МРНТИ 27.19.15, 27.19.17
УДК 517.927.4, 517.912

https://doi.org/10.51889/2021-1.1728-7901.09

С.М. Темешева[1,2], П.Б. Абдиманапова[2,3], Д.И. Борисов[4]*

[1]Институт математики и математического моделирования Министерства образования и науки Республики Казахстан, г.Алматы, Казахстан
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан
[3]Алматинский технологический университет, г.Алматы, Казахстан,
[4]Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия
**e-mail: peryzat74@mail.ru*

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СЕМЕЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

В данной работе рассматривается краевая задача для семейства линейных дифференциальных уравнений, подчиняющихся семейству нелинейных двухточечных краевых условий. При каждом фиксированном значении параметра семейства исследуемая краевая задача является нелинейной двухточечной краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. К семейству краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть сведены нелокальные краевые задачи для систем уравнений в частных производных, в частности, нелокальные краевые задачи для систем гиперболических уравнений со смешанными производными. Поэтому установление условий разрешимости и разработка методов решения семейства краевых задач для дифференциальных уравнений являются актуальными проблемами.

В предлагаемой работе используя идеи метода параметризации Джумабаева Д.С., который изначально был разработан для установления признаков однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных уравнений, предложен метод нахождения численного решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: семейства нелинейных краевых задач, уравнение с параметром, изолированное решение, численный метод.

Аңдатпа

С.М. Темешева[1,2], П.Б. Абдиманапова[2,3], Д.И. Борисов[4]
[1]Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігі Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан
[2]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[3]Алматы технологиялық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[4] Ресей ғылым академиясының Уфа федералды зерттеу орталығының Есептеу орталығы бар Математика институты, Уфа қ., Ресей

ЖӘЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ШЕТТІК ЕСЕПТЕР ӘУЛЕТІНІҢ ШЕШІМІН ТАБУДЫҢ БІР ӘДІСІ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста сызықтық емес екі нүктелі шеттік шарттар әулетіне бағынатын сызықтық дифференциалдық теңдеулер әулеті үшін шеттік есеп қарастырылады. Әулет параметрінің әрбір бекітілген мәні үшін зерттелетін шеттік есеп жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес екі нүктелі шеттік есеп болып табылады. Жәй дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер әулетіне дербес туындылы теңдеулер жүйелері үшін бейлокал шеттік есептер, атап айтқанда, аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйелеріне арналған бейлокал шеттік есептер, келтіріледі. Сондықтан, дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер әулетін шешілімділік шарттарын тағайындау және шешімін табу әдістерін жасау өзекті мәселелер болып табылады. Д.С. Джумабаев өз еңбегінде параметрлеу әдісі көмегімен жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық екі нүктелі шеттік есептің бірмәнді шешілімділік белгілерін жасады.

Осы жұмыста Д.С. Джумабаевтың параметрлеу әдісінің идеяларын қолдана отырып қарастырып отырған есептің сандық шешімін табу әдісі ұсынылады.

Түйін сөздер: сызықтық емес шеттік есептер әулеті, параметрі бар теңдеу, оқшауланған шешім, сандық әдіс.

Abstract

ON A METHOD FOR SOLVING A FAMILY OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Temesheva S.M.[1,2], Abdimanapova P.B.[2,3], Borisov D.I.[4]
[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan
[2]al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[3]Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan
[4]Russian Academy of Sciences Institute of Mathematics with Computing Center of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Science, Ufa, Russia

In this paper, we consider a boundary value problem for a family of linear differential equations that obey a family of nonlinear two-point boundary conditions. For each fixed value of the family parameter, the boundary value problem under study is a nonlinear two-point boundary value problem for a system of ordinary differential equations. Non-local boundary value problems for systems of partial differential equations, in particular, non-local boundary value problems for systems of hyperbolic equations with mixed derivatives, can be reduced to the family of boundary value problems for ordinary differential equations. Therefore, the establishment of solvability conditions and the development of methods for solving a family of boundary value problems for differential equations are actual problems. In this paper, using the ideas of the parametrization method of D. S. Dzhumabaev, which was originally developed to establish the signs of unambiguous solvability of a linear two-point boundary value problem for a system of ordinary equations, a method for finding a numerical solution to the problem under consideration is proposed.

