МРНТИ 27.31.55
УДК 517.951

https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.11

У.К. Койлышов[1], А.Ж. Алдашова[1]

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ГЕЛЬДЕРОВСКИХ КЛАССАХ

Аннотация

В данной статье рассматривается задача Коши для псевдопараболического уравнения в трехмерном пространстве. Полученный результат можно обобщить на n- мерное пространство. Задача Коши для уравнения параболического и эллиптического типов достаточно хорошо изучены. Для псевдопараболического уравнения с помощью ранее построенного фундаментального решения, оценки фундаментального решения и ее производных. Применяя преобразование Фурье по x и преобразование Лапласа по t, мы сначала получили априорные оценки для потенциалов начального условия и объемного потенциала в гельдеровских пространствах. Далее используя эти результаты нами доказана оценка решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения в гельдеровских классах. Приведено подробное доказательство оценки потенциалов начального условия, объемного потенциала и решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения.

Ключевые слова: задача Коши, псевдопараболическое уравнения, фундаментальное решение, априорные оценки, потенциалы, гельдеровские классы.

Аңдатпа

У.К. Койлышов[1], А.Ж.Алдашова[1]

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН БІР ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІНІҢ ГЕЛЬДЕР КЛАСЫНДАҒЫ БАҒАСЫ

Бұл мақалада үш өлшемді кеңістіктегі псевдопараболалық теңдеу үшін Коши есебі қарастырылады. Нәтижені жалпы өлшемдік кеңістікке шығаруға болады. Параболалық және эллиптикалық типтердің теңдеулері үшін Коши есебі жақсы зерттелген. Іргелі шешімді қолданып, псевдопараболалық теңдеу үшін іргелі шешім мен оның туындыларын бағалайды. Фурье түрлендіруін және Лаплас түрлендіруін қолдана отырып, біз алдымен гельдер кеңістігіндегі бастапқы күйдің потенциалы мен көлем потенциалының априорлы бағасын алдық. Бұдан әрі, осы нәтижелерді қолдана отырып, біз гельдер кластарындағы жалған параболалық теңдеу үшін Коши есебінің шешімін дәлелдедік. Псевдопараболалық теңдеу үшін Коши есебінің бастапқы күйі, көлем потенциалы және шешудің нақты дәлелі келтірілген.

Түйін сөздер: Коши есебі, псевдопараболалық теңдеулер, іргелі шешім, априорлы бағалау, потенциалдар, гельдер кластары.

Abstract

THE VALUE OF THE SOLUTION OF ONE PROBLEM FOR THE PSEUDOPARABOLIC EQUATION IN THE CLASS OF GELS

Koylyshov U.K. [1], Aldashova A.Zh.[1]

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

This article discusses the Cauchy problem for a pseudo-parabolic equation in three-dimensional space. The result can be generalized to - dimensional space. The Cauchy problem for equations of parabolic and elliptic types is well studied. For a pseudo-parabolic equation using the previously constructed fundamental solution, evaluating the fundamental solution and its derivatives. Applying the Fourier transform with respect to and the Laplace transform with, we first obtained a priori estimates for the potentials of the initial condition and the volume potential in Hölder spaces. Further, using these results, we have proved an estimate of the solution of the Cauchy problem for the pseudo-parabolic equation in Hölder classes. A detailed proof of the estimation of the potentials of the initial condition, the volume potential, and the solution of the Cauchy problem for the pseudoparabolic equation is given.

Keywords: Cauchy problem, pseudo-parabolic equations, fundamental solution, a priori estimates, potentials, Hölder classes.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения решения псевдопараболического уравнения в $D_4(x \in R^3, t > 0)$:

$$(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \Delta)(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)\vartheta = 0. \tag{1}$$

удовлетворящее начальным условиям:

$$\vartheta\big|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\big|_{t=0} = u_1(x) \tag{2}$$

Для того, чтобы при $\varepsilon \to 0$ решение задачи (1)-(2) стремилось к решению «вырожденной» задачи:

$$-\Delta\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)u^\circ = 0, \quad u^\circ\big|_{t=0} = u_0(x),$$

