ҒТАХР 50.05.03

10.51889/2959-5894.2025.92.4.004

Т.С. Картбаев [1], А.Е. Исмайылов [3], А.А. Тұрғынбаева [2,3], В.Ж. Керімбаева [3]

[1]Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазахстан
[2]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазахстан
[3]Алматы технологиялық университеті, Алматы қ., Қазахстан
[*]*e-mail: turgunbayeva.aliza@mail.ru*

ЦИФРЛЫҚ ЖОБАЛАРҒА АРНАЛҒАН ИНВЕСТИЦИЯЛЫҚ ШЕШІМДЕРДІ ҚОЛДАУ ЖҮЙЕСІНДЕГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОЙЫНДАРДЫ ҚОЛДАНУ

Аңдатпа

Мақалада кәсіпорындарды цифрландыру жобаларына инвестиция салуда шешім қабылдауды қолдау жүйесінің моделі ұсынылған. Модельдің негізі ретінде сызықтық емес дифференциалдық ойындар теориясы алынған, бұл инвесторлар арасындағы белгісіздік пен бәсекелестік жағдайындағы қарсы әрекет ету процесін формализациялауға мүмкіндік береді. Әзірленген тәсіл Рунге–Кутта әдісі арқылы сандық шешім қолдану арқылы қаржыландырудың ұтымды стратегияларын табуға жол ашады. Тұрақты және айнымалы параметрлері бар модельдер үшін есептеу эксперименттері жүргізілді. Нәтижелер ұсынылған модельдің кәсіпорындардың цифрлық трансформациясы саласында инвестициялық шешімдерді қолдау үшін тиімділігін растады. Бұл мақалада көп факторды ескере отырып, кәсіпорынды цифрландыру саласындағы жобаларға тұрақты инвестициялар салу мүмкіндігі қарастырылады. Аталған мәселені шешуге бағытталған мақала ғылыми да, тәжірибелік тұрғыдан да өзекті болып табылады. Көпфакторлылықты ескере отырып, сызықтық емес дифференциалдық ойындар класы қарастырылды, бұл кәсіпорындарды цифрландыру жобаларындағы инвестициялық процесті дәл сипаттауға мүмкіндік берді. Бұл инвесторға инвестициялық стратегияларды талдап, ұтымды шешімдер қабылдауға жағдай жасайды.

Түйін сөздер: цифрлық технологиялар, инвестор, инвестициалық жоба, бисызықтық дифференциалдық ойындар, Рунге-Кутте әдісі.

Т.С. Қартбаев[1], А.Е. Исмайылов [3], А.А. Тургынбаева[2,3], В.Ж. Керимбаева [3]
[1]Казахский национальный женский педагогический университет, г.Алматы, Казахстан
[2]Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан
[3]Алматинский технологический университет, г.Алматы, Казахстан

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР В СИСТЕМЕ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ ПО ЦИФРОВЫМ ПРОЕКТАМ

Аннотация

В статье представлена модель системы поддержки принятия решений при инвестициях в проекты цифровизации предприятий с учётом множества факторов. Основой модели выступает теория нелинейных дифференциальных игр, что позволяет формализовать процесс противодействия между инвесторами, принимающими решения в условиях неопределенности и конкуренции. Разработанный подход позволяет находить рациональные стратегии финансирования с применением численного решения через метод Рунге-Кутта. Проведены вычислительные эксперименты для моделей с постоянными и переменными параметрами. Результаты подтверждают эффективность предложенной модели для поддержки инвестиционных решений в области цифровых трансформаций предприятий. В данной статье с учетом множества факторов рассматривается возможность осуществления постоянных инвестиций в проекты в области цифровизации предприятия. Статья, направленная на решение данной проблемы, представляет актуальный научный и практический интерес. С учетом многофакторности рассмотрен класс нелинейных дифференциальных игр, который позволил точно описать инвестиционный процесс в проектах в области цифровизации предприятий. Это позволяет инвестору анализировать и находить рациональные инвестиционные стратегии.

Ключевые слова: цифровые технологии, инвестор, инвестиционный проект, нелинейные дифференциальные игры, метод Рунге-Кутте.