Keywords: families of nonlinear boundary value problems, equation with parameter, isolated solution, numerical method.

Постановка задачи и метод исследования

Рассматривается семейство краевых задач для системы линейных дифференциальных уравнений, подчиняющихся нелинейным двухточечным краевым условиям

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(x,t)v + F(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} = [0,\omega] \times [0,T], \tag{1}$$

$$g(x, v(x,0), v(x,T)) = 0, \quad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

где $A(x,t)$ – непрерывная матрица размерности $(n \times n)$, $F(x,t)$ – непрерывная n-вектор-функция на $[0,T]$, x – параметр семейства, $g:[0,\omega] \times R^n \times R^n \to R^n$ – непрерывная функция, $\|v\| = \max\limits_{i=1:n} |v_i|$, $\|A(x,t)\| = \max\limits_{i=1:n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)| \leqq \alpha(x)$, $\alpha(x)$ – ограниченная функция на $[0,\omega]$.

Заметим, что при каждом фиксированном $x \in [0,\omega]$ задача (1), (2) является нелинейной двухточечной краевой задачей для системы обыкновенных дифференциаль-ных уравнений, которая исследована многими авторами, в частности, они исследованы методом параметризации Джумабаева Д.С. в работах [1-5].

Изучение семейства краевых задач (1), (2) представляет самостоятельный интерес (см. [6-12]), так как находит применение в теории нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений со смешанной производной [13-18].

Решением семейства нелинейных двухточечных краевых задач (1), (2) называется непрерывно дифференцируемая по t на $\overline{\Omega}$ функция $v^*(x,t) \in C(\overline{\Omega}, R^n)$, удовлетворяющая при каждом фиксированном $x \in [0,\omega]$ дифференциальному уравнению (1) и краевым усло-виям (2), где через $C(\overline{\Omega}, R^n)$ обозначено пространство непрерывных функций $v:\overline{\Omega} \to R^n$ с нормой $\|v\|_0 = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \|v(x,t)\|$.

В настоящей статье путем использования идей метода параметризации Д.С. Джумабаева [1, 2] предлагается один из способов нахождения численного решения задачи **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, **Ошибка! Источник ссылки не найден.**.

Выберем натуральное число N $(N = 1,2,\ldots)$, разобъем отрезок $[0,T]$ точками $t_p = p \cdot h$, $p = 0:N$, $h = T/N$. Введем обозначения:

$$\Omega_r = \{(x,t): x \in [0,\omega], \quad t \in [t_{r-1}, t_r)\}, \qquad r = 1:N;$$

Δ_N – разбиение области $\Omega=[0,\omega]\times[0,T)=\bigcup\limits_{r=1}^{N}\Omega_r$;

$\lambda_r(x)=v(x,t_{r-1})$, $r=1:N$, $\lambda_{N+1}(x)=\lim\limits_{t\to t_N-0}v(x,t)$, $x\in[0,\omega]$;

$C([0,\omega],R^{n(N+1)})$ – пространство систем функций $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),\ldots,\lambda_{N+1}(x))$ с нормой $\|\lambda\|_1=\max\limits_{x\in[0,\omega]}\max\limits_{r=1:(N+1)}\|\lambda_r(x)\|$, здесь функции $\lambda_r:[0,\omega]\to R^n$ непрерывны, $r=1:(N+1)$;

$v_r(x,t)=v(x,t)-\lambda_r(x)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=1:N$;

$C(\overline{\Omega},\Delta_N R^{nN})$ – пространство систем функций $v[x,t]=(v_1(x,t),v_2(x,t),\ldots,v_N(x,t))$ с нормой $\|v[\cdot]\|_2=\max\limits_{r=1:N}\max\limits_{x\in[0,\omega]}\sup\limits_{t\in[t_{r-1},t_r)}\|v_r(x,t)\|$, где функция $v_r(x,t)\in C(\Omega_r)$ и имеет конечный предел $\lim\limits_{t\to t_r-0}v_r(x,t)$ равномерно относительно $x\in[0,\omega]$ ($r=1:N$).

