МРНТИ 27.35.33
УДК 519.87

DOI: https://doi.org/10.51889/2021-1.1728-7901.04

Ш.Д. Махмудова[1], А.Н. Уразгалиева[1]*

[1]Западно-Казахстанский аграрно-технический университет имени Жангир хана,
г. Уральск, Казахстан
∗e-mail: urazgalieva.akmaral@mail.ru

ГЛАВНАЯ ФУНКЦИЯ ГАМИЛЬТОНА И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ В ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

Аннотация

В процессе изучения математики важно показать применение ее результатов в других дисциплинах. При изучении ряда технических дисциплин, а также решения прикладных задач, возможно применение отдельных аспектов теории оптимального управления – что является примером междисциплинарной связи. В частности, в аналитической механике, возможно применение отдельных положений теории дифференциальных игр, а именно условий существования равновесных ситуаций в бескоалиционных дифференциальных играх нескольких лиц. В данной статье приведены исследования необходимых условий существования ситуации равновесия, с использованием некоторых понятий и принципов аналитической механики. Так, определяя действие по Гамильтону, получены необходимые условия в форме уравнений Гамильтона-Якоби. Такая форма необходимых условий в дифференциальных играх N лиц представляет интерес для студентов естественно-технических направлений.

Основная цель статьи – продемонстрировать межпредметную связь, важную составляющую процесса подготовки будущих инженеров для различных отраслей экономики. Она необходима для комплексного освоения материала, чтобы ею могли воспользоваться студенты технических специальностей различных направлений. Предлагаемая работа может быть использована в качестве руководства к изучению данного направления аналитической механики как студентами ВУЗов, так и молодыми учеными.

Ключевые слова: дифференциальная игра; динамические системы; ситуация равновесия; равновесная траектория; функция Гамильтона-Якоби.

Аңдатпа

Ш.Д.Махмудова[1], А.Н.Уразгалиева[1]
[1]Жәңгір хан атындағы Батыс Қазақстан аграрлық-техникалық университеті, Орал қ., Қазақстан

ГАМИЛЬТОННЫҢ НЕГІЗГІ ФУНКЦИЯСЫ ЖӘНЕ ТЕПЕ-ТЕҢДІК ЖАҒДАЙДЫҢ БАР БОЛУЫНЫҢ ГАМИЛТОН-ЯКОБИ ТЕҢДЕУЛЕРІ ТҮРІНДЕГІ ҚАЖЕТТІ ШАРТТАРЫ

Математиканы оқу процесінде оның нәтижелерінің басқа пәндерде қолданылуын көрсету маңызды. Бірқатар техникалық пәндерді оқып-үйрену кезінде, сонымен қатар қолданбалы есептерді шешуде оңтайлы басқару теориясының белгілі бір аспектілерін қолдануға болады – бұл пәнаралық байланыстың мысалы. Әр түрлі қолданылуларда, атап айтқанда, аналитикалық механикада дифференциалды ойындар теориясының кейбір ережелерін, нақты айтқанда, бірнеше ойыншылардың коалициялық емес дифференциалды ойындарындағы тепе-теңдік жағдайларының болу шарттарын қолдануға болады. Бұл мақалада аналитикалық механиканың кейбір тұжырымдамалары мен принциптерін қолдана отырып, тепе-теңдік жағдайының болуы үшін қажетті шарттарды зерттеу қарастырылған. Осылайша, Гамильтон бойынша әрекетті анықтай отырып, Гамильтон-Якоби теңдеулері түрінде қажетті шарттар алынды. N тұлғалардың дифференциалды ойындарындағы қажетті жағдайлардың бұл формасы жаратылыстану және техникалық мамандықтарының студенттерін қызықтырады.

Мақаланың негізгі мақсаты – экономиканың әртүрлі салалары үшін болашақ инженерлерді даярлау процесінің маңызды құрамдас бөлігі болып табылатын пәнаралық байланысты көрсету. Бұл әр түрлі саладағы техникалық мамандықтардың студенттері қолдана алатындай етіп, материалды кешенді түрде меңгеру үшін қажет. Ұсынылып отырған жұмысты университет студенттері де, жас ғалымдар да аналитикалық механиканың осы саласын зерттеуге нұсқау ретінде пайдалануларына болады.

Түйін сөздер: дифференциалды ойын; динамикалық жүйелер; тепе-теңдік жағдайы; тепе-теңдік траекториясы; Гамильтон-Якоби функциясы.

Abstract

THE MAIN HAMILTON FUNCTION AND THE NECESSARY CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF A SITUATION IN THE FORM OF THE HAMILTON-JACOBI EQUATIONS

Makhmudova Sh.D.[1], Urazgalieva A.N.[1]

[1]West Kazakhstan Agrarian Technical University named after Zhangir Khan, Uralsk city, Kazakhstan

Interdisciplinary application of learning outcomes is essential to the field of mathematics, attainable at intersection of math with other subjects – which includes applied tasks When studying a number of technical disciplines, as well as solving applied problems, it is possible to use certain aspects of the theory of optimal control - which is an example of interdisciplinary link. Analytical mechanics, among other disciplines, enables leverage of certain aspects of the theory of differential games, namely, equilibrium conditions in non-coalitional differential games of several players. This article provides studies of the necessary and sufficient conditions for the existence of equilibrium situations, using some concepts of analytical mechanics. In line with Hamilton's definition, necessary conditions were obtained in the form of Hamilton-Jacobi equations. This form of necessary conditions in differential games of N persons is of interest to students of natural and technical fields.