предполагаем, что функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ в R^3 были связаны между собой соотношением

$$\Delta u_1(x) = \Delta^2 u_0(x)$$

Фундаментальное решение уравнение (1) построено в работе [1] и в случае $x \in R^3, -\infty < t < +\infty$ имеет вид:

$$T_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{4\pi(1-\varepsilon)}\left(\int_{R^3} \frac{\Gamma(y,t)dy}{|x-y|} - \int_{R^3} \frac{\Gamma_\varepsilon(y,t)dy}{|x-y|}\right); \tag{3}$$

где

$$\Gamma(x,t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{3/2}}, \ t > 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases} \qquad \Gamma_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(\varepsilon)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{3/2}}, \ t > 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases}$$

Формулу (3) перепишем в виде:

$$T_\varepsilon(x,t) = T_\varepsilon^{(1)}(x,t) + T_\varepsilon^{(2)}(x,t),$$

где

$$T_\varepsilon^{(1)}(x,t) = \frac{1}{4\pi(1-\varepsilon)} \int_{R^3} \frac{\Gamma(y,t)dy}{|x-y|}, \tag{4}$$

$$T_\varepsilon^{(2)}(x,t) = -\frac{1}{4\pi(1-\varepsilon)} \int_{R^3} \frac{\Gamma_\varepsilon(y,t)dy}{|x-y|}; \tag{5}$$

Функция (4) и её производные оценены в работе [2]:

$$\left|D_x^l D_t^k T_\varepsilon^{(1)}(x,t)\right| \le \frac{C}{(|x|^2 + t)^{k+\frac{l+1}{2}}}; \tag{6}$$

Для $T_\varepsilon^{(2)}(x,t)$ из (5) применяя подобную оценку будем иметь

$$\left|D_x^l D_t^k T_\varepsilon^{(2)}(x,t)\right| \le \frac{C \cdot \varepsilon^{\frac{l+1}{2}}}{(\varepsilon|x|^2 + t)^{k+\frac{l+1}{2}}}; \tag{7}$$

Объединяя эти оценки, для $T_\varepsilon(x,t)$ получим

$$\left|D_x^l D_t^k T_\varepsilon(x,t)\right| \le C\left[\frac{1}{(|x|^2 + t)^{k+\frac{l+1}{2}}} + \frac{\varepsilon^{\frac{l+1}{2}}}{(\varepsilon|x|^2 + t)^{k+\frac{l+1}{2}}}\right]; \tag{8}$$

В дальнейшем, объемным потенциалом назовем интеграл

$$g_\varepsilon[f] = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{R^3} T_\varepsilon(x-t, t-\tau) f(y,\tau)dy, \tag{9}$$

где $f(x,t) = 0$ при $t < 0$,

и потенциалами начального условия интегралы:

$$K_1[u_1] = \varepsilon \int_{R^3} T_\varepsilon (x-y,t) u_1(y) dy\,, \tag{10}$$

$$K_0[u_0] = \int_{R^3} \left[\Gamma_\varepsilon (x-y,t) - \Delta T_\varepsilon (x-y,t)\right] u_0(y) dy; \tag{11}$$

Объемный потенциал (9) при условии, когда функция $f(x,t)$ удовлетворяет условию Гельдера по x, является решением уравнения:

$$(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \Delta)(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta) g_\varepsilon [f] = f(x,t),$$

а потенциалы начального условия (10)-(11) являются решениями однородного уравнения:

$$(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \Delta)(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta) K_1[u_1] = 0, \quad i = 0,1.$$

После применения к задаче Коши (1)-(2) преобразования Фурье по x и преобразования Лапласа по t, она перейдет к задаче:

$$(\varepsilon s + |\xi|^2)(s + |\xi|^2)\overline{\widetilde{\vartheta}} = \varepsilon \widetilde{u}_1(\xi) + \varepsilon s \widetilde{u}_0(\xi) + (1+\varepsilon)|\xi|^2 \widetilde{u}_0(\xi)\,,$$

откуда

$$\overline{\widetilde{\vartheta}} = \frac{\varepsilon \widetilde{u}_1(\xi)}{(\varepsilon s + |\xi|^2)(s + |\xi|^2)} + \frac{\varepsilon s \widetilde{u}_0(\xi)}{\varepsilon s + |\xi|^2} + \frac{|\xi|^2 \widetilde{u}_0(\xi)}{(\varepsilon s + |\xi|^2)(s + |\xi|^2)}\,;$$