Задача (1), (2) эквивалентна краевой задаче с функциональными параметрами

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}=A(x,t)(\lambda_r(x)+v_r)+F(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_r,\quad r=1:N, \tag{3}$$

$$v_r(x,t_{r-1})=0,\quad x\in[0,\omega], \tag{4}$$

$$g\big(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x)\big)=0,\quad x\in[0,\omega], \tag{5}$$

$$\lambda_r(x)+\lim_{t\to t_r-0}v_r(x,t)-\lambda_{r+1}(x)=0,\quad r=1:N, \tag{6}$$

где (6) - условия непрерывности решения на внутренних линиях разбиения Δ_N области Ω и односторонние пределы $\lim\limits_{t\to t_r-0}v_r(x,t)$ ($r=1:N$) существуют равномерно относительно $x\in[0,\omega]$.

Решением задачи (3)-(6) является набор $(\lambda^*(x),v^*(x,[t]))$ с компонентами

$$\lambda^*(x)=(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),\ldots,\lambda_{N+1}^*(x))\in C([0,\omega],R^{n(N+1)}),$$

$$v^*(x,[t])=(v_1^*(x,t),v_2^*(x,t),\ldots,v_N^*(x,t))\in C(\overline{\Omega},\Omega_r,R^{nN}),$$

где при каждом фиксированном $x\in[0,\Omega]$ непрерывно дифференцируемая по t на $[t_{r-1},t_r)$ функция $v_r^*(x,t)$ удовлетворяет семейству линейных дифференциальных уравнений (3), $r=1:N$, выполняется начальное условие $v_r^*(x,t_{r-1})=0$, $r=1:N$, и для $\lambda_r^*(x)$, $x\in[0,\omega]$, $r=1:(N+1)$, имеют место равенства (5), (6).

Введем в рассмотрение линейный оператор [19, с.145]

$$\Phi_r(x,t)=I+\int_{t_{r-1}}^{t}A(x,\tau_1)d\tau_1+\sum_{j=2}^{\infty}\int_{t_{r-1}}^{t}A(x,\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t}A(x,\tau_2)\ldots\int_{t_{r-1}}^{t}A(x,\tau_j)d\tau_j\ldots d\tau_2 d\tau_1,$$

$$(x,t)\in\Omega_r,\quad r=1:N,$$

где I - единичная матрица размерности $(n\times n)$. Оператор $\Phi_r(x,t)$ удовлетворяет задаче.

$$\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}=A(x,t)\Phi_r,\qquad \Phi_r(x,t_{r-1})=I,\qquad (x,t)\in\Omega_r,\quad r=1:N. \tag{7}$$

При каждом $x\in[0,\omega]$ при фиксированных значениях функциональных параметров $\lambda_r(x)\in C([0,\omega],R^n)$ $(r=1:N)$, используя обозначения

$$a_r(P,x,t) = \Phi_r(x,t)\int_{t_{r-1}}^{t}\Phi_r^{-1}(x,\xi)P(x,\xi)d\xi, \quad (x,t)\in\Omega_r, \quad r=1:N, \tag{8}$$

запишем семейство решений задачи Коши (3), (4)

$$v_r(x,t) = a_r(A,x,t)\lambda_r(x) + a_r(F,x,t), \quad (x,t)\in\Omega_r, \quad r=1:N, \tag{9}$$

и составим систему функций $v(x,[t]) = (v_1(x,t), v_2(x,t),\ldots,v_N(x,t))$.