The main goal of the article is to demonstrate interdisciplinary link, an important component of the process of training future engineers for various sectors of the economy. It is necessary for the holistic understanding of the material, so that students of technical specialties of various fields can use it. Proposed work can aid in study of this area of analytical mechanics by university students and young scientists alike.

Keywords: differential play; dynamic systems; equilibrium situation; equilibrium trajectory; Hamilton-Jacobi function.

Введение

Удобными математическими моделями динамических систем, управляемых в условиях конфликта или неопределенности, являются дифференциальные игры нескольких лиц, пока еще далекой от своего окончательного завершения. Изучение вопросов моделирования и исследования конфликтных ситуаций является актуальным.

Получить достаточно общие теоремы существования ситуаций равновесия в программных стратегиях невозможно, а частые классы, имеющие равновесие, практически необозримы. Поэтому большую помощь в решении вопроса о существовании равновесия в конкретной игре, могут оказать необходимые условия существования решения для как можно более общих по постановке задач. Отметим, что необходимые условия более развиты и выполняют двойную роль: или критерия отсутствия решения, или средства для его нахождения [1].

В данной статье приведены некоторые принципы получения необходимых условий существования ситуаций равновесия в дифференциальных играх на основе понятий, аналогичных фундаментальным понятиям аналитической механики.

Рассмотрим дифференциальную игру N лиц, состояние которой характеризуется в каждый момент времени t фазовым вектором $x(t) = \left(x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)\right)$ пространства R^n (R^n - n –мерное евклидово пространство с нормой $\|x\|_{R^n} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$), изменяющимся в соответствии с дифференциальным уравнением (связями) в векторной форме:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t)\right), t \in \left[t_0, t_f\right] \quad (1)$$

При заданных начальных условиях

$$x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

Программная стратегия $u_i(t)$, $t \in \left[t_0, t_f\right]$ i – го участника называется допустимой, если $u_i(t)$ - кусочно-непрерывная функция, а значения стратегии $u_i(t)$ в каждый момент времени t принадлежит некоторому заданному компактному множеству $U_i(t)$ в евклидовом пространстве R^{r_i} (удовлетворяет «геометрическому» ограничению):

$$u_i(t) \in U_i(t), t \in \left[t_0, t_f\right], i = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Определим множество

$$\mathrm{D} = \{u_i(\cdot) \,/\, u_i\,(t) \in U\,_i(t), i = \overline{1, N}, t \in T, u(\cdot) \longmapsto x(\cdot)\}, \quad (4)$$

На множестве D зададим функционал

$$I_i(u(\cdot)) = g_i\left(x(t_f)\right) + \int_{t_0}^{t_f} h_i\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t)\big)dt, \qquad (5)$$

который примем за функцию выигрыша i – го игрока.

Определим множество

$$D_i\big(u^p(\cdot)/u_i(\cdot)\big) = \{u^p(\cdot) \parallel u_i\,(\cdot) \in D\},\ i = \overline{1,N}.$$

Ситуация $u^p(\cdot)$ определяет ситуацию равновесия на множестве D в игре (1) – (5), если справедливо отношение

$$J_i(u^p(\cdot)) = \max_{u_i(\cdot)\in D_i(u^p(\cdot)/u_i\,(\cdot))} J_i\big(u^p(\cdot) \parallel u_i\,(\cdot)\big),\ i = \overline{1,N}. \qquad (6)$$

Условие (6) означает, что ни один из игроков не заинтересован в отклонении от ситуации равновесия $u^p(\cdot)$, если остальные игроки ее придерживаются. (Другими словами, выбирая стратегию, отличную от равновесной, ни один из игроков не может увеличить свой выигрыш при условии, что остальные игроки придерживаются своих равновесных стратегий).

Материалы и методы исследования

Для каждого игрока определим функцию Гамильтона $\mathrm{H_i(t)}$:

$$\mathrm{H_i(t)} = \max_{\mathrm{u_i(t)\in U_i(t)}} \prod\nolimits_{\mathrm{i}}\big(\mathrm{t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t), \psi_i(t)}\big) =$$

$$= \psi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t})\mathrm{f}\left(\mathrm{t, x(t), u(t) \parallel u_i^p(t)}\right) + \mathrm{h_i}\left(\mathrm{t, x(t), u(t) \parallel u_i^p(t)}\right),\ \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{N}}. \qquad (7)$$

Впервые определение функции Гамильтона в форме (1) приведено в работах[2;3;4] для задач оптимального управления.

Отметим, что функция Гамильтона i – го игрока не зависит от программной стратегии $\mathrm{u_i(t)}$ этого игрока и является непрерывной функцией времени. Действительно, во всех точках t отрезка $[\mathrm{t_0, t_f}]$, где непрерывны $\mathrm{u_i(t)}$ функции Понтрягина i - ого игрока (функция Гамильтона) непрерывна в силу непрерывности функции $\mathrm{f}(*)$, $\mathrm{h_i}(*)$, $\psi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t})$.

