МРНТИ 27.01.45
УДК 372.851

https://doi.org/10.51889/2021-1.1728-7901.06

Д.М. Нурбаева[1], Ж.М. Нурмухамедова[1], Б. Ержeнбек[1], Д.М. Насирова[1]*

[1]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан
**e-mail: nur_dilara@mail.ru*

О МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ

Аннотация

Статья посвящена решению текстовых задач в курсе алгебры. В последнее время наблюдается, что решение текстовых задач вызывает затруднения не только у школьников, но и встречаются такие случаи, когда решение таких задач вызывают проблемы у практикующих учителей математики. Поэтому в статье мы рассмотрели несколько типов задач, к которым были предложены решения, что считаем полезным материалом для подготовки действующих учителей к урокам алгебры, когда изучаются темы решения текстовых задач с помощью уравнений и их систем. Также чтение данной статьи рекомендуется студентам – будущим учителям математики до прохождения или во время прохождения ими педагогической практики. В статье нет решений уравнений и их систем, так как целью данной статьи является научить составлять уравнения и системы уравнений для решения текстовых задач, а не решать их. Для оформления условий задач используются как чертежи, таблицы, так и просто написание кратких условий.

Ключевые слова: текстовые задачи в курсе алгебры, обучение решению задач, составление уравнения и системы уравнений для решения текстовых задач.

Аңдатпа

Д.М. Нурбаева[1], Ж.М. Нурмухамедова[1], Б. Ержeнбек[1], Д.М. Насирова[1]
[1]Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

АЛГЕБРА КУРСЫНДА МӘТІНДІК ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ ТУРАЛЫ

Мақала алгебра курсындағы мәтіндік есептерді шығаруға арналған. Қазіргі таңда мәтіндік есептерді шығару тек мектеп оқушыларына ғана емес, мұндай есептерді шығару сонымен қатар практикада жүрген математика пәнінің мұғалімдеріне де қиындық тудыратын кейбір жағдайлар кездеседі. Сондықтан мақалада біз шығарылу жолдары ұсынылған, есептердің бірнеше типтерін қарастырдық, бұл алгебра сабағында мұғалімдерге теңдеулер мен теңдеулер жүйесі арқылы мәтіндік есептерді шығару тақырыптарын оқытуда, дайындалуда пайдалы материал болып табылады. Сондай ақ, бұл мақаланы болашақ математика пәні мұғалімдеріне- студенттерге педагогикалық практикадан өтер алдында немесе өту кезінде оқуға ұсынылады. Мақалада теңдеулер мен олардың жүйелерінің шешімдері берілмеді, себебі бұл мақаланың мақсаты мәтіндік есептерді шығаруда осы теңдеулер мен теңдеулер жүйесін құруды үйрету болып табылады. Есептің шартын рәсімдеу үшін сызбалар, кестелер және де қысқаша есептің шартын жазу қолданылған.

Түйін сөздер: алгебра курсында мәтіндік есептер, есептер шешуді оқыту, мәтіндік есептер шығарудың теңдеуі мен жүйесін құру.

Abstract

D.M. Nurbayeva[1], Zh.M. Nurmukhamedova[1], B. Yerzhenbek[1], D.M. Nassirova[1]
[1]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

ABOUT TEACHING METHODS FOR SOLVING TEXT TASKS IN THE COURSE OF ALGEBRA

The article is devoted to the solution of text tasks in the course of algebra. Recently, it has been observed that the solution of text tasks causes difficulties not only for schoolchildren, but also there are cases when the solution of such problems causes problems for practicing mathematics teachers. Therefore, in the article, we have considered several types of tasks for which solutions have been proposed, which we consider useful material for preparing existing teachers for algebra lessons, when studying the topics of solving text tasks using equations and their systems. Also, reading this article is recommended for students-future teachers of mathematics before or during their teaching practice. The article does not contain solutions to equations and their systems, since the purpose of this article is to teach how to make equations and systems of equations for solving text tasks, and not to solve them. For the design of the task conditions, both drawings, tables, and just writing short conditions are used.

Keywords: text tasks in the course of algebra, teaching to solve the tasks, drawing up an equation and a system of equations for solving text tasks.