T. Kartbaev [1], A. Ismailov [3], A. Turgynbaeva [2,3], V.Zh. Kerimbaeva [3]
[1]Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
[2]Kazakh National University named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan
[3]Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan

THE APPLICATION OF DIFFERENTIAL GAMES IN THE SYSTEM OF SUPPORTING INVESTMENT DECISIONS FOR DIGITAL PROJECTS

Abstract

The article presents a model of a decision support system for investments in enterprise digitalization projects, taking into account multiple factors. The model is based on the theory of nonlinear differential games, which makes it possible to formalize the process of opposition between investors making decisions under conditions of uncertainty and competition. The developed approach allows for finding rational financing strategies using a numerical solution through the Runge–Kutta method. Computational experiments were carried out for models with constant and variable parameters. The results confirm the effectiveness of the proposed model for supporting investment decisions in the field of enterprise digital transformations. In this article, considering multiple factors, the possibility of implementing continuous investments in enterprise digitalization projects is examined. The paper, aimed at solving this problem, is of both scientific and practical relevance. Taking into account the multifactorial nature, a class of nonlinear differential games was considered, which made it possible to accurately describe the investment process in enterprise digitalization projects. This enables the investor to analyze and identify rational investment strategies.

Keywords: digital technologies, investor, investment project, nonlinear differential games, Runge-Kutte method.

Кіріспе

Қазақстанның қоғамдық өмірінің барлық салаларында қазіргі заманғы ақпараттық-коммуникациялық технологияларды енгізу процесін арттыру, цифрлық экономиканы және Ұлттық ақпараттық инфрақұрылымды дамыту, оны әлемдік ақпараттық кеңістікке интеграциялау «Цифрлық Қазақстан» мемлекеттік бағдарламасының басым міндеттері болып табылады. Сонымен қатар, соңғы жылдары инвесторлар, АТ кәсіпорындары, мемлекеттік құрылымдар және басқа да қатысушылардың қатысуымен ақпараттық технологиялар саласындағы ұйымдардың өзара байланысының жаңа ұйымдастыру нысандарын құру процесін белсенділендіру тенденциясы бақылануда.

Цифрлық технологиялар – бұл ақпараттық қоғамдағы өмірге бейімделген тұлғаны тәрбиелеуді, тәрбиелеуді қарқындату және оңтайландыру мәселелерін табысты шешетін құрал. Цифрлық әлемге өту соңғы екі онжылдықтан аса уақытта қарқынды дамып келеді. Бүгінгі күні цифрлық технологиялар жаһандық экономикалық дамудың негізгі факторларының біріне айналып отыр.

Отандық цифрландыру саласындағы инвестициялық жобаларды бағалауға арналған ШҚҚЖ-рі аз не жоқ деп айтуға болады, сондықтанда осындай жобаларды бағалаудың тиімділігі мен нәтижесін арттыру үшін әртүрлі ШҚҚ-дың компьютерлік жүйелерін енгізу керекпіз [1].

Демек, инвестициялық жобаларды, атап айтқанда кәсіпорындарды цифрландыру саласында бағалау үшін шешім қабылдауға қолдау көрсетудің компьютерлік жүйелерін құрудың модельдері мен әдістерін дамыту өзекті міндет болып қала береді. Мақаланың өзектілігі кәсіпорындарды цифрландыру үдерісінің жедел қарқынмен дамуы және осы саладағы инвестициялық шешімдердің күрделенуімен байланысты. Инвестициялық жобаларды іске асыру барысында белгісіздік, тәуекел және инвесторлар арасындағы бәсекелестік факторлары шешім қабылдауды ғылыми тұрғыдан негіздеуді талап етеді. Осы тұрғыдан алғанда, көпфакторлы инвестициялық процестерді сипаттауда сызықтық емес дифференциалдық ойындар теориясын қолдану маңызды ғылыми мәнге ие. Ұсынылып отырған зерттеу цифрлық жобаларға инвестиция салуда ұтымды стратегияларды анықтауға мүмкіндік беретін шешім қабылдауды қолдау жүйелерін дамытуға бағытталған.

