнений, из которых можно было бы найти $s_1(t)$, $f_1(t)$.

Как следует из структурных преобразований, функцию из $f_1(t)$ можно найти из совокупности дифференциальных уравнений:

$$\dot{z} = (A - \alpha\mu bc^*)z + Cw(0, t) + Dw(l, t), \quad z(0) = y_0 \quad (14)$$

$$f_1(t) = c^*z(t) \quad (15)$$

$$\Gamma_1 w(0, t) + \Gamma_2 w(l, t) = hf_1(t) + Hz(t) \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = b \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (17)$$

В справедливости формул (14) - (17) не трудно убедиться, применив преобразования Лапласа [7]:

$$\tilde{f}_1 \rightarrow f_1(t),$$

$$\tilde{f}_1 = \frac{\chi_2(p)}{1 + \alpha\mu\chi_1(p)} = \frac{c^*F^{-1}(p)y_0}{[1 - c^*F^{-1}(p)(CW_1 + DW_3)\alpha\mu c^*F^{-1}(p)b]},$$

$$\{1 - c^*F^{-1}(p)[CW_1 + DW_3 - \alpha\mu b]\}\tilde{f}_1 = c^*F^{-1}(p)y_0$$

$$F(p) = (pE - A) - CW_2(p) - DW_4(p),$$

$$\tilde{f}_1 = c^*F^{-1}(p)\{[CW_1 + DW_3 - \alpha\mu b]\tilde{f}_1\},$$

$$\tilde{f}_1 = c^*\tilde{z},$$

$$\tilde{z} = F^{-1}(p)\{[CW_1 + DW_3 - \alpha\mu b]c^*\tilde{z} + y_0\},$$

$$[(pE - A) - CW_2(p) - DW_4(p)]\tilde{z} = [CW_1 + DW_3 - \alpha\mu b]c^*\tilde{z} + y_0,$$

$$p\tilde{z} = A\tilde{z} + [(CW_2(p) - DW_4(p)) + [CW_1 + DW_3 - \alpha\mu b]c^*]\tilde{z} + y_0,$$

$$\dot{z} = (A - \alpha\mu bc^*)z + Cw(0, t) + Dw(l, t), \quad z(0) = y_0.$$

Аналогичным путем получим совокупность дифференциальных уравнений, из которых можно определить $s_1(t)$:

$$\dot{v} = (A - \alpha\mu bc^*)v + bs + Cw_1(0, t) + Dw(l, t), \quad v(0) = 0 \quad (18)$$

$$\Gamma_1 w_1(0, t) + \Gamma_2 w_1(l, t) = h\theta + Hv, \quad \theta = c^*v(t) \quad (19)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = b \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad (20)$$

$$s_1(t) = s(t) - \alpha\mu\theta \quad (21)$$

где $w_1(x, t) = (u_1(x, t), v_1(x, t))^*$.

Рассмотрим разность:

$$s_1(t) - \alpha f_1(t) = s(t) - \alpha c^*(\mu v(t) + z(t)).$$

Обозначим

$$\xi(t) = \alpha(\mu v(t) + z(t)).$$

Тогда

$$s_1(t) - \alpha f_1(t) = s(t) - c^*\xi(t).$$

Производная

$$\dot{\xi} = A_1\xi + \alpha\mu bs + C[\alpha\mu w_1(0, t) + \alpha w(0, t)] + D[\alpha\mu w_1(l, t) + \alpha w(l, t)], \quad (22)$$

$$\xi(0) = \alpha y_0.$$

где $A_1 = A - \alpha\mu bc^*$.