Всем известен тот факт, что математике обучают через задачи. Каждый учитель, работая в школе любого типа (общеобразовательная, специализированная, лицей, гимназия и др.) должен уметь решать задачи разного уровня сложности, причем разными методами их решения. Текстовые задачи в курсе алгебры занимают особое место. Решение их отличается созданием математической модели условия задачи. Конечные цели обучения решению задач в математике сводятся к овладению учащимися методики решения определенной системы задач [1].

Текстовые задачи формируют математическую грамотность учащихся, которая необходима современному человеку в повседневной жизни. Практическое значение таких задач в математике заключается в умении применять учащимися полученные навыки в своей дальнейшей практической деятельности, а именно в продолжении учебы, работе и т.п. [2]. Задачи являются одним из основных средств для развития логического мышления и пространственного воображения учащихся.

Процесс решения задачи – это переход от условия задачи к ответу на ее вопрос. Процесс решения может осуществляться как с осознанием каждого шага, так и свернуто, интуитивно. Конечно, при обучении будущих учителей математики, при изучении дисциплин, где рассматриваются приемы обучения решению школьных текстовых задач, необходимо пошагово рассматривать ход их решения.

Каждая текстовая задача представляет собой словесную модель процесса, явления, ситуации. Как и в любой модели, в текстовой задаче описывается не все событие или явление, а лишь его количественные или функциональные характеристики. В задаче можно выделить:

1) Числовые значения величин, которые называются данными;
2) Некоторую систему функциональных зависимостей в неявной форме, взаимно связывающих искомое с данными и данные между собой;
3) Требование или вопрос, на который надо найти ответ.

Числовые значения величин и существующие между ними зависимости, т.е. количественные и качественные характеристики объектов задачи и отношений между ними, называют условием задачи [3].

Предлагаем рассмотреть несколько текстовых задач разных типов, которые предлагаются учащимся 9 класса общеобразовательной школы, где мы предложим подробные решения. Задачи были выбраны из сборника задач для общеобразовательной школы, которые решаются большинством школьников при прохождении соответствующей темы.

Задача 1. Имеются два разных сплава серебра. Первый, массой 12 кг, содержит 75% серебра, а второй, массой 10 кг, содержит 20% серебра. Какой процент серебра содержится в сплаве, полученном при их сплавлении? [4]

Решение. Во-первых необходимо записать условие задачи.

$$\left.\begin{array}{l}\text{I сплав – 12 кг – 75\% серебра}\\ \text{II сплав – 10 кг – 20\% серебра}\end{array}\right\} \quad ?$$

1) Посчитаем массу серебра в I и II сплавах. Для этого:

$12 \cdot 0{,}75 = 9$ (кг) – серебра в I сплаве,

$10 \cdot 0{,}2 = 2$ (кг) – серебра во II сплаве;

2) Посчитаем массу серебра в обоих сплавах:

9+2 = 11 (кг)

3) Теперь посчитаем массу сплава, который получили в результате смешивания двух данных сплава:

10+12 = 22 (кг) – масса полученного сплава;

4) Найдем процентное содержание серебра в полученном сплаве:

$\frac{11}{22} \cdot 100\% = 50\%$ – ответ.

Первая задача является стандартной на нахождение процентного содержания вещества в составе. В следующей задаче даны отношения элементов состава, где необходимо посчитать массы сплавов.

Задача 2. В двух различных сплавах медь и цинк находятся соответственно в отношении 1:2 и 2:3 (по массе). Сколько килограммов каждого сплава нужно взять, чтобы после совместной переплавки получить 38 кг нового сплава, в котором медь и цинк находятся в отношении 7:12? [4]

Решение. Оформим данные условия задачи в таблицу (Таблица 1), где неизвестные массы данных сплавов обозначены x кг и y кг.

Таблица 1. Условие задачи 2

I сплав		*II сплав*		*Новый сплав*	
x кг		*y кг*		*38 кг*	
Cu	*Zn*	*Cu*	*Zn*	*Cu*	*Zn*
1	*2*	*2*	*3*	*7*	*12*

Итак, во-первых, проанализируем известную массу нового сплава и отношение в нем меди и цинка. Если сплав состоит только из двух веществ и нам известно их отношение 7:12, то получается, что сплав составляет 19 частей, масса которых 38 кг. Значит масса одной части в нем: 38:19 = 2 кг. Отсюда следует, что масса меди в сплаве: $7\cdot 2=14$ (кг), а масса цинка: $12\cdot 2=24$(кг).