Кәсіпорынды цифрландрумен байланысты жобаларды инвестициялауға тырысатын екі инвесторлар тобы болды. Инвесторлардың әрбір тобы біртұтас ретінде әрекет етеді, осы ретте, топтағы әрбір инвестор белгілі цифрлық технологияны қаржыландырады деп есептеуге болады. Біздің ойымызша, бірінші топ бірінші инвестор, ал екінші топ екінші инвестор, біз қойылым үшін инвесторлардың қаржы ағындарының өзгерісін белгілейтін көп өлшемді кеңістіктердегі динамикалық жүйені басқарады. Жүйе тәуелді қозғалыстары бар бисызықтық көп сатылы теңдіктер жүйесімен берілген. (U) және (V) инвесторларының стратегияларының жиынтығы анықталып, S_0, F_0 терминалды беттері беріледі. Бірінші инвестордың мақсаты (қатарына инвестициялау объектісі компаниясының басшылығын да жатқызуға болатын инвесторлар тобы, одан кейін – $Inv1$) екінші инвестор қалай әрекет етпесін ($Inv2$) S_0 терминалды бетіне өзінің басқару стратегияларының көмегімен динамикалық жүйені келтіру. Екінші инвестордың $Inv2$ (немесе инвесторлар тобының) мақсаты $Inv1$ қалай әрекет етпесін, динамикалық жүйенің өзінің басқару стратегиясының көмегімен F_0-ге алып келу.

Мақалада бірінші инвестор-одақтастың көзқарасы тұрғысынан болатын мәселе қарастырылады. Екінші инвестор-одақтастың көзқарасы тұрғысынан болатын мәселені қарастырмаймыз, себебі, оның шешімі ұқсас, симметриялық салдарынан болады. Шешімі объекттерге жүйені қандай да болмасын бетіне келтіруге мүмкіндік беретін инвесторлардың және оның стратегияларының бастапқы күйлерінің жиынтығын табуда негізделеді.

Бірінші инвестор $(h_1(t), h_2(t))$ қаржылық ресурстардың екі өлшемді векторымен берілетін, ал екінші инвестор $f(t)$ қаржы ресурстарының бір өлшемді векторымен берілетін инвестициялау процесін басқаратын дифференциалдық теңдеулер жүйесі екі дифференциалдық теңдеуден тұратын шартқа арналған мысалды келтіреміз.

Зерттеу мақсаты бірінші және екінші инвестор-одақтас тараптардың көзқарастары тұрғысынан екі есепті қалыптастырудан тұрады [2]. Молюков В.П. еңбектеріне сәйкес, (1) теңдеуімен берілетін динамикалық жүйе келесі түрде жазылады:

$$\begin{cases} dh_1(t)/dt = -h_1(t) + (1-u_1(t)) \cdot h_1(t) - 2 \cdot v(t) \cdot f(t), \\ dh_2(t)/dt = -h_2(t) + (1-u_2(t)) \cdot h_2(t) - 2 \cdot v(t) \cdot f(t), \\ df(t)/dt = -f(t) + (1-v(t)) \cdot 2 \cdot f(t) - u_1(t) \cdot h_1(t) - u_2(t) \cdot h_2(t); \end{cases} \quad (1)$$

Зерттеу әдіснамасы

Красовский Н.Н. еңбектеріне сүйене отырып, аяқталу уақыты алдын ала берілген T және функционалы φ анықталған дифференциалдық ойынды қарастырайық. Мұндай ойынды кеңейтілген $\{t, x^*\} = \{t, x, x_{n+1}\}$ кеңістігінде φ^* функционалы бар минимакс–максимин типті функционалдық ойынға келтіруге болады.

Осыдан кейін $t_0 \le t \le T$ аралығында шектік шартты қанағаттандыратын үздіксіз функцияның бар екенін ұйғарайық. Бұл жағдайда кеңейтілген кеңістікте анықталатын $E(t, x^*)$ функциясын табу талап етіледі, ал ол функция үшін шектік шарт белгілі бір түрде беріледі.

$$E^*(T, x^*) = \sigma^*(x^*) = \sigma(x) + x_{n+1} \quad (2)$$

$E^*(t, x^*)$ функциясын құру барысында x_{n+1} координатасы аддитивтік түрде енгізіледі. Осыған байланысты кеңейтілген кеңістіктегі $E^*(t, x^*)$ функциясын бастапқы айнымалылар бойынша жіктеп көрсетуге болады. Нәтижесінде, аталған функция аддитивтік құрылымға ие болып, оны тиісті түрде келесі функционалдық өрнек түрінде анықтауға мүмкіндік туады.

$$E^*(t, x^*) = E(t, x) + x_{n+1} \quad (3)$$

Н.Н. Красовскийдің тиісті теоремасына сәйкес, $U^0 \div u^0(t,x)$ және $V^0 \div v^0(t,x)$ оңтайлы стратегияларының жеткілікті шарттарын тұжырымдауға болады.