Заметим, что функция $a_r(P,x,t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}a_r(P,x,t) = A(x,t)\cdot a_r(P,x,t) + P(x,t), \quad a_r(P,x,t_{r-1}) = 0, \quad (x,t)\in\Omega_r, \quad r=1:N. \tag{10}$$

Определим из (9) пределы $\lim\limits_{t\to t_r-0} v_r(x,t)$, $r=1:N$, подставим их в (5), (6), умножив (5) на $h>0$ $(Nh=T)$, запишем семейство систем нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функциональных параметров

$$Q^*_{\Delta_N}(x,\lambda(x)) = 0, \quad \lambda(x) = (\lambda_1(x),\lambda_2(x),\ldots,\lambda_{N+1}(x))\in R^{n(N+1)}, \quad x\in[0,\omega], \tag{11}$$

где оператор $Q^*_{\Delta_N}(x,\lambda(x))$ имеет вид

$$Q^*_{\Delta_N}(x,\lambda(x)) = \begin{pmatrix} h\cdot g\big(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x)\big) \\ (I+a_1(A,x,t_1))\lambda_1 - \lambda_2 + a_1(F,x,t_1) \\ (I+a_2(A,x,t_2))\lambda_2 - \lambda_3 + a_2(F,x,t_2) \\ \ldots \\ (I+a_N(A,x,t_N))\lambda_N - \lambda_{N+1} + a_N(F,x,t_N) \end{pmatrix}, \quad x\in[0,\omega].$$

Выберем вектор $\lambda^0(x) = (\lambda_1^0(x),\lambda_2^0(x),\ldots,\lambda_{N+1}^0(x))\in C([0,\omega],R^{n(N+1)})$, число $\rho_\lambda>0$ и определим множества:

$$S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda) = \left\{\lambda(x)\in C([0,\omega],R^{n(N+1)}) : \left\|\lambda-\lambda^0\right\|_1 = \max_{x\in[0,\omega]}\max_{r=1:(N+1)}\left\|\lambda_r(x)-\lambda_r^0(x)\right\| < \rho_\lambda\right\},$$

$$G^0(x,\rho_\lambda) = \{(x,w_1,w_2)\in[0,\omega]\times R^n\times R^n : x\in[0,\omega], \| w_1-\lambda_1^0(x)\| < \rho_\lambda, \| w_2-\lambda_{N+1}^0(x)\| < \rho_\lambda\}.$$

Условие B**.** Функция $g(x,w_1,w_2)$ непрерывна и имеет равномерно непрерывные частные производные $g'_{w_1}(x,w_1,w_2)$, $g'_{w_2}(x,w_1,w_2)$ в $G^0(x,\rho_\lambda)$, матрица $M(x): R^n\to R^n$, $x\in[0,\omega]$, определенная равенством

$$M_N(x) = h\cdot g'_{w_1}(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x)) + h\cdot g'_{w_2}(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x))\cdot\prod_{r=N}^{1}(I+a_r(A,x,t_r)),$$

обратима для всех $\lambda(x)\in S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda)$ и для любого $x\in[0,\omega]$ справедливо неравенство

$$\left\|M_N^{-1}(x)\right\| \leq L_1, \quad \left\|g'_{w_2}(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x))\right\| \leq L_2, \quad x\in[0,\omega], \ L_1, \ L_2 \text{ - постоянные.}$$

При решении уравнения (11) относительно функционального параметра $\lambda(x)$, воспользуемся утверждением, которое является обобщением теоремы 1 из [2].

Теорема. *Пусть имеет место условие* B *и следующие условия:*

1) матрица Якоби $\dfrac{\partial Q^*_{\Delta_N}(x,\lambda(x))}{\partial\lambda}: R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ *равномерно непрерывна в* $S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda)$,

2) $\dfrac{\partial Q^*_{\Delta_N}(x,\lambda(x))}{\partial\lambda}: R^{n(N+1)} \to R^{n(N+1)}$ *ограниченно обратима для всех* $\lambda(x) \in S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda)$ *и*

$$\left\|\left(\frac{\partial Q^*_{\Delta_N}(x,\lambda(x))}{\partial\lambda}\right)^{-1}\right\| \leqq \gamma, \quad \gamma - const,$$

3) $\gamma \cdot \left\|Q^*_{\Delta_N}(x,\lambda(x))\right\| < \rho_\lambda$.