где

$$\overline{\widetilde{\vartheta}} = \int_0^\infty e^{-st} \left(\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3} \int_{R^3} e^{i(x,\xi)} \vartheta(x,t) dx \right) dt,$$

$\operatorname{Re} s > 0$ и тогда после перехода к переменным x и t по формулам обратных преобразований Фурье-Лапласа можно получить [3]

$$\begin{gathered}\vartheta(x,t) = \varepsilon \int_{R^3} T_\varepsilon (x-y,t) u_1(y) dy + \int_{R^3} \left[\Gamma_\varepsilon (x-y,t) - T_\varepsilon (x-y,t)\right] u_0(y) dy = \\ = K_1[u_1] + K_0[u_0];\end{gathered} \tag{12}$$

Имеет место следущая

Теорема. Решение задачи Коши (1)-(2) подчиняется оценке:

$$\left\|\varepsilon D_t^2 \vartheta\right\|_{D_4}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + \left\|D_x^4 \vartheta\right\|_{D_4}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + \left\|D_t D_x^2 \vartheta\right\|_{D_4}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} \le C\left[\langle u_0 \rangle_{R^3}^{(4+\alpha)} + \varepsilon \langle u_1 \rangle_{R^3}^{(2+\alpha)}\right]; \tag{13}$$

где обозначение $\langle \cdot \rangle$ с указанием снизу функционального пространства означает главную часть нормы в гельдеровских классах, так что

$$\langle u_0 \rangle_{R^3}^{(4+\alpha)} = \sup_{(x,y)\in R^3} \frac{\left|D_x^4 u_0(x) - D_y^4 u_0(y)\right|}{|x-y|^\alpha},$$

$$\langle u_1 \rangle_{R^3}^{(2+\alpha)} = \sup_{(x,y)\in R^3} \frac{\left|D_x^2 u_1(x) - D_y^4 u_1(y)\right|}{|x-y|^\alpha},$$

а обозначение $\|u\|_{D_4}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}$ означает

$$\|u\|_{D_4}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} = \sup_{(x,y,t)\in D_4} \frac{|u(x,t) - u(y,t)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{(x,y,t')\in D_4} \frac{|u(x,t) - u(y,t')|}{|t-t'|^{\alpha/2}};$$

Доказательство.

Так как $\vartheta(x,t) = K_1[u_1] + K_0[u_0]$, то покажем, что

$$\left\langle K_0[u_0]\right\rangle_{D_4}^{(4+\alpha,2+\frac{\alpha}{2})} \le C\varepsilon \left\langle u_0\right\rangle_{R^3}^{(4+\alpha)}, \tag{14}$$

$$\left\langle K_1[u_1]\right\rangle_{D_4}^{(4+\alpha,2+\frac{\alpha}{2})} \le C\varepsilon \left\langle u_1\right\rangle_{R^3}^{(2+\alpha)}; \tag{15}$$

Сначала докажем оценку

$$\left\langle D_t D_x^2 K_1[u_1]\right\rangle_{D_4}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} \le C\varepsilon \left\langle u_1\right\rangle_{R^3}^{(2+\alpha)}$$

Учитывая равенства

$$K_1[u_1] = \varepsilon \int_{R^3} T_\varepsilon(x-y,t) u_1(y)dy = \varepsilon \int_{R^3} T_\varepsilon(y,t) u_1(x-y)dy,$$

$$\int_{R^3} \frac{\partial T_\varepsilon(y,t)}{\partial t} dy = 1,$$

получим

$$\left|D_t D_x^2 K_1[u_1](x,t) - D_t D_z^2 K_1[u_1](z,t)\right| \le \left|\varepsilon \int_{R^3} \frac{\partial T_\varepsilon(y,t)}{\partial t} D_x^2 u_1(x-y)dy - \varepsilon \int_{R^3} \frac{\partial T_\varepsilon(y,t)}{\partial t} D_z^2 u_1(z-y)dy\right| \le$$

$$\le |x-z|^\alpha \cdot \left\langle D_x^2 u_1\right\rangle_{R^3}^{(\alpha)} \cdot \varepsilon \int_{R^3} \frac{\partial T_\varepsilon(y,t)}{\partial t} dy = |x-z|^\alpha \cdot \varepsilon \left\langle D_x^2 u_1\right\rangle_{R^3}^{(\alpha)};$$