Теперь, зная, что масса I сплава x кг и он составляет 3 части, получаем, что масса меди в нем – $\frac{1}{3}x$ кг, а масса цинка – $\frac{2}{3}x$ кг. Аналогично, во II сплаве масса меди– $\frac{2}{5}y$ кг, масса цинка – $\frac{3}{5}y$ кг. Теперь, используя новые данные, мы можем составить систему уравнений:

$\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y=14\\ \frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y=24\end{cases}$, решая которую вычисляем $\underline{x = 18 \text{ кг}, y = 20 \text{ кг}}$.

Задача 3. Имеются два сплава цинка и железа. Сначала взяли 117 кг первого и 468 кг второго сплавов, переплавили и получили новый сплав с 10% содержанием цинка. Затем взяли 186 кг первого и 279 кг второго – получился сплав с 91% содержанием железа. Найдите процентное содержание цинка в первоначальных сплавах. [4]

Решение. В условии задачи дано процентное содержание его составляющих в конечных сплавах, поэтому нам удобно использовать данные только одного элемента в составе. Возьмем, например, цинк, тогда в сплаве, полученном во второй раз, цинк составляет 9%. Введем обозначения: x – процентное содержание цинка в I сплаве, y – во II сплаве. Все полученные данные занесем в следующую таблицу (Таблица 2).

Таблица 2. Данные условия задачи 3

I сплав		*II сплав*		*Новый сплав*	
117 кг		*468 кг*		*117+468=585 кг*	
Zn – x %	*Fe*	*Zn – y %*	*Fe*	*Zn – 10%*	*Fe – 90%*
186 кг		*279 кг*		*186+279=465 кг*	
Zn – x %	*Fe*	*Zn – y %*	*Fe*	*Zn – 9%*	*Fe – 91%*

Так как процентное содержание цинка в I сплаве – x%, значит масса его равна 1,17x кг, также во II сплаве – 4,68y кг. Аналогично во втором случае: в I сплаве – 1,86x кг, во II сплаве – 2,79y кг. В новых же сплавах можно посчитать массы цинка: если в 585 кг сплава содержится 10 % цинка, то масса его – $585\cdot 0{,}1=58{,}5$ кг, во втором же составе: $465\cdot 0{,}09=41{,}85$ кг цинка.

Теперь можно составить систему уравнений, которая будет являться математичексой моделью условия данной задачи.

$\begin{cases}1{,}17x+4{,}68y=58{,}5\\ 1{,}86x+2{,}79y=41{,}85\end{cases}$ Решив систему, получим x = <u>6 кг</u>, y = <u>11 кг</u>, что и будет являться ответом данной задачи.

Теперь рассмотрим также задачу на смеси, но которая имеет другой подход к решению.

Задача 4. Сосуд, вместимостью 40 л, наполнен чистым спиртом. Из него отлили некоторое количество спирта и долили водой, затем отлили такое же количество смеси. После этого в сосуде осталось 22,5 л чистого спирта. Сколько литров жидкости отливали каждый раз? [4]

Решение. В этой задаче достаточно провести устные рассуждения и «зафиксировать» необходимые данные. Итак, во-первых, обозначим за x количество жидкости, которую отливали каждый раз. Тогда получаем, что после того, как отлили чистый спирт в первый раз, и после добавления в сосуд воды, в нем получилось опять 40 л, но уже смеси. Второй раз отливали уже x л смеси и мы можем посчитать количество в ней спирта.

Так как после первого отлива спирта в сосуде осталось (40-x) л чистого спирта, то получается, что в 40 литрах смеси на каждый литр приходится $\frac{40-x}{40}$ л спирта.

Значит, когда отливали x литров смеси, спирта в ней оказалось $\frac{40-x}{40}\cdot x$ л. После этого в сосуде осталось 22,5 л чистого спирта.

В итоге получается, что $40-x-\frac{40-x}{40}\cdot x=22{,}5$. Решая данное уравнение, получим, что x = 10 л.

Приведенные выше задачи являются задачами на смеси и сплавы. Дальше рассмотрим задачи на движение.