Тогда существует число $\alpha_0 \geq 1$ *такое что для любого* $\alpha_1 \geq \alpha_0$, *последовательность* $\{\lambda^{(p+1)}(x)\}$, $p = 0,1,2,\ \ldots,$ *определяемая при каждом* $x \in [0,\omega]$ *итерационным процессом:*

$$\lambda^{(0)}(x) = \lambda^0(x),$$
$$\lambda^{(p+1)}(x) = \lambda^{(p)}(x) - \frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{\partial Q^*_{\Delta_N}(x,\lambda^{(p)}(x))}{\partial\lambda}\right)^{-1} \cdot Q^*_{\Delta_N}(x,\lambda^{(p)}(x)),\ p = 0,1,2,\ \ldots, \qquad (12)$$

содержится в $S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda)$, *сходится к* $\lambda^*(x)$, *решению уравнения (11) в* $S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda)$, *и справедлива оценка*

$$\left\|\lambda^* - \lambda^0\right\|_1 \leqq \gamma \cdot \left\|Q^*_{\Delta_N}(x,\lambda^0(x))\right\|.$$

Причем любое решение уравнения (11) в $S(x,\lambda^0(x),\rho_\lambda)$ *изолировано.*

Численный метод решения семейства нелинейных краевых задач

В данной работе предлагается один численный метод решения семейства нелинейной двухточечной краевой задачи с параметром (1), (2).

1) При фиксированном x отрезок $[t_{r-1},t_r]$ разбивается на M равных частей ($M = 1,2,\ldots$) и определим численное решение задачи Коши (10) в точках $t_{r,k} = t_{r-1} + k\cdot\dfrac{t_r - t_{r-1}}{M}$ ($r = 1:N$, $k = 0:M$) при $x \in [0,\omega]$.

2) Составим систему нелинейных алгебраических уравнений (11) относительно параметра $\lambda(x) \in R^{n(N+1)}$.

3) Выберем вектор $\lambda^0(x) \in R^{n(N+1)}$ такой, что $Q^*_{\Delta_N}(x,\lambda^0(x)) \neq 0$.

4) Используя итерационный процесс (12), определим $\lambda^{(p)}(x)$ такой, что $Q^*_{\Delta_N}(x,\lambda^{(p)}(x)) = 0$, $p = 1,2,\ldots.$

5) Используя значения численного решения задач Коши (10), согласно равенству (9), найдем функции $v_r(x,t_{r,k})$ ($r = 1:N$, $k = 0:M$), $x \in [0,\omega]$.

Численным решением задачи (1), (2) будет функция $\tilde{v}(x,\hat{t})$, где

$$\tilde{v}(x,\hat{t}) = \begin{cases} \lambda_r^{(p)}(x) + v_r(x,t_{r,k}), & \text{если} \quad \hat{t} = t_{r-1} + k\dfrac{t_r - t_{r-1}}{M}, \quad k = 0:(M-1), \quad r = 0:N, \quad x \in [0,\omega], \\ \lambda_{N+1}^{(p)}(x), & \text{если} \quad \hat{t} = t_N, \quad x \in [0,\omega]. \end{cases}$$

Таким образом, нахождение численного решения задачи (1), (2) было сведено нахождению численного решения семейства нелинейных двухточечных краевых задач с функциональными параметрами (3)-(6). Предлагаемый метод нахождения численного решения поставленной задачи представляет собой эффективную комбинацию процедур нахождения рашений задач Коши и решения системы нелинейных алгебраических уравнений относительно функциональных параметров при каждом фиксированном значении параметра семейства.

References:

1 Dzhumabaev D.S. (1989) Conditions the unique solvability of a linear boundary value problem for an ordinary differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics №1(29). –pp.34-46.

2 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. (2007) A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems // ISSN 0965-5425, Computational Mathematics and Mathematical Physics. №1(47). - pp. 37-61.

3 Dzhumabaev D.S. and Temesheva S.M. Necessary and sufficient conditions for the existence of an "isolated" solution of a nonlinear two-point boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences (United States) 2013. №4(194). pp. 341-353.