Умножая (20) на $\alpha\mu$, а (17) на α и складывая получим:

$$\left(\alpha\mu \frac{\partial u_1}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t}\right) = a \left(\alpha\mu \frac{\partial v_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\left(\alpha\mu \frac{\partial v_1}{\partial t} + \alpha \frac{\partial v}{\partial t}\right) = b \left(\alpha\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Вводя вектор $V(x, t) = \{V_1(x, t), V_2(x, t)\}^*$, где

$$\begin{aligned} V_1(x, t) &= \alpha\mu u_1(x, t) + \alpha u(x, t), \\ V_2(x, t) &= \alpha\mu v_1(x, t) + \alpha v(x, t), \end{aligned}$$

Имеем

$$\frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial V_2(x, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_2(x, t)}{\partial t} = b \frac{\partial V_1(x, t)}{\partial x} \quad (23)$$

Тогда уравнение (22) запишется в виде:

$$\dot{\xi} = A_1 \xi + \alpha \mu b s + CV(0, t) + DV(l, t), \quad \xi(0) = \alpha y_0. \quad (24)$$

Аналогично, умножая (19) на $\alpha \mu$, а (16) на α и складывая, получим:

$$\Gamma_1 V(0, t) + \Gamma_2 V(l, t) = h(\alpha \mu c^* v + \alpha c^* z) + H \xi = (hc^* + H) \xi \quad (25)$$

Учитывая, что $s_1 - \alpha f_1 = s - c^* \xi$ и сделав замену

$$s_2 = \sqrt{1 + \beta^2} s - \frac{\beta^2}{\sqrt{1 + \beta^2}} c^* \xi$$

функционал (13) можно представить в виде:

$$J \leq I = \frac{2}{\alpha^2} \int_0^{\infty} [\xi^* (\delta c c^*) \xi + s_2^2(t)] dt, \quad (26)$$

где $\delta = \beta^2 / (1 + \beta^2)$. Подставляя значение

$$s = \frac{s_2}{\sqrt{1 + \beta^2}} + \delta c^* \xi$$

в формуле (22), получим

$$\dot{\xi} = A_2 \xi + b_2 s_2 + CV(0, t) + DV(l, t), \quad \xi(0) = \alpha y_0,$$

где

$$A_2 = A_1 \alpha \mu b c^* \delta, \quad b_2 = \alpha \mu b^* / \sqrt{1 + \beta^2}.$$

Таким образом, получили следующую задачу оптимального управления: найти оптимальное управление $s_2(t)$ из условия минимума функционала [8]

$$I(s_2, \alpha, c) = \frac{2}{\alpha^2} \int_0^{\infty} [\xi^* (\delta c c^*) \xi + s_2^2(t)] dt \quad (27)$$

при ограничениях вида

$$\dot{\xi} = A_2 \xi + b_2 s_2(t) + CV(0, t) + DV(l, t), \quad \xi(0) = \alpha y_0 \quad (28)$$

$$\Gamma_1 V(0, T) + \Gamma_2 V(l, T) = (hc^* + H) \xi = T \xi \quad (29)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = a \frac{\partial V_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial t} = b \frac{\partial V_1}{\partial x}, \quad V(x, 0) = 0 \quad (30)$$

Для решения этой задачи на основе метода аналитического конструирования оптимальных регуляторов необходимо построить определенно-положительный функционал P такой, что

$$\min_{s_2(t)} \left(\frac{dP}{dt} + G \right) = 0, G = \xi^* Q \xi + \frac{2}{\alpha^2} s_2^2(t), Q = \frac{2\delta}{\alpha^2} c c^* \geq 0 \quad (31)$$

С учетом первой части (27) и граничного условия выбираем функцию P в виде:

$$P(t) = \xi^* Q \xi + \int_0^l [\alpha_1 V_1^2(x, t) + \alpha_2 V_2^2(x, t) + \alpha_3 V_1(x, t) V_2(x, t)] dx + \\ + \int_0^l [\delta_0 V_2(0, \tau) + f_2 \zeta(\tau)]^2 d\tau + \int_0^l [\gamma V_1(l, \tau) + f_3 \zeta(\tau)]^2 d\tau \quad (32)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \delta_0, \gamma$ - произвольные постоянные, f_2, f_3 – векторы строки размерности $1 \times n$, S - симметричная положительно-определенная матрица, подынтегральная функция неотрицательная квадратичная форма относительно переменных $V_1(x, t), V_2(x, t)$ [9]. Полная производная функции P взятая в силу системы (28)-(30) при $a\alpha_1 = b\alpha_2 = \alpha_0$ имеет вид:

$$\frac{dP}{dt} = \xi^* (A_2^* S + S A^2) \xi + 2b_2 S s_2(t) + 2V(0, t) C^* S \zeta + \\ + 2V(l, t) D^* S \zeta + 2\alpha_0 [V_1(l, t) V_2(l, t) - V_1(0, t) V_2(0, t)] + \\ + \frac{a\alpha_3}{2} [V_2^2(l, t) - V_2^2(0, t)] + \frac{b\alpha_3}{2} [V_1^2(l, t) - V_1^2(0, t)] + \\ + [\delta_0 V_2(0, \tau) + f_2 \zeta]^2 + [\gamma V_1(l, \tau) + f_3 \zeta]^2. \quad (33)$$

Учитывая вид матриц Γ_1, Γ_2 из граничного условия (28) получим [10]

$$V_1(0, t) = d_1 \xi - m_0 V_2(0, t), V_2(l, t) = d_2 \xi - n_0 V_1(l, t) \quad (34)$$

где $T = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, d_1, d_2 - векторы строки $1 \times n$.

Подставляя (34) в формулу (33), имеем

$$\frac{dP}{dt} = \xi^* \left(A_2^* S + S A^2 + 2d_1^* d_3 + 2d_2^* d_6 - \frac{a\alpha_3}{2} d_2^* d_2 - \frac{b_1 \alpha_3}{2} d_1^* d_1 \right) \xi + \\ + 2b_2 S \xi s_2(t) + V_2(0, t) [2(1 - m_0) d_4 - 2\alpha_0 d_1 + b\alpha_0 m_0 d_1] \xi + \\ + V_1(l, t) [2(1 - n_0) d_6 + 2\alpha_0 d_2 - \alpha_3 n_0 a d_2] \xi + \\ + V_1^2(l, t) \left[\frac{a\alpha_3}{2} n_0^2 - 2\alpha_0 n_0 + \frac{b\alpha_3}{2} \right] + V_2^2(0, t) \left[2\alpha_0 m_0 - \frac{b\alpha_3}{2} n_0^2 - \frac{a\alpha_3}{2} \right] + \\ + [\delta_0 V_2(0, \tau) + f_2 \zeta]^2 + [\gamma V_1(l, \tau) + f_3 \zeta]^2, \quad (35)$$

где $C^* S = \begin{pmatrix} d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$, $D^* S = \begin{pmatrix} d_5 \\ d_6 \end{pmatrix}$, $d_3 - d_6$ - вектор строки $1 \times n$.

Выбирая произвольные постоянные $\alpha_0, \alpha_3, \delta_0, \gamma$, векторы f_2, f_3 из условия:

$$2(1 - m_0) d_4 - 2\alpha_0 d_1 + b\alpha_3 m_0 d_4 = 2\delta_0 f_2,$$

$$\begin{aligned} 2(1 - n_0)d_6 + 2\alpha_0d_2 - a\alpha_3n_0d_2 &= -2\gamma f_3, \\ \frac{b\alpha_3}{2} - 2\alpha_0n_0 - n_0^2a\alpha_3 &= -\gamma^2, \\ 2\alpha_0m_0 - \frac{b\alpha_3}{2} - \frac{b\alpha_3}{2}m_0 &= -\sigma_0^2. \end{aligned} \tag{36}$$

Тогда формула (35) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \xi^*(A_2^*S + SA_2 + 2d_1^*d_3 + d_3^*d_1 + d_2^*d_6 + d_6^*d_2)\xi - \\ &- \xi^* \left(\frac{a\alpha_3}{2}d_2^*d_2 + \frac{b\alpha_3}{2}d_1^*d_1 - f_2^*f_2 + f_3^*f_3 \right) \xi + 2b_2S\xi s_2(t) \end{aligned}$$