Так как функция $T_\varepsilon(x,t)$ является четной по совокупности переменных x, то

$$K_1[u_1] = \varepsilon \int_{R^3} T_\varepsilon(y,t) u_1(x-y)dy = \varepsilon \int_{R^3} T_\varepsilon(y,t) u_1(x+y)dy$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon \int_{R^3} T_\varepsilon(y,t)\left[u_1(x-y) + u_1(x+y)\right]dy =$$

$$= u_1(x) + \frac{1}{2}\varepsilon \int_{R^3} T_\varepsilon(y,t)\left[u_1(x-y) - 2u_1(x) + u_1(x+y)\right]dy \tag{16}$$

Заметим, что

$$\left|u_1(x-y) - 2u_1(x) + u_1(x+y)\right| \le C|y|^\alpha \left\langle u_1\right\rangle_{R^3}^{(\alpha)}; \tag{17}$$

Тогда

$$\left|D_t D_x^2 K_1[u_1](x,t) - D_{t'} D_x^2 K_1[u_1](x,t')\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \int_{R^3} \left[\frac{\partial T_\varepsilon(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial T_\varepsilon(y,t')}{\partial t'}\right] \cdot$$

$$\left[D_x^2 u_1(x-y) - 2D_x^2 u_1(x) + D_x^2 u_1(x+y)\right]dy =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \int_{t'}^{t} d\tau \int_{R^3} \frac{\partial T_\varepsilon(y,\tau)}{\partial \tau} \left|\left[D_x^2 u_1(x-y) - 2D_x^2 u_1(x) + D_x^2 u_1(x+y)\right]dy\right.$$

Учитывая неравенство (17) имеем

$$\left|D_t D_x^2 K_1[u_1](x,t) - D_{t'} D_x^2 K_1[u_1](x,t')\right| \le C \cdot \varepsilon \left\langle D_x^2 u_1\right\rangle_{R^3}^{(\alpha)} \cdot |t-t'|^{\frac{\alpha}{2}};$$

Таким образом, доказано, что

$$\left\langle D_t D_x^2 K_1[u_1]\right\rangle_{D_4}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} \le C \cdot \varepsilon \left\langle D_x^2 u_1\right\rangle_{R^3}^{(\alpha)} \tag{18}$$

Теперь докажем, что

$$\left\langle \varepsilon D_t^2 K_1[u_1]\right\rangle_{D_4}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} \le C \cdot \varepsilon \left\langle D_x^2 u_1\right\rangle_{R^3}^{(\alpha)} \tag{19}$$

Найдем

$$D_t^2 K_1[u_1] = D_t\left(\varepsilon\int\limits_{R^3}\frac{\partial T_\varepsilon(x-y)}{\partial t}u_1(y)dy\right) = D_t\left(\varepsilon\int\limits_{R^3}\frac{\partial}{\partial t}\left(T_\varepsilon^{(1)}(x-y,t)+T_\varepsilon^{(2)}(x-y,t)\right)u_1(y)dy\right);$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial T_\varepsilon^{(1)}}{\partial t} = \Delta T_\varepsilon^{(1)}, \quad \varepsilon\frac{\partial T_\varepsilon^{(2)}}{\partial t} = \Delta T_\varepsilon^{(1)}$$

имеем

$$D_t^2 K_1[u_1] = D_t\left(\int\limits_{R^3}\Delta_x\left(\varepsilon T_\varepsilon^{(1)}(x-y,t)+T_\varepsilon^{(2)}(x-y,t)\right)u_1(y)dy\right) =$$

$$= D_t\left(\int\limits_{R^3}\left(\varepsilon T_\varepsilon^{(1)}(y,t)+T_\varepsilon^{(2)}(y,t)\right)\Delta_x u_1(x-y)dy\right) = \int\limits_{R^3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon T_\varepsilon^{(1)}(y,t)+T_\varepsilon^{(2)}(y,t)\right)\Delta_x u_1(x-y)dy.$$

Последний интеграл оценивается аналогично оценке (18). Таким образом неравенство (19) доказано.