Теорема 1. $E(t,x)=\sigma(t,x)$ аралығында берілген шектік $t_0 \le t \le T$ шартын қанағаттандыратын үздіксіз $E(t,x)$ функциясы бар деп ұйғарайық. Сонымен қатар, $t_0 < t < T$ аймағында бұл функцияның барлық айнымалылар бойынша үздіксіз жеке туындылары бар және ол аталған облыста қойылған қажетті шарттарды орындайды деп есептейік.

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\left(\sum_1^n \frac{\partial E}{\partial x_i} M_i(t,x,u,v) + \aleph(t,x,u,v) + \frac{\partial E}{\partial t}\right) =$$
$$= \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\left(\sum_1^n \frac{\partial E}{\partial x_i} M_i(t,x,u,v) + \aleph(t,x,u,v) + \frac{\partial E}{\partial t}\right) = 0 \tag{4}$$

$t_0 \le t < T$ аймағында анықталған, берілген шарттарды қанағаттандыратын $U^0 \div u^0(t,x)$ және $V^0 \div v^0(t,x)$ стратегиялары болсын.

Онда берілген $\{t_0, x_0\}$ бастапқы позиция үшін U^0, V^0 стратегиялары φ минимакс–максимин функционалының дифференциалды ойынның $\{U^0, V^0\}$ тең нүктесін құрайды.

$E(t,x)$ функиясын $E^*(t,x^*) = E(t,x) + x_{n+1}$ алмастыруға болады, егер $x_{n+1,0} = 0$ болғанда.

Біз қарастырып отырған дифференциалды теңдеудің $E^*(t,x^*) = E^*, x, x_{n+1}$ функциясы үшін жеке туындысы келесі теңдеу болады.

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\left(\sum_1^{n+1} \frac{\partial E^*}{\partial h_i f_i} M_i(t,h,f,u,v) + \frac{\partial E^*}{\partial t}\right) = 0, \tag{5}$$

қажетті шеткі шартпен бірге

$$E^*(T,x^*) = \sigma(h,f) + x, x_{n+1}, \tag{6}$$

ауысымды түрлендіруге мүмкіндік берді.

$$\tilde{E} = E + \alpha, \qquad \widetilde{x_{n+1}} = x_{n+1} + \alpha.$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v \tag{7}$$

Дифференциалды теңдеудің шешімін табы үшін динамикалық бағдарламау әдісі қолданылады. Функцияналы келесі түрдегідей беріледі

$$\varphi = \int_{t_0}^{T} (\|x[t]\|^2 + \|u[t]\|^2 - \|v[t]\|^2) dt + \sum_{i,j}^{n} \sigma_{i,j} x_i\,[T] x_j[T]. \tag{8}$$

Мұнда $A(t), B(t)$ және $C(t)$ — сәйкес өлшемді функциялардың үздіксіз матрицалары.

Теорема 1-дің шарттарын қанағаттандыратын $E(t,x)$ функциясын анықтау мақсат етіледі. Бұл функция квадраттық форма түрінде іздестіріліп, сол түрде табылатын болады.

$$E(t,x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}\,(t) x_i x_j. \tag{9}$$

Аяқталу уақыты шекті (яғни Т уақытымен аяқталатын) күрделі ойынға сәйкес.

$$\left(\frac{dE^*}{dt}\right)_{u,v} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{u,v} + \aleph(t,x,u,v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dE}{dx_i} M_i(t,x,u,v) + \aleph(t,x,u,v) + + \frac{dE}{dt} =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dE}{dx_i}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x + \sum_{j=1}^{r} b_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{s} c_{ij} v_i\right] + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{r} u_i^2 - - \sum_{i=1}^{s} v_i^2 + \frac{dE}{dt} =$$

$$2\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + +\sum_{j=1}^{r} b_{ij}u_j + \sum_{j=1}^{s} c_{ij}v_j\right] + +\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{r} u_i^2 + \sum_{i=1}^{s} v_i^2 + + \sum_{i,j=1}^{n} \dot{a}_{ij}x_i x_j \,. \quad (10)$$

Минимакс шартына (10) сәйкес, төменде қажет болатын екі есептің шешімін анықтаймыз: олардың біріншісі – берілген өрнектің u айнымалысы бойынша минимумын табу есебі.