Из условия (7), очевидно, что

$$\prod\nolimits_{\mathrm{i}}\big(\mathrm{t, x(t), u(t) \parallel u_i(t), \psi_i(t)}\big) \le \prod\nolimits_{\mathrm{i}}\left(\mathrm{t, x(t), u(t) \parallel u_i^p(t), \psi_i(t)}\right) = \mathrm{H_i(t)}, \qquad (8)$$

где

$$\mathrm{u_i(t) \in U_i(t),\ t \in [t_0, t_f],\ i} = \overline{1,\mathrm{N}}.$$

По постановке задачи (1) – (6) функция $\mathrm{u_i(t)}$ имеет конечное число точек разрыва. Пусть τ - одна из них.

В неравенстве (8) перейдем к пределам:

$$\lim_{\mathrm{t}\to\tau-0} \prod\nolimits_{\mathrm{i}}\big(\mathrm{t, x(t), u(t) \parallel u_i(t), \psi_i(t)}\big) \le \lim_{\mathrm{t}\to\tau-0} \prod\nolimits_{\mathrm{i}}\left(\mathrm{t, x(t), u(t) \parallel u_i^p(t), \psi_i(t)}\right) =$$

$$= \lim_{\mathrm{t}\to\tau-0} \mathrm{H_i(t)},\ \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{N}}.$$

Откуда получим

$$\prod\nolimits_{\mathrm{i}}\big(\tau, \mathrm{x}(\tau), \mathrm{u}(\tau) \parallel \mathrm{u_i}(\tau-0), \psi_{\mathrm{i}}(\tau)\big) \le \mathrm{H_i}(\tau-0),\ \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{N}}.$$

Из условия (7) и последнего неравенства имеем:

$$\mathrm{H_i}(\tau) = \max_{\mathrm{u_i}(\tau-0)\in \mathrm{U_i}(\tau)} \prod\nolimits_{\mathrm{i}}\left(\tau, \mathrm{x}(\tau), \mathrm{u}(\tau) \parallel \mathrm{u_i^p}(\tau-0), \psi_{\mathrm{i}}(\tau)\right) \le \mathrm{H_i}(\tau-0).$$

С другой стороны, используя условие (8), имеем:

$$\mathrm{H_i}(\tau-0)=\lim_{t\to\tau-0}\prod\nolimits_i\left(t,x(t),u(t)\parallel u_i^p(t),\psi_i(t)\right)=$$

$$=\prod\nolimits_i\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\parallel u_i^p(\tau-0),\psi_i(\tau)\right)=$$

$$=\lim_{u_i\to u_i(\tau-0)}\prod\nolimits_i\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\parallel u_i(\tau-0),\psi_i(\tau)\right)\le$$

$$\le\prod\nolimits_i\left(\tau,x(\tau),u(\tau)\parallel u_i^p(\tau),\psi_i(\tau)\right)=H_i(\tau),\qquad i=\overline{1,N}.$$

Таким образом, мы получаем следующие неравенства:

$$\mathrm{H_i}(\tau-0)\le \mathrm{H_i}(\tau)\ \text{и}\ \mathrm{H_i}(\tau-0)\ge \mathrm{H_i}(\tau),\ i=\overline{1,N},$$

из которых получим, что

$$\mathrm{H_i}(\tau-0)=\mathrm{H_i}(\tau),\ i=\overline{1,N},$$

т.е. функция $\mathrm{H_i}(\tau)$ - непрерывна слева в точке τ.

Если повторить все рассуждения, начиная с неравенства (8), но при условии, что $t\to\tau+0$, то получим непрерывность функции Гамильтона $\mathrm{H_i}(\tau)$ в точке τ справа.

Итак, мы получим, что если $t\in[t_0,t_f]$ - некоторая точка разрыва стратегии $u_i(t)$ i - ого игрока (при условии, что стратегии остальных игроков фиксированы), то функция $\mathrm{H_i}(t)$ непрерывна в этой точке как слева, так и справа, т.е. $\mathrm{H_i}(t)$ непрерывна во всех точках отрезка $[t_0,t_f]$.

Дальнейшие рассуждения будем проводить в предположении гладкости функции Гамильтона $\mathrm{H_i}(t)$, $i=\overline{1,N}$.

Условия непрерывности функций $\psi_i(t)$ и $\mathrm{H_i}(t)$ в точках разрыва программных стратегий игроков, т.е. в точках излома $\dot{x}$ носят название условий Вейерштрасса-Эрдмана [5] и имеют вид:

$$\mathrm{H_i}(\tau+0)=\mathrm{H_i}(\tau-0),\ i=\overline{1,N},$$

$$\psi_i(\tau+0)=\psi_i(\tau-0),\ i=\overline{1,N}.$$

Вывод этих условий можно провести по схеме аналогичной [5].