Неравенство

$$\left\langle D_x^4 K_1[u_1]\right\rangle_{D_4}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} \le C\cdot\varepsilon\left\langle D_x^2 u_1\right\rangle_{R^3}^{(\alpha)} \tag{20}$$

доказывается аналогично неравенствам (18)-(19), так как $D_x^4 K_1[u_1]$ выражается через $D_t D_x^2 K_1[u_1]$, $D_t^2 K_1[u_1]$. Итак, нами доказана оценка (15).

Рассмотрим потенциал:

$$K_0[u_0] = \int\limits_{R^3}\left[\Gamma_\varepsilon(x-y,t)-\Delta T_\varepsilon(x-y,t)\right]u_0(y)dy = h_0(x,t)-h_1(x,t),$$

где

$$h_0(x,t) = \int\limits_{R^3}\Gamma_\varepsilon(x-y,t)u_0(y)dy \tag{21}$$

$$h_1(x,t) = \int\limits_{R^3}\Delta T_\varepsilon(x-y,t)u_0(y)dy; \tag{22}$$

Потенциал

$$h(x,t) = \int\limits_{R^3}\Gamma(x-y,t)u_0(y)dy$$

рассмотрен в работе [4], там же доказано, что

$$\left\langle h(x,t)\right\rangle_{D_4}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} \le C\left\langle u_0(x)\right\rangle_{R^3}^{(2+\alpha)}$$

Аналогично можно доказать оценку для потенциала (21):

$$\left\langle h(x,t)\right\rangle_{D_4}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} \le C\left\langle u_0(x)\right\rangle_{R^3}^{(2+\alpha)} \tag{23}$$

Рассмотрим потенциал (22):

$$h_1(x,t) = \int\limits_{R^3}\Delta T_\varepsilon(x-y,t)u_0(y)dy = \int\limits_{R^3}T_\varepsilon(y,t)\Delta u_0(x-y)dy.$$

Докажем, что

$$\left\langle D_t D_x^2 h_1(x,t)\right\rangle_{D_4}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} \le C\left\langle u_0(x)\right\rangle_{R^3}^{(4+\alpha)} \tag{24}$$

Оценим

$$\left|D_t D_x^2 h_1(x,t) - D_t D_z^2 h_1(z,t)\right| \le \int_{R^3} \frac{\partial T_\varepsilon(y,t)}{\partial t} \cdot \left|D_x^2\left(\Delta u_0(x-y)\right) - D_z^2\left(\Delta u_0(z-y)\right)\right| dy \le$$

$$\le C|x-z|^\alpha \cdot \left\langle D_x^4 u_0(x)\right\rangle_{R^3}^{(\alpha)};$$

Учитывая (16) имеем

$$D_t D_x^2 h_1(x,t) = D_x^2\left(\Delta u_0(x)\right) + \frac{1}{2}\int_{R^3} \frac{\partial T_\varepsilon(y,t)}{\partial t} \cdot \left[D_x^2(\Delta u_0(x-y)) - 2D_x^2(\Delta u_0(x)) + D_x^2(\Delta u_0(x+y))\right] dy$$

Тогда

$$\left|D_t D_x^2 h_1(x,t) - D_{t'} D_x^2 h_1(x,t')\right| \le \frac{1}{2}\int_{R^3} \left[\frac{\partial T_\varepsilon(y,t)}{\partial t} - \frac{\partial T_\varepsilon(y,t')}{\partial t'}\right] \cdot$$

$$\left[D_x^2 \Delta u_0(x-y) - 2D_x^2 \Delta u_0(x) + D_x^2 \Delta u_0(x+y)\right] dy \le \tag{25}$$

$$\le C_1 \left\langle D_x^4 u_0(x)\right\rangle_{R^3}^{(\alpha)} \int_{R^3} |y|^\alpha \left(\int_{t'}^{t} \frac{\partial^2 T_\varepsilon(y,\tau)}{\partial \tau^2} d\tau \right) dy \le C|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \left\langle D_x^4 u_0(x)\right\rangle_{R^3}^{(\alpha)};$$