$$\beta^{(1)}(u) = 2\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_k \sum_{j=1}^{r} b_{ij}u_j + \sum_{i=1}^{r} u_i^2 \quad (11)$$

Екінші тапсырма — берілген өрнектің v айнымалысы бойынша максимумын табу есебі.

$$\beta^{(2)}(v) = 2\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_k \sum_{j=1}^{s} c_{ij}v_j - \sum_{i=1}^{s} v_i^2 \quad (12)$$

u^*және v^*қажетті мәндері үшін келесі өрнектерді табайық:

$$u^* = \left\{u_j^* = -\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}b_{ij}x_k\,, \quad j = 1, \dots, r\right\}, \quad (13)$$

$$v^* = \left\{v_j^* = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}c_{ij}x_k\,, \quad j = 1, \dots, s\right\}. \quad (14)$$

Осы табылған мәндерді u және v үшін (9) өрнегіне қойып, әрі (4) теңестіру шартына сәйкес алынған өрнектің нөлге тең екенін ескерсек, төмендегі теңдеуге келеміз:

$$2\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}f_i x_j - \sum_{j=1}^{r}\sum_{i,j,k,p=1}^{n} a_{ki}a_{pj}\, b_{kl}b_{pl}x_i x_j + + \sum_{i=1}^{s}\sum_{i,j,k,p=1}^{n} a_{ki}\, a_{pj}c_{kl}c_{pl}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} h_i^2 f_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \dot{K}_{i,j}\, x_i x_j = 0 \quad (15)$$

Соңында (15) тең $x_i x_j$ көбейтінділерінің коэффициенттерін нөлге теңестіріп, қажетті функциялар үшін қарапайым дифференциалдық теңдеулерді аламыз:

$$\dot{K}_{ij} = -2\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k,p=1}^{n} a_{ki}a_{pj}\, b_{kl}b_{pl} - -\sum_{i=1}^{s}\sum_{k,p=1}^{n} a_{ki}\, a_{pj}c_{kl}c_{pl} - \delta_{i,j}, \quad (16)$$

мұндағы $\delta_{i,j}$– Кронекер таңбасы, яғни $i \neq j$ үшін $\delta_{i,j} = 1$, $\delta_{i,j} = 0$.

$E(T, x) = \sigma(x)$ шектік шартты да қанағаттандыру үшін (16) теңдігін сәйкес (8) және (9) теңдеулер шарты бойынша интегралдануы керек.

$$\alpha_{ij}(T) = \sigma_{ij} \quad (17)$$

(16) формуласы Риккати теңдеулер жүйесін анықтайды. Қалай болғанда да, бұл жүйенің τ_*, T уақыт аралығында $t = T$ нүктесіне сол жақтан іргелес (яғни Т-ге жақындағанда сол жақ шектен анықталатын) шешімі бар [3-7].

Есептің қойылымы. (7) теңдеуіне сүйене отырып, (1) бойынша үзіліссіз дифференциалдық теңдеуді келесі формада жазамыз:

$$\begin{cases} \dot{h_1} = -h_1 u_1 - 2vf \\ \dot{h_2} = -h_2 u_2 - 2vf \\ \dot{f} = f - 2vf - u_1 h_1 - u_2 h_2 \end{cases} \tag{18}$$

мұнда максимум мәнін беретін h_1, h_2 мен f_1 басқарушы параметрлерінің мәндерін табу керек.

$$\dot{x} = Ax + B(x)u + C(x)v\,, \tag{19}$$

$$x(0) = x_0,$$

Содан кейін (7) теңдеуіне сүйене отырып, (18) теңдеуін матрицалық түрге келтіріп аламыз.

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathrm{f}\ ,\ B_u = \begin{pmatrix} -h_1 & 0 \\ 0 & -h_2 \\ -h_1 & -h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\ c_v = \begin{pmatrix} -2f \\ -2f \\ f \end{pmatrix} v.$$

Басқару сапасы келесі квадраттық функцианалмен беріледі.

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} (x^* Q_{(x)} x + u^* R_1 u - v^* R_2 v)\, dt + \frac{1}{2} x^*(T) F x(T) \tag{20}$$

Мұнда Q, R_1, R_2, F тиісінше $(n \times n)$ және $(m \times m)$ өлшемді берілген матрицалар;

олар симметриялық, үздіксіз әрі шектелген болады және $Q(t) \geq 0$ (теріс емес анықталған), $R(t) > 0$ (біртекті оң анықталған) шарттарын қанағаттандырады.