Управление $s_2(t)$ определяем из условия:

$$\begin{aligned} \min_{s_2(t)} \left[\xi^*(A_2^*S + SA_2 + 2d_1^*d_3 + d_3^*d_1 + d_2^*d_6 + d_6^*d_2)\xi - \frac{a\alpha_3}{2}d_2^*d_2 + \frac{b\alpha_3}{2}d_1^*d_1 - \right. \\ \left. - f_2^*f_2 + f_3^*f_3 \right) \xi + 2b_2S\xi s_2(t) + \frac{2}{\alpha^2} s_2^2(t) \Big] = 0 \end{aligned}$$

Отсюда

$$s_2(t) = -\frac{1}{2}\alpha^2 b_2^* S \xi, \tag{37}$$

где матрица S определяется из матричного уравнения:

$$\begin{aligned} (A_2 + C_1^*d_1 + D_2^*d_2)^*S + S(A_2 + C_1^*d_1 + D_2^*d_2) + \left(Q - \frac{a\alpha_3}{2}d_2^*d_2 + \frac{b\alpha_3}{2}d_1^*d_1 + f_2^*f_2 + f_3^*f_3 \right) - \\ - \alpha^2 S b_2 b_2^* S = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Здесь

$$C^*S = \begin{pmatrix} C_1^*S \\ C_2^*S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}, \quad D^*S = \begin{pmatrix} D_1^*S \\ D_2^*S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_5 \\ d_6 \end{pmatrix}$$

Положим

$$Q = \frac{a\alpha_3}{2}d_2^*d_2 + \frac{b\alpha_3}{2}d_1^*d_1 - f_2^*f_2 - f_3^*f_3,$$

т.е.

$$c = \frac{|\alpha|}{\sqrt{2\delta}} \left[\sqrt{\frac{a\alpha_3}{2}d_2^*} + \sqrt{\frac{b\alpha_3}{2}d_1^*} - f_2^* - f_3^* \right], \tag{39}$$

при этом Q-неотрицательно-определенная и (38) имеет вид:

$$A_3^*S + SA_3 - \alpha^2 S b_2 b_2^* S = 0, \quad A_3 = A_2 + C_1^*d_1 + D_2^*d_2$$

или

$$S^{-1}A_3^* + A_3S^{-1} - \alpha^2 S b_2 b_2^* = 0 \tag{40}$$

Если $(-A_3)$ - Гурвицева матрица, то матрица S будет положительно-определенной и

$$S^{-1} = -\alpha^2 \int_0^\infty e^{-A_3 t} b_2 b_2^* e^{-A_3^* t} dt \quad (41)$$

$$\alpha_1 \alpha_3 > \frac{\alpha_2^2}{4} \quad (42)$$

Тогда подынтегральное выражение в (32) будет положительно-определенной относительно $V_1(x, t), V_2(x, t)$ [11].

Результаты исследования

Справедлива следующая теорема:

Теорема. Если матрица $(-A_3)$ гурвицева и вектор c выбирается из условия (39), а α выбирается из условия положительности $\beta > 0$ и выполняются условия (42), (36), то при управлении вида (37), (42) переходный процесс в системе (28)-(30) от начального условия $\xi(0) = \alpha y_0$ является оптимальным.