Таким образом, оценка (24) доказана. Теперь докажем, что

$$\left\langle D_x^4 h_1(x,t)\right\rangle_{D_4}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} \le C\left\langle u_0(x)\right\rangle_{R^3}^{(4+\alpha)} \tag{26}$$

Предварительно рассмотрим

$$h_1(x,t) = \int_{R^3} \Delta T_\varepsilon\ (x-y,t) u_0(y) dy = \int_{R^3} \Delta\left(T_\varepsilon^{(1)}(x-y,t) + T_\varepsilon^{(2)}(x-y,t)\right) u_0(y) dy =$$

$$= \int_{R^3} \frac{\partial}{\partial t} T_\varepsilon\ (x-y,t) u_0(y) dy$$

Оценим

$$\left|D_x^4 h_1(x,t) - D_z^4 h_1(z,t)\right| \le \int_{R^3} \frac{\partial}{\partial t} T_\varepsilon(y,t) \left|D_x^4 u_0(x-y) - D_z^4 u_0(z-y)\right| dy \le$$

$$\le C|x-z|^\alpha \cdot \left\langle D_x^4 u_0(x)\right\rangle_{R^3}^{(\alpha)};$$

Выражение $D_x^4 h_1(x,t) - D_z^4 h_1(z,t)$ оценивается аналогично (25). Таким образом, оценка (26) доказана.

Так как $\varepsilon D_t^2 h_1(x,t)$ выражается через $D_x^4 h_1(x,t), D_t D_x^2 h_1(x,t)$ то из оценок (24),(26) получим

$$\left\langle \varepsilon D_t^2 h_1(x,t)\right\rangle_{D_4}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} \le C\left\langle D_x^4 u_0(x)\right\rangle_{R^3}^{(\alpha)} \tag{27}$$

Объединяя оценки (23)-(27) получим оценку (14). Из (14)-(15) вытекает оценка (13). Что и требовалось доказать.

Список использованной литературы:

1 Абдрахманов М.А., Об ε-регуляризации решений задачи Коши и полупространственной задачи для псевдопараболического уравнения в соболевских классах. // Тезисы докладов юбилейной научной конференции, посвященной 50-летию развития математики в Академии наук Казахстана. - С.8.

2 Солонников В.А., приорные оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса , Труды Маием. Ин - та АН СССР. – 1964, - Т.70, - С.213-317.

3 Абдрахманов М.А. Разрешимость задачи Дирихле для псевдопараболического уравнения в соболевских классах , Динамика сплошной среды. Новосибирск. – 1991, - Т.101, - С.3-20.

4 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. – 1967, - 736с.

References:

1. *Abdrahmanov M.A., Ob ε -reguljarizacii reshenij zadachi Koshi i poluprostranstvennoj zadachi dlja psevdoparabolicheskogo uravnenija v sobolevskih klassah [On ε –regularization of solutions to the Cauchy problem and the half-space problem for a pseudoparabolic equation in Sobolev classes]. Tezisy dokladov jubilejnoj nauchnoj konferencii, posvjashhennoj 50-letiju razvitija matematiki v Akademii nauk Kazahstana. .8. (In Russian)*

2. *Solonnikov V.A.,(1964) priornye ocenki reshenij nestacionarnoj linearizovannoj sistemy uravnenij Nav'e-Stoksa , Trudy Maiem [Priority Estimates for Solutions to the Nonstationary Linearized System of Navier-Stokes Equations, Trudy Mayem]. In - ta AN SSSR. T.70, .213-317. (In Russian)*

3. *Abdrahmanov M.A. (1991) Razreshimost' zadachi Dirihle dlja psevdoparabolicheskogo uravnenija v sobolevskih klassah , Dinamika sploshnoj sredy[Solvability of the Dirichlet problem for a pseudoparabolic equation in Sobolev classes, Dynamics of a continuous medium]. Novsibirsk. T.101, 3-20. (In Russian)*

4. *Ladyzhenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. (1967) Linejnye i kvazilinejnye uravnenija parabolicheskogo tipa [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. M.: Nauka., 736. (In Russian)*