Сондай-ақ $x^* = (h_1, h_2, f)$, «*» мұндағы «*» белгісі матрицаны (векторды) транспозициялау (transpose) операциясын білдіреді.

$$Q_i = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix} > 0,\ R_1 = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{12} \end{pmatrix} > 0\ ,\ R_2 > 0\ ,$$

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Гамильтон-Якоби-Беллман теңдеуі келесі түрде болады.

$$\min_u \max_v \left\{ \frac{\partial E}{\partial t} + \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^* (Ax + Bu + Cv) + \frac{1}{2} x^* Q_{(x)} x + \frac{1}{2} u^* R_1 u - \frac{1}{2} v^* R_2 v \right\} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (\frac{\partial E}{\partial x})^* \left(Ax + BR_1^{-1} B^* \frac{\partial E}{\partial x} + CR_1^{-1} C^* \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} u^* R_1 u - \frac{1}{2} v^* R_2 v + \frac{1}{2} x^* Q_{(x)} x =$$
$$= \frac{\partial E}{\partial t} + (\frac{\partial E}{\partial x})^* Ax - \frac{1}{2} (\frac{\partial E}{\partial x})^* (BR_1^{-1} B^* - CR_1^{-1} C^*) \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{2} x^* Q_{(x)} x = 0$$

u және v қажетті мәндері үшін келесі өрнектерді табамыз:

$$\begin{cases} u = -R_1^{-1} B_{(x)}^* \frac{\partial E}{\partial x}, \\ v = R_2^{-1} C_{(x)}^* \frac{\partial E}{\partial x} \end{cases} \tag{21}$$

Теорема 1-дің шарттарын қанағаттандыратын $E(t, x)$ функциясын табу талап етіледі. Бұл функция квадраттық форма түрінде, яғни

$$E(t,x) = \frac{1}{2}x^*Kx \tag{22}$$

түрінде іздестірілсін.

Онда $\frac{1}{2}x^*\left(\dot{K} + KA + A^*K + KBR_1^{-1}B^*K + KCR_2^{-1}C^*\right)K + Q_{(x)}x = 0$

$$\dot{K} = -KA - A^*K + K(BR_1^{-1}B^* - CR_2^{-1}C^*)K - Q_{(x)}, K(T) = F$$

мұндағы $K \to 3 \times 3$, $K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} > 0$ үш өлшемді квадраттық матрица болады.

$$KA = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{11} & -K_{12} & -K_{13} \\ -K_{21} & -K_{22} & -K_{23} \\ -K_{31} & -K_{32} & -K_{33} \end{pmatrix};$$

$$KA^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix};$$

$$\dot{K} = 2\begin{pmatrix} -K_{11} & -K_{12} & -K_{13} \\ -K_{21} & -K_{22} & -K_{23} \\ -K_{31} & -K_{32} & -K_{33} * 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$K(T) = F = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, t = 0\_5, T = 5.$$

Алдымен K матрицасын анықтап, оны (21) және (22) теңдеулеріне қоямыз. Нәтижесінде u, v және E шамаларының мәндері табылады. Бұдан кейін алынған u және v мәндерін (19) өрнегіне қоямыз. Осылайша (18) жүйесі Рунге–Кутта әдісі арқылы сандық түрде шешіледі [7–10].

Жүргізілген есептеу эксперименттері:

Тұрақты функциялар үшін келесі мәндер берілді.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -15 \\ -20 & -15 \end{pmatrix}, C = (-10, -10, -5), \ R_1 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix}, R_2 = 1/500,$$

$$x = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 5{,}5e^{2T}e^{-2t} - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 6e^{2T}e^{-2t} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2}e^{2T}e^{-2t} - \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} -20 & 0 & -20 \\ 0 & -15 & -15 \end{pmatrix}.$$