Теперь для каждого игрока, имея функцию Гамильтона (7), рассмотрим функционал вида

$$\mathrm{S_i}\left(x(\cdot),u(\cdot)/u_i(\cdot),\psi_i(\cdot)\right)=g_i\left(x(t_f)\right)+\int_{t_0}^{t_f}\left[\mathrm{H_i}\left(t,x(t),u(t)/u_i(t),\psi_i(t)\right)-\psi_i(t)\dot{x}(t)\right]dt,\ i=\overline{1,N}\quad(9)$$

Последний отличается от функционала $\mathrm{S}_i^{u_i(\cdot)}(*)$ из

$$\mathrm{S}_i^{u_i(\cdot)}\left(x(\cdot),u_1(\cdot),\dots,u_N(\cdot),\psi_i(\cdot)\right)=g_i\left(x(t_f)\right)+$$
$$+\int_{t_0}^{t_f}\left[\psi_i(t)\left(f\left(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\right)-\dot{x}(t)\right)+h_i\left(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\right)\right]dt,\ i=\overline{1,N}\qquad(10)$$

тем, что в определении (9) выполнена операция максимизации по допустимому управлению $u_i(t)$ i- го игрока подынтегральной функции. Функционал $\mathrm{S_i}(*)$ из (9) будем называть действием по Гамильтону [3] i - го игрока.

Из условий $\Pi_i\left(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t),\psi_i(t)\right)=h_i\left(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\right)+$
$$+\psi_i(t)f\left(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\right),\ i=\overline{1,N};\qquad(11)$$

$$\prod\nolimits_i\left(t,x^p(t),u^p(t),\psi_i(t)\right)=\max_{u_i(t)\in U_i(t)}\prod\nolimits_i\left(t,x^p(t),u^p(t)\parallel u_i(t),\psi_i(t)\right)$$

и (7) следует, что на ситуации равновесия $u^p(\cdot)$ и соответствующей равновесной траектории $x^p(\cdot)$ существуют такие функции $\psi_i(\cdot)$, $i=\overline{1,N}$ для которых имеет место соотношение

$$S_i^{u_i(\cdot)}\left(u^p(\cdot), x^p(\cdot), \psi_i(\cdot)\right) = S_i\left(x^p(\cdot), u^p(\cdot)/\, u_i(\cdot), \psi_i(\cdot)\right), i = \overline{1, N}.$$

С учетом последнего равенства вариация действия $S_i(*)$ из (9) в ситуации равновесия по фазовой переменной $x(t)$ и вариация по сопряженным переменным $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, N}$ приводят к системе уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H_i\left(t, x^p(t), u^p(t) \| u_i(t), \psi_i(t)\right)}{\partial x}, i = \overline{1, N} \\ \dot{x}(t) = -\frac{\partial H_i\left(t, x^p(t), u^p(t) \| u_i(t), \psi_i(t)\right)}{\partial \psi_i}, i = \overline{1, N} \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $\frac{\partial H_i(*)}{\partial x} = \frac{\partial H_i}{\partial x^{(1)}}, \dots, \frac{\partial H_i}{\partial x^{(n)}}, \frac{\partial H_i(*)}{\partial \psi} = \frac{\partial H_i}{\partial \psi^{(1)}}, \dots, \frac{\partial H_i}{\partial \psi^{(n)}}.$

Система уравнений (12) не содержит управления *i*-го игрока $u_i(t)$ и является аналогом Гамильтоновых систем в механике [6;7].

Введем обозначение

$$L_i\left(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)/u_i(t), \psi_i(t)\right) = H_i\left(t, x(t), u(t)/u_i(t), \psi_i(t)\right) - \psi_i(t)\dot{x}(t), i = \overline{1, N}. \tag{13}$$

Здесь функция $L_i(*)$ – аналог функции Лагранжа (лагранжиан) *i*-го игрока, которая фигурирует в известных принципах аналитической механики [6;7]. Из определения (13) функции Лагранжа, определим функцию Гамильтона в виде:

$$H_i(*) = L_i(*) + \psi_i(t)\dot{x}(t), i = \overline{1, N},$$

которую в аналитической механике называют внутренней энергией [6;7;8] i-ой подсистемы (i-го игрока).

Если подинтегральное выражение в (10) обозначить через

$$L_i^{u_i(\cdot)}\left(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), \psi_i(t)\right) = H_i\left(t, x(t), u(t)\right) + \psi_i(t)\left(f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)\right), i = \overline{1, N},$$

то из (11) и (7) следует, что функции $L_i(*)$ из (13) можно представить в виде:

$$L_i(*) = \max_{u_i(t) \in U_i(t)} L_i^{u_i(\cdot)}(*), i = \overline{1, N}.$$

Иногда, например, при выводе уравнений Эйлера-Лагранжа, в выражениях для $L_i(*)$, $L_i^{u_i(\cdot)}(*)$ функция $\psi_i(t)$ фиксирована и в этом случае, как и в механике [6;7;8], будем считать функции $L_i(*)$, $L_i^{u_i(\cdot)}(*)$ зависящими только от $\left(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)/u_i(t)\right)$ и $\left(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)\right)$ соответственно.