4 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. Criteria for the Existence of an Isolated Solution of a Nonlinear Boundary Value Problem // Ukrainian Mathematical Journal –2018. №3(70). pp.410-421

5 Temesheva S.M. A modification of algorithms of the Dzhumabaev parameterization method and a numerical method // International journal of information and communication technologies 2020. №2(1), pp. 66-73

6 Dzhumabaev D. S. Bounded solutions of families of systems of differential equations and their approximation // J. Math. Sci. –2008. №6 (150). pp.2473-2487

7 Dzhumabaev D.S. (2006) Ogranichennye reshenija semejstv sistem differencial'nyh uravnenij i ih approksimacija Fundament. i prikl. matem. [Bounded solutions of families of systems of differential equations and their approximation. Fundam. and app. mat]. №5(12). 29–47. (In Russian)

8 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. (2010) Shodimost' odnogo algoritma nahozhdenija reshenija semejstva nelinejnyh dvuhtochechnyh kraevyh zadach. Vestnik KazNPU im. Abai. Ser. fiz.-matem. nauki. [Convergence of one algorithm for finding a solution to a family of nonlinear two-point boundary value problems. Vestnik Abai KazNPU. Ser. phys.-math. science]. №3(31). 52-56. (In Russian)

9 Temesheva S.M. (2010) Kriterij sushhestvovanija izolirovannogo reshenija semejstva nelinejnyh dvuhtochechnyh kraevyh zadach. Vestnik KazNU im. al'Farabi. Ser. matem., meh., inf. [A criterion for the existence of an isolated solution of a family of nonlinear two-point boundary value problems. Vestnik KazNU im. alFarabi. Ser. mat., mech., inf.]. №4(67). 232-236. (In Russian)

10 Asanova A. T. On the unique solvability of a family of two-point boundary-value problems for systems of ordinary differential equations // J. Math. Sci. –2008. №5(150). –С. 2302–2316

11 Asanova A.T. (2006) Ob odnoznachnoj razreshimosti semejstva dvuhtochechnyh kraevyh zadach dlja sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. Fundament. i prikl. matem.[On the unique solvability of a family of two-point boundary value problems for systems of ordinary differential equations. Fundam. and app. Mat]. №4(12), 21–39. (In Russian)

12 Asanova A.T. (2013) O razreshimosti semejstva mnogotochechnyh kraevyh zadach dlja sistemy differencial'nyh uravnenij i ih prilozhenijah k nelokal'nym kraevym zadacham. Matematicheskij zhurnal [On the solvability of a family of multipoint boundary value problems for a system of differential equations and their applications to nonlocal boundary value problems. Matematicheskii Zhurnal]. №3(13). 38–42. (In Russian)

13 Asanova A.T. Criteria of unique solvability of nonlocal boundary-value problem for systems of hyperbolic equations with mixed derivatives // Russian Mathematics, 2016, №5(60). – С.1-17

14 Asanova, A.T. Multipoint Problem for a System of Hyperbolic Equations with Mixed Derivative //Journal of Mathematical Sciences (United States), 2016. №3(212). – С. 213-233

15 Asanova, A.T. On the unique solvability of a nonlocal boundary value problem with data on intersecting lines for systems of hyperbolic equations // Differential Equations –2009. №3(45). – С. 385-394

16 Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Differential Equations, 2005. №3(41). – С. 352-363

17 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. (2010) Ob odnom algoritme nahozhdenija reshenija nelinejnoj nelokal'noj kraevoj zadachi dlja sistem giperbolicheskih uravnenij [On one algorithm for finding a solution to a nonlinear nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations]. Vestnik KazNU im. al'-Farabi. Ser. matem., meh., inf. №3(66), 196-200. (In Russian)

18 Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M. Bounder solution on a strip to a system of nonlinear hyperbolic equations with mixed derivatives // Bulletin of the Karaganda university-mathematics, –2016. №4(84), 35-45.

19 Daleckij Ju.L., Krejn M.G. (1970) Ustojchivost' reshenij differencial'nyh uravnenij v banahovom prostranstve. [Stability of solutions of differential equations in a Banach space]. M.: Nauka, 534.