Задача 5. Из пунктов А и В одновременно на встречу друг другу вышли 2 пешехода. Пешеход, шедший из А, прошел до встречи на 1 км больше другого и пришел в В через 48 мин после встречи. Второй пешеход пришел в А через 1 ч 15 мин после встречи. Через какое время после выхода пешеходов состоялась встреча и на каком расстоянии от пункта В? [4]

Решение. Для решения этой задачи необходимо построить чертеж, на котором следует указать все данные задачи (*Рис.1*).

Пусть x км – это расстояние от места встречи до пункта В, следовательно расстояние от пункта А до места встречи (x+1) км. Также на чертеже укажем время, за которое пешеходы прошли до назначенных пунктов после встречи.

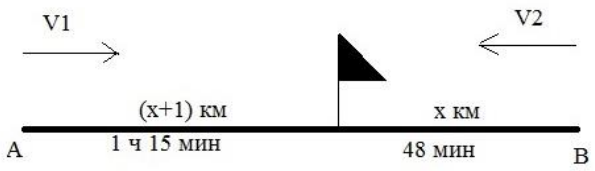

Рисунок 1. Чертеж к условию задачи 5

Итак, для решения задачи переведем время, данное в минутах, в часы. Тогда: 48 мин = 48/60 часа = 0,8 часа; 1 ч 15 мин = 1,25 часа.

Рассмотрим движение пешеходов после их встречи.

Первый пешеход прошел расстояние x км за 0,8 часа, значит мы можем записать его скорость через x: $V1=\frac{x}{0{,}8}$, аналогично $V2=\frac{x+1}{1{,}25}$.

Теперь рассмотрим движение пешеходов до встречи.

Первый пешеход прошел расстояние (x+1) км со скоростью $V1$, значит время, за которое он прошел это расстояние $t=\frac{x+1}{V1}$, а так как мы выразили $V1$ через x, то подставим полученное выражение в последнее: $t=\frac{x+1}{\frac{x}{0{,}8}}=\frac{0{,}8(x+1)}{x}$.

Время, которое шли оба пешехода до встречи одинаковое, так как они вышли одновременно. Значит можно обозначить время, которое потратил второй пешеход до встречи, тоже за t. Второй пешеход прошел расстояние x км со своей скоростью $V2$, поэтому:

$$t = \frac{x}{V2} = \frac{x}{\frac{x+1}{1{,}25}} = \frac{1{,}25x}{x+1}.$$

Теперь можно приравнять полученные выражения, описывающие время t:

$\frac{0{,}8(x+1)}{x} = \frac{1{,}25x}{x+1}$ – это уравнение для решения данной задачи,

где для x выполняется условие $x > 0$.

После нахождения значения x, из вопроса задачи необходимо найти время t.

Решив его, получим x = 4 (км), а время t = 1 (час).

Следующая задача тоже на движение, но другого типа. Обычно задачи такого типа вызывают много вопросов и затруднения в их решении как у школьников, так и у студентов педвузов.

Задача 6. На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходил круг на 2 мин быстрее другого и через час обогнал его ровно на круг. За сколько минут каждый лыжник проходил круг. [4]

Решение. Так как расстояние, которое проходили лыжники, измеряется кругами, нам не требуется время, данное в минутах, переводить в часы. Разница между пройденными лыжниками расстояниями равна 1 кругу.

Пусть первый лыжник проходил круг за x мин, тогда из условия задачи второму на прохождение одного круга требуется (x+2) мин.

Скорость первого лыжника: $\frac{1}{x}$(кругов в минуту), второго лыжника $-\frac{1}{x+2}$. Тогда запишем разницу пройденных лыжниками кругов за 60 минут: $60 \cdot \frac{1}{x} - 60 \cdot \frac{1}{x+2} = 1$– это и есть уравнение, описывающее движение лыжников.

Решив его, получим, что x = 10. Значит первый лыжник пробегает круг за 10 минут, а второй – за 12 минут.

Задача 7. Двое рабочих выполнили работу за 12 дней. За сколько дней может выполнить эту работу каждый рабочий, если одному из них для выполнения всей работы потребуется на 10 дней больше, чем другому? [4]

Решение. Пусть первому рабочему на выполнение данной работы требуется x дней, тогда второму рабочему – (x+10) дней. Объем работы обозначим за 1.