Из определения $L_i(*)$ (13) имеем, что

$$\frac{\partial L_i(*)}{\partial x} = \frac{\partial H_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial L_i(*)}{\partial x} = -\psi_i(t)\,, i = \overline{1, N},$$

$$\frac{\partial L_i(*)}{\partial x} = \left(\frac{\partial L_i}{\partial x^{(1)}}, \dots, \frac{\partial L_i}{\partial x^{(n)}}\right), \quad \frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L_i}{\partial \dot{x}^{(1)}}, \dots, \frac{\partial L_i}{\partial \dot{x}^{(n)}}.$$

Откуда из (12) следует, что для ситуации равновесия и соответствующей равновесной траектории имеет место система управлений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_i\left(t, x^p(t), \dot{x}^p(t), u^p(t)/u_i(t)\right)}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_i\left(t, x^p(t), \dot{x}^p(t), u^p(t)/u_i(t)\right)}{\partial x} = 0, i = \overline{1, N} \tag{14}$$

т.е. на ситуации равновесия и соответствующей равновесной траектории для каждого игрока справедливы уравнения Эйлера-Лагранжа (в точках разрыва управлений (излома $\frac{\partial L_i(*)}{\partial \dot{x}}$) понимаются производные справа, производные слева также существуют).

В точках τ, $k=\overline{1,s}$ излома экстремалей функции $L_i(*)$ удовлетворяют условиям Вейерштрасса-Эрдмана[5], которые принимают вид:

$$\left.\frac{\partial L_i(*)}{\partial\dot{x}}\right|_{t=\tau_k-0}-\left.\frac{\partial L_i(*)}{\partial\dot{x}}\right|_{t=\tau_k+0}=0,\ k=\overline{1,s},\tag{15}$$

$$\left(L_i(*)-\frac{\partial L_i(*)}{\partial\dot{x}}\dot{x}\Big|\right)_{t=\tau_k-0}-\left(L_i(*)-\frac{\partial L_i(*)}{\partial\dot{x}}\dot{x}\right)\Big|_{t=\tau_k+0}=0,\ k=\overline{1,s}\tag{16}$$

и которым можно дать геометрическую интерпретацию следующим образом. Если фиксировать переменные t и x и откладывать на одной из координатных осей $\dot{x}$, а на другой – значение функции $L_i(*)$, то мы получим некоторую кривую, изображающую $L_i(*)$ как функцию от $\dot{x}$. Тогда условие (15) означает, что касательные к этой кривой в точках $\dot{x}(\tau_k-0)$ и $\dot{x}(\tau_k+0)$, $k=\overline{1,s}$ параллельны между собой. Условие (16) перепишем в виде:

$$L_i(*)|_{\tau_k-0}-L_i(*)|_{\tau_k+0}=\left.\frac{\partial L_i(*)}{\partial\dot{x}}\right|_{\tau_k+0}^{\tau_k-0},\ k=\overline{1,s},$$

которое показывает, что эти касательные в точках $\dot{x}(\tau_k-0)$ и $\dot{x}(\tau_k+0)$, $k=\overline{1,s}$ не только параллельны, но даже совпадают.

Для канонических переменных [8;9]

$$\psi_i(t)=-\frac{\partial L_i(*)}{\partial\dot{x}},\quad H_i(*)=L_i(*)-\frac{\partial L_i(*)}{\partial\dot{x}}\dot{x},\ i=\overline{1,N}.$$

Условия Вейерштрасса-Эрдмана просто означают, что канонические переменные непрерывны в точках излома экстремалей.

Определим на ситуации равновесия $\left(u_1(\cdot),\dots,u_i(\cdot),\dots,u_N(\cdot)\right)$ вдоль соответствующей равновесной траектории $x(\cdot)$ функцию действия $S_i(t,x)$, $(i=\overline{1,N})$, зависящую от текущего значения фазовой переменной $x=x(t)$, выбранного в качестве начального состояния системы, соответствующего некоторому моменту времени *t* [10;11]:

$$S_i(t,x)=g_i\left(x(t_f)\right)+\int_t^{t_f}\max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(\tau)}}\left[h_i\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)+\psi_i(\tau)\left(f\big(\tau,x(\tau),u(\tau)\big)-\dot{x}(\tau)\right)\right]d\tau\ ,\ i=\overline{1,N}\tag{17}$$

Запишем выражение (17) через лагранжиан $L_i(*)$ (13).

$$S_i(t,x)=g_i\left(x(t_f)\right)+\int_t^{t_f}L_i\big(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau),u(\tau)/u_i(\tau)\big)\,d\tau,\ i=\overline{1,N}.\tag{18}$$

Отметим, что в аналитической механике функции (8) характеризуют движение системы по действительным траекториям [6], а в нашей задаче – по равновесным траекториям. Для наглядности будем проводить дальнейшие рассуждения, считая $S_i(t,x)$ из (18) гладкой функцией. Заметим, что использование в точках её излома условий Вейерштрасса – Эрдмана [5, 13] позволяет распространить их на общий случай.