Поскольку

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \alpha_2(t) + \frac{\beta^2}{1+\beta^2} c^* \xi,$$

то на основе (37) имеем:

$$s(t) = \left[\frac{\beta^2}{1+\beta^2} c^* - \frac{\alpha^2}{2\sqrt{1+\beta^2}} b_2 S \right] \xi = C_0 \xi(t) \quad (43)$$

Отсюда, искомое управление

$$u(t) = s(t) - \alpha \sigma(t) = C_0 [\alpha \mu v(t) + \alpha z(t)] - \alpha c^* y(t) \quad (44)$$

Вернемся теперь к функционалу (27):

$$I = \min_{s_2} I(s_2, \alpha, c) = \frac{2}{\alpha^2} \int_0^\infty \left[\xi^* (\delta c c^*) \xi + \frac{1}{4} \alpha^4 \xi^* S^* b_2 b_2^* S \xi \right] dt = \frac{2}{\alpha^2} \int_0^\infty \xi^* \bar{Q} \xi dt \quad (45)$$

где

$$\bar{Q} = \delta c c^* + \frac{1}{4} \alpha^4 S^* b_2 b_2^* S,$$

и управление (28) имеет вид:

$$\dot{\xi} = A_4 \xi + CV(0, t) + DV(l, t), \xi(0) = \alpha y_0 \quad (46)$$

где

$$A_4 = A_2 - \frac{1}{2} \alpha^2 b_2 b_2^* S.$$

Тогда

$$\xi(t) = \alpha e^{A_4 t} y_0 + \int_0^t e^{A_4 (t-\tau)} [CV(0, \tau) + DV(l, \tau)] d\tau \quad (47)$$

Подставляя (47) в (45) получим задачу минимизации функционала \bar{I} в пространстве параметров системы Ω :

$$\bar{I} = \frac{2}{\alpha^2} \int_0^\infty [\xi^*(t) + \bar{Q} \xi(t)] dt \rightarrow \min_{\Omega} \quad (48)$$

при условии гурвицевости матрицы A_4 . При этом сходится несобственный интеграл (48).

Следовательно, в нашей задаче мы пришли к проверке гурвицевости матриц (A_3) и (A_4) . Поскольку здесь рассматривается система с распределенными параметрами, то требуется найти алгебраические условия гурвицевости квазиполиномов, а не обычных полиномов.

Дискуссия

Абсолютная устойчивость гибридной системы, описываемой гиперболическими уравнениями в частных производных, устанавливается в виде частотного неравенства. Но проверка частотного условия в пространстве параметров системы является весьма сложной задачей, поэтому для ее решения можно осуществить переход от частотного условия к алгебраическому критерию абсолютной устойчивости применяемого к квазиполиномам.

В данной работе осуществлен переход от частотного условия к алгебраическому критерию абсолютной устойчивости.

Заключение

Для рассматриваемой гибридной системы, описываемой гиперболическими уравнениями в частных производных получен метод квазиоптимального управления нелинейных систем: совокупность уравнений в частных производных гиперболического типа заменены алгебраическими уравнениями при наличии нелинейного оператора $\varphi(u)$ в системе [12]. Таким образом осуществлен переход от частотного условия к алгебраическому критерию абсолютной устойчивости.

Список использованных источников

- [1] Якубович В.А., Абсолютная устойчивость нелинейных систем с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1983, выпуск 6, 53–61
- [2] Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. С.-П., М., Краснодар: Лань, 2003.
- [3] Aisagaliev S.A., Zhunussova Z., Akca H. Construction of a solution for optimal control problem with phase and integral constraints//International Journal of Mathematics and Physics, 2019, 10(1), P. 11–22
- [4] M. R. Liberzon, “Essays on the absolute stability theory”, Autom. Remote Control, 67:10 (2006), 1610–1644
- [5] Jeon P.R. Hong M.S. Braatz R.D., “Compact Neural Network Modeling of Nonlinear Dynamical Systems Via the Standard Nonlinear Operator Form”, Comput. Chem. Eng., 159 (2022), 107674
- [6] Бесекецкий В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. -М.:Наука, 1975, С.418-420.
- [7] Денисова А.В. Применение операторного метода и метода переменных состояния для расчета переходных процессов. Учебное пособие. ИТМО Санкт-Петербург, 2012
- [8] Bakirova E.A., Iskakova N.B., Kadirbayeva Z.M. Numerical implementation for solving the boundary value problem for impulsive integro-differential equations with parameter, KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series, Vol. 119, No. 3 (2023), 19–29. DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS2023v119i3a2>.
- [9] Абгарян К.А. К проблеме устойчивости линейных нестационарных систем // ДАН СССР. - 1989. - Т.308, вып.6.
- [10] Айсагалиев С.А. Анализ и синтез автономных нелинейных систем автоматического управления. – Алма-Ата, Наука КазССР, 1980. -244 с.
- [11] Дальбекова К.С., Гусманова Ф.Р., Беркимбаева С.Б., Исакова А.К. Проблемы устойчивости линейных нестационарных систем на конечном отрезке времени. // Вестник КазНПУ, Серия «Физико-математические науки». –2020.-№4(72). –С.52-58-<https://doi.org/10.51889/2020-3.1728-7901.07>
- [12] Гелиг А.Х. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика, №3, 1965. -С.401-409.