Тогда производительность первого рабочего равна $\frac{1}{x}$, а второго $-\frac{1}{x+10}$.

Так как они работают вместе, то их общая производительность равна сумме производительностей каждого.

Запишем уравнение, описывающее процесс данной задачи:

$$12 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10}\right) = 1$$

Решая уравнение, получаем x = 20, соответственно x+10 = 30.

Значит, рабочим потребуется 20 и 30 дней, если они будут работать по отдельности.

Задача, рассмотренная нами выше, является стандартной задачей на производительность (или на работу). Следующая задача тоже на работу, но рабочие будут работать как вместе, так и по отдельности.

Задача 8. Двое рабочих должны были выполнить некоторую работу за 12 дней. Сначала они работали вместе, а через 8 дней первый рабочий заболел и оставшуюся часть работы второй рабочий выполнил за 7 дней. За какое время мог бы выполнить эту работу каждый рабочий в отдельности? [4]

Решение. Пусть x – количество дней, которое потребуется первому рабочему для выполнения некоторой работы, а y – количество дней для второго рабочего. Тогда составим уравнение, которое описывает их работу вместе: $12 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$.

Далее составим уравнение, которое описывает работу одновременно 8 часов и работу второго 7 часов: $8 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1$.

Теперь объединим эти два уравнения в систему:

$$\begin{cases} 12 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \\ 8 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

Решением данной системы является: $x = 28$, $y = 21$. Значит 28 дней и 21 день потребуется рабочим для выполнения работы по отдельности.

Заключение

Итак, нами были проанализированы и решены текстовые задачи каждого из основных типов классификации текстовых задач. В решениях подробно показаны известные данные условий задач и пошагово сформулированы пути их решения.

Целью рассмотрения вышеописанных задач было научить составлять уравнения или системы уравнений, которые описывают процесс из условий этих задач. Умение решать данные задачи формирует математическую грамотность учащихся, которая необходима в повседневной жизни любого человека. Считаем, что данная статья будет полезна студентам-математикам педагогических вузов и учителям математики.

Список использованной литературы:

1 Alma E. Abylkasymova, Zhanara M. Nurmukhamedova, Dilara M. Nurbayeva, Lyazzat D. Zhumalieva “The Turkish Vector” Influence on Teaching the Exact Disciplines in Modern Educational System of Kazakhstan: on the Example of Teaching Algebra and Mathematics //Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN 0973-1768. Volume 12, Number 4. – India, 2016. – pp. 3481-3491

2 Абылкасымова А.Е., Туяков Е.А., Жумалиева Л.Д., Нурмухамедова Ж.М. Методические особенности обучения решению математических задач. Учебное пособие. – Алматы, 2018. – 248 с.

3 Капкаева Л.С. Теория и методика обучения математике - // URL:https://studme.org/

4 Корчевский В.Е., Дарбаева К.И. Алгебра: Сборник задач. Учеб. пособие для 9 кл. общеобразоват. шк. – Алматы: Мектеп, 2013. – 80 с.

References

1 Alma E. Abylkasymova, Zhanara M. Nurmukhamedova, Dilara M. Nurbayeva, Lyazzat D. Zhumalieva “The Turkish Vector” Influence on Teaching the Exact Disciplines in Modern Educational System of Kazakhstan: on the Example of Teaching Algebra and Mathematics, Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN 0973-1768. Volume 12, Number 4. – India, 2016. – pp. 3481-3491

2 Abylkasymova A.E., Tujakov E.A., Zhumalieva L.D., Nurmuhamedova Zh.M. (2018) Metodicheskie osobennosti obuchenija resheniju matematicheskih zadach. Uchebnoe posobie. [Methodological features of teaching the solution of mathematical problems. Tutorial]. Almaty. 248. (in Russ)

3 Kapkaeva L.S. (2018)Teorija i metodika obuchenija matematike [Theory and methodology of teaching mathematics]. URL:https://studme.org/(in Russ)

4 Korchevskij V.E., Darbaeva K.I. (2013) Algebra: Sbornik zadach. Ucheb. posobie dlja 9 kl. obshheobrazovat. shk. [Algebra: Collection of problems. Textbook. manual for 9th grade. general education]. Almaty: Mektep, 80. (in Russ)