Покажем, что функция $S_i(t,x)$ из (18) является главной функцией Гамильтона [10;11] *i*-го участника, $(i=\overline{1,N})$, т.е. удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби в частных производных. Действительно, вариация функции (18) по фазовой переменной в момент времени *t* имеет вид:

$$\delta_x S_i(t,x)=\frac{\partial g_i\left(x(t_f)\right)}{\partial x}\delta x(t_f)-\int_{t_f}^{t}\left(\frac{\partial L_i(*)}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L_i(*)}{\partial\dot{x}}\right)\delta x d\tau-\frac{\partial L_i(*)}{\partial\dot{x}}\delta x(t)+\frac{\partial L_i(*)}{\partial\dot{x}}\delta x(t_f).\tag{19}$$

Здесь символ (*) обозначает аргумент функции (функционала, теоретико-множественного отображения). Аналогично [2, 12], введем обозначение:

$$\psi_i(t)=\frac{\partial L_i(*)}{\partial\dot{x}},\ t\epsilon[t_0,t_f),\ i=\overline{1,N}.\tag{20}$$

Функции $S_i(t,x)$ из (18) определены на ситуациях равновесия вдоль равновесных траекторий, поэтому для каждого участника справедливы уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_i\big(t,x^p(t),\dot{x}^p(t),u^p(t)/u_i(t)\big)}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L_i\big(t,x^p(t),\dot{x}^p(t),u^p(t)/u_i(t)\big)}{\partial x}=0,\ i=\overline{1,N}$$

и в (19) интегральный член обращается в нуль. С учетом обозначения (20) соотношение (19) перейдет в следующее:

$$\delta_x S_i(t,x)=\left[\frac{\partial g_i\big(x(t_f)\big)}{\partial x}-\psi_i(t_f)\right]\delta x(t_f)+\psi_i(t)\delta x(t),\ i=\overline{1,N}. \tag{21}$$

Выбирая сопряженные переменные $\psi_i(t),\ i=\overline{1,N}$ таким образом, чтобы любые малые вариации равновесных значений, освобожденных от связей *x* «не улучшали» бы функционала

$$S_i^{u_i(\cdot)}(*)=g_i\left(x(t_f)\right)-\psi_i(t)x(t)\Big|_{t_0}^{t_f}+$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\big[\dot{\psi}_i(t)x(t)+h_i\big(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big)+\psi_i(t)f\big(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big)\big]dt,\ i=\overline{1,N},$$

граничные условия для сопряженной переменной $\psi_i(t)$ i-го игрока получаются:

$$\psi_i(t_f)=-\frac{\partial g_i\big(x(t_f)\big)}{\partial x},\ i=\overline{1,N}. \tag{22}$$

Из (21) и (22) соотношения получаем:

$$\psi_i(t)=\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x},\ t\epsilon[t_0,t_f),\ i=\overline{1,N}. \tag{23}$$

Из определения (18) полная производная по времени функции $S_i(t,x)$:

$$\frac{dS_i(t,x)}{dt}=-L_i(*),\ i=\overline{1,N}.$$

С другой стороны, рассматривая (18) как функцию переменных $x=x(t)$ и t, используя соотношение (23), имеем:

$$\frac{dS_i(t,x)}{dt}=\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial t}+\psi_i(t)\dot{x}(t)\ ,\ t\in T,\ i=\overline{1,N}.$$

Окончательно получим

$$\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial t}+\psi_i(t)\dot{x}(t)+L_i(*)=0,\ i=\overline{1,N}. \tag{24}$$

Откуда с учетом (23) и

$$L_i\big(t,x(t),\dot{x}(t),u(t)/u_i(t),\psi_i(t)\big)=H_i\big(t,x(t),u(t)/u_i(t),\psi_i(t)\big)-\psi_i(t)\dot{x}(t),\ i=\overline{1,N}$$

следует

$$\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial t}+H_i(*)=0,\ i=\overline{1,N}.$$

Используя определение функции Гамильтона $H_i(*)$ (7) представим последнее уравнение в виде:

$$\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial t}+\max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(\tau)}}\prod\nolimits_i\big(t,x(t),u(t)//u_i(t),\psi_i(t)\big)=0,\ i=\overline{1,N},$$

где функции Понтрягина определены в виде:

$$\prod\nolimits_i\big(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t),\psi_i(t)\big)=h_i\big(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big)+\psi_i(t)f\big(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big),\ i=\overline{1,N}.$$

С учетом (23) из (24) окончательно получим уравнение

$$\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial t}+\max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(\tau)}}\left[\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial t}f\big(t,x(t),u(t)//u_i(t)\big)+h_i\big(t,x(t),u(t)//u_i(t)\big)\right]=0, \quad (25)$$

которое является аналогом уравнения Гамильтона-Якоби для i-го участника ($i=\overline{1,N}$).

Граничное условие для $S_i(t,x)$ следует при $t=t_f$ из (18):

$$S_i\left(t_f,x(t_f)\right)=g_i\left(x(t_f)\right), i=\overline{1,N}. \quad (26)$$

Результаты исследования

Таким образом, при сделанных выше предположениях для игры (1) - (5) имеет место следующая теорема.

Теорема 1.