References

- [1] Iakubovich, V. A. (1983). *Absolutnaya ustoichivost' nelineinykh sistem s raspredeleennyimi parametrami* [Absolute stability of nonlinear systems with distributed parameters]. *Avtomatika i Telemekhanika*, (6), 53–61.

- [2] Merkin, D. R. (2003). *Vvedenie v teoriyu ustoychivosti dvizheniya [Introduction to the theory of sustainable motion]*. Krasnodar: Lan. (In Russian).
- [3] Aisagaliev, S. A., Zhunussova, Z., & Akca, H. (2019). Construction of a solution for optimal control problem with phase and integral constraints. *International Journal of Mathematics and Physics*, 10(1), 11–22.
- [4] Liberzon, M. R. (2006). Essays on the absolute stability theory. *Automation and Remote Control*, 67(10), 1610–1644.
- [5] Jeon, P. R., Hong, M. S., & Braatz, R. D. (2022). Compact neural network modeling of nonlinear dynamical systems via the standard nonlinear operator form. *Computers & Chemical Engineering*, 159, 107674. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2022.107674>
- [6] Besekersky, V. A., & Popov, E. P. (1975). *Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya [Theory of automatic control systems]*. Moscow: Nauka, 418–420. (In Russian).
- [7] Denisova, A. B. (2012). *Primenenie operatornogo metoda i metoda peremennykh sostoyanii dlya rascheta perekhodnykh protsessov [Application of the operator method and state variable method for calculating transient processes]*. Saint Petersburg: ITMO University.
- [8] Bakirova, E. A., Iskakova, N. B., & Kadirbayeva, Z. M. (2023). Numerical implementation for solving the boundary value problem for impulsive integro-differential equations with parameter. *KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series*, 119(3), 19–29. <https://doi.org/10.26577/JMMCS2023v119i3a2>
- [9] Abgarian, K. A. (1989). *K probleme ustoichivosti lineinykh nestatsionarnykh sistem [On the problem of stability of linear nonstationary systems]*. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 308(6).
- [10] Aisagaliev, S. A. (1980). *Analiz i sintez avtonomnykh nelineinykh sistem avtomaticheskogo upravleniya [Analysis and synthesis of autonomous nonlinear automatic control systems]*. Alma-Ata: Nauka KazSSR.
- [11] Dal'bekova, K. S., Gusmanova, F. R., Berkimbaeva, S. B., & Iskakova, A. K. (2020). *Problemy ustoichivosti lineinykh nestatsionarnykh sistem na konechnom otrezke vremeni [The problem of stability of linear non-stationary systems on a finite segment of time]*. *Vestnik KazNPU. Seriya "Fiziko-matematicheskie nauki"*, (4)(72), 52–58. <https://doi.org/10.51889/2020-3.1728-7901.07>
- [12] Gelig, A. Kh. (1965). *Absolutnaya ustoichivost' nelineinykh reguliruemykh sistem s raspredelennymi parametrami [Absolute stability of nonlinear controlled systems with distributed parameters]*. *Avtomatika i Telemekhanika*, (3), 401–409.