1^0. В дифференциальной игре (1) - (5) при всех $t\in T$ равновесная траектория $u^p(\cdot)=\left(u_1^p(\cdot),\dots,u_N^p(\cdot)\right)$ и соответствующая равновесная траектория $x^p(\cdot)$ удовлетворяют условию принципа максимума Понтрягина для i-го участника относительно $\psi_i(\cdot)$:

$$\prod\nolimits_i\big(t,x^p(t),u^p(t),\psi_i(t)\big)=\max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(\tau)}}\prod\nolimits_i\big(t,x^p(t),u^p(t)//u_i(t),\psi_i(t)\big)$$

где

$$\psi_i(t)=\frac{\partial S_i\big(t,x^p(t)\big)}{\partial \dot{x}}, t\epsilon\big[t_0,t_f\big), i=\overline{1,N},$$

$$\psi_i\big(t_f\big)=\frac{\partial S_i\big(x^p(t_f)\big)}{\partial \dot{x}},\ i=\overline{1,N},$$

Причем

$$\frac{\partial S_i\big(t,x^p(t)\big)}{\partial \dot{x}}=-\prod\nolimits_i\big(t,x^p(t),u^p(t),\psi_i(t)\big)=\max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(\tau)}}\prod\nolimits_i\big(t,x^p(t),u^p(t)//u_i(t),\psi_i(t)\big),\ t\in T, i=\overline{1,N}.$$

2^0. Функция $S_i(t,x)$ из (18) удовлетворяет дифференциальному уравнению Гамильтона-Якоби в частных производных (25) с граничным условием (26).

Замечание. Используя необходимые и достаточные условия, полученные в данном параграфе, можно строить методы нахождения ситуации равновесия в бескоалиционных дифференциальных играх.

Пусть функции $u_i^p=\varphi_i\left(x,x(t),\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x},u^p(t)/u_i(t)\right), i=\overline{1,N},$

Здесь $\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x}=\left(\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x^{(1)}},\dots,\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x^{(n)}}\right)$, найдены из условий

$$\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x}f\left(t,x(t),u^p(t)//\varphi_i\left(t,x(t),\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x},u^p(t)/u_i(t)\right)\right)+$$

$$+h_i\left(t,x(t),u^p(t)//\varphi_i\left(t,x(t),\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x},u^p(t)/u_i(t)\right)\right)=$$

$$=\max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(\tau)}}\left[\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial t}f\big(t,x(t),u^p(t)//u_i(t)\big)+h_i\big(t,x(t),u^p(t)//u_i(t)\big)\right].$$

Система $u_i^p=\varphi_i\left(x,x(t),\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x},u^p(t)/u_i(t)\right),\ i=\overline{1,N}$ представляет собой систему N уравнений относительно равновесных стратегий игроков $u_i^p(\cdot), i=\overline{1,N}$. Если решение этой системы в классе допустимых стратегий существует, то разрешая ее получим:

$$u_i^p(t) = \chi_i\left(x, x(t), \frac{\partial S_1(t,x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_N(t,x)}{\partial x}^p\right),\ i = \overline{1, N} \tag{27}$$

Подставляя найденное значение равновесной стратегии в уравнение (25) получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно функции $S_i(t,x)$, $i = \overline{1, N}$:

$$\frac{\partial S_i(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial S_i(t,x)}{\partial x} f\left(t, x(t), \chi_i\left(t, x(t), \frac{\partial S_1(t,x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_N(t,x)}{\partial x}\right)\right) +$$

$$+h_i\left(t, x(t), \chi_i\left(t, x(t), \frac{\partial S_1(t,x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial S_N(t,x)}{\partial x}\right)\right) = 0,\ i = \overline{1, N}.$$

Если существует N различных функций $S_i(t,x)$, удовлетворяющих системе (27) при граничных условиях (26), то решение игры (1) - (5) полностью определено. Действительно, подставляя полученные функции $S_i(t,x)$, $i = \overline{1, N}$ в равенство (27) получим равновесные стратегии вида:

$$u_i^p(t) = u_i^p(t,x),\ i = \overline{1, N}$$

Как функции координат и времени. Пусть стратегии $u_i^p(t) = u_i^p(t,x)$, $i = \overline{1, N}$ порождают единственную траекторию $x^p(t)$ системы (1) при начальном условии (2), определенную на отрезке $[t_0, t_f]$, вдоль которой функции $u_i^p(t) = u_i^p(t, x^p(t))$, $i = \overline{1, N}$ – кусочно-непрерывны. Тогда стратегия $u_i^p(t) = u_i^p$, $i = \overline{1, N}$ является ситуацией равновесия в игре (1) - (5).

Заключение

Результаты статьи позволяют сделать вывод о том, что методы аналитической механики являются общими, едиными для изучения движения и равновесия, применимы для различных материальных систем [14, 15]. В частности, действие принципов аналитической механики позволили выразить условия существования ситуации равновесия в бескоалиционной дифференциальной игре лиц через уравнения движения в форме Гамильтона - Якоби.

Список использованной литературы:

1 Розоноэр Л.И. Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход)// Автоматика и телемеханика. - 1973. - №№5,6,8. - С. 115-132, 65-79, 82-103.

2 Иванилов Ю.П. Применимость методов аналитической механики в оптимальном управлении// Изв.АН СССР. Техническая кибернетика. - 1983. - №2. С. 61-71.

3 Иванилов Ю.П. Принцип освобождения от связей в форме штрафных функций/ Ю.П. Иванилов// Изв.АН СССР. Техническая кибернетика. - 1985. - .№3. – С. 170-178.

4 Иванилов Ю.П. Главная функция Гамильтона и условия оптимальности/ Ю.П. Иванилов// Автоматика и телемеханика. - 1988. - №5. – С. 51-61.

5 Гельфанд И.М. Вариационное исчисление/ И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. - М.: Физматгиз, 1961. - 228 с.

6 Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики в 2-х т. Т.2./ Н.Н. Бухгольц. - М.: Лань, 2009. - 400 с.

7 Голдстейн Г. Классическая механика/ Г.Голдстейн. – М.: Наука, 1975. - 408 с.

8 Воробьев Н.Н. Теория игр. – М.: Наука, 1985. - 408 с.

9 Жуковский В.И. О дифференциальных играх нескольких лиц с ненулевой суммой // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1971. № 3. С. 3 – 13.

10 Разумихин Б.С. Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике. – М.: Наука, 1975. – 304 с.

11 Мкртычев О.В. Теоретическая механика: Уч. / О.В. Мкртычев. - М.: Вузовский учебник, 2019. - 320 с.

12 Гордин В.А. «Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решить». – М.: Учебники Высшей школы экономики, 2016. – 235 с.

13 Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление / М.И. Зеликин. - М.: Ленанд, 2017. - 160 с.

14 Ландау, Л.Д. Теоретическая физика в 10 томах. т.1. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. - М.: Физматлит, 2018. - 224 с.

15 Бертяев В.Д. Теоретическая и аналитическая механика. Учебно-исследовательская работа студентов: Учебное пособие / В.Д. Бертяев, В.С. Ручинский. - СПб.: Лань, 2019. - 424 с.

References

1 Rozonoer L.I. (1973) Obmen i raspredelenie resursov (obobshchennyj termodinamicheskij podhod)[Exchange and distribution of resources (generalized thermodynamic approach)]. Avtomatika i telemekhanika. №5, 6, 8. 115-132, 65-79, 82-103. (in Russ)

2 Ivanilov Yu.P. (1983) Primenimost' metodov analiticheskoj mekhaniki v optimal'nom upravlenii [Applicability of methods of analytical mechanics in optimal control]. Izv.AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. №2, 61-71. (in Russ)

3 Ivanilov Yu.P. (1985) Princip osvobozhdeniya ot svyazej v forme shtrafnyh funkcij/ YU.P. Ivanilov [The principle of release from bonds in the form of penalty functions]. Izv.AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. №3, 170-178. (in Russ)

4 Ivanilov Yu.P. (1988) Glavnaya funkciya Gamil'tona i usloviya optimal'nosti [Hamilton's main function and optimality conditions]. Avtomatika i telemekhanika. №5. 51-61. (in Russ)

5 Gel'fand I.M. (1961) Variacionnoe ischislenie [Calculus of variations]. M.: Fizmatgiz, 228. (in Russ)

6 Buhgol'c N.N. (2009) Osnovnoj kurs teoreticheskoj mekhaniki v 2-h t. [The main course of theoretical mechanics in 2 volumes]. M.: Lan',. T.2, 400. (in Russ)

7 Goldstejn G. (1975) Klassicheskaya mekhanika [Classical mechanics]. M.: Nauka, 408. (in Russ)

8 Vorob'ev N.N. (1985) Teoriya igr [Game theory]. M.: Nauka, 408. (in Russ)

9 Zhukovskij V.I. (1971) O differencial'nyh igrah neskol'kih lic s nenulevoj summoj [On differential games of several persons with nonzero sum]. Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. № 3. 3 – 13. (in Russ)

10 Razumihin B.S. (1975) Fizicheskie modeli i metody teorii ravnovesiya v programmirovanii i ekonomike [Physical models and methods of equilibrium theory in programming and economics]. M.: Nauka,. 304. (in Russ)

11 Mkrtychev O.V. (2019) Teoreticheskaya mekhanika [Theoretical Mechanics]. M.: Vuzovskij uchebnik,. 320. (in Russ)

12 Gordin V.A. (2016) «Differencial'nye i raznostnye uravneniya. Kakie yavleniya oni opisyvayut i kak ih reshit'» [Differential and difference equations. What phenomena do they describe and how to solve them]. M.: Uchebniki Vysshej shkoly ekonomiki. 235. (in Russ)

13 Zelikin M.I. (2017) Optimal'noe upravlenie i variacionnoe ischislenie [Optimal control and calculus of variations]. M.: Lenand. 160. (in Russ)

14 Landau L.D. (2018) Teoreticheskaya fizika v 10 tomah. t.1. Mekhanika [Theoretical physics in 10 volumes. vol. 1. Mechanics]. M.: Fizmatlit. 224. (in Russ)

15 Bertyaev V.D. (2019) Teoreticheskaya i analiticheskaya mekhanika. Uchebno-issledovatel'skaya rabota studentov: Uchebnoe posobie [Theoretical and analytical mechanics. Educational and research work of students]. SPb.: Lan'. 424. (in Russ)