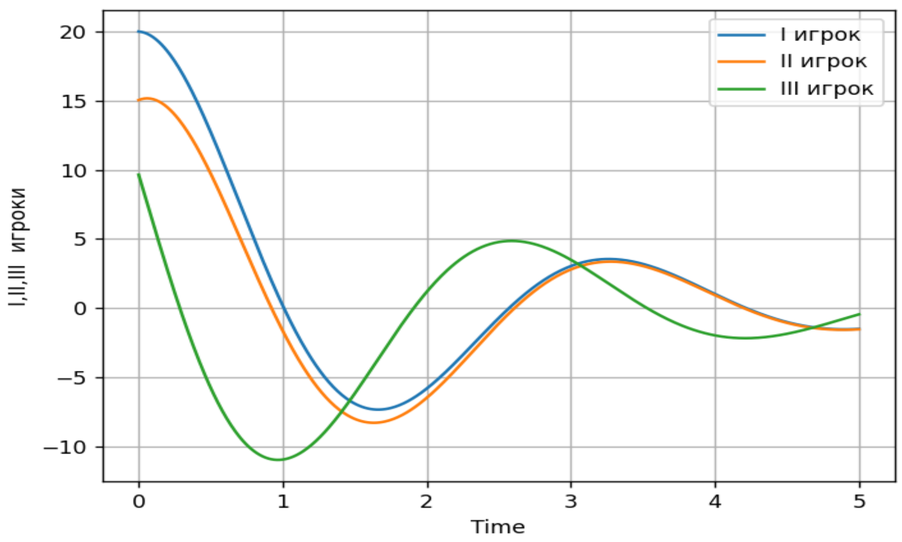
$$R_1^{-1}B^T = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -20 & 0 & -20 \\ 0 & -15 & -15 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -10 & 0 & -10 \\ 0 & -7{,}5 & -7{,}5 \end{pmatrix}.$$

$$Kx = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

$$u = R_1^{-1} B^T K x = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 \\ 0 & 7{,}5 & 7{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \\ 50 \end{pmatrix} = (7.5 \;\; 4.69), \;\; v = -4.5.$$

$u > 1, u = 1, v > -1, u = -1, \;\; u_1 = 1, u_2 = 1, v = -1.$

Осы табылған мәндерді Рунге–Кутта әдісі арқылы сандық түрде есептеу нәтижесінде төменде келтірілген график алынады.

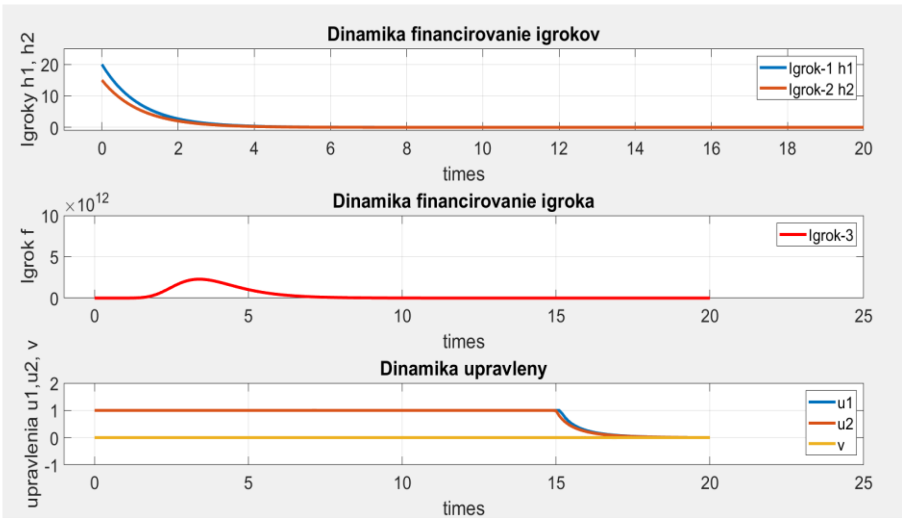


Сурет 1. Инвесторлардың инестициалық жобаларды қаржыландыру траекториясы

Айнымалы функциялар үшін алынған нәтижелер.

$$X = (20{,}15{,}30), R1 = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix}, R = 500, T = 5, K = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Осы табылған мәндерді Рунге–Кутта әдісі арқылы сандық түрде анықтау нәтижесінде төменде келтірілген график алынады.



Сурет 2. Инвесторлардың инестициалық жобаларды қаржыландыруларының өзгеру динамикасы

Қорытынды

Зерттеу барысында кәсіпорындарды цифрландыруға бағытталған инвестициялық жобаларды бағалауға арналған шешім қабылдауды қолдау моделі ұсынылды. Модель тұрақты және айнымалы параметрлер жағдайында төртінші ретті Рунге–Кутта әдісі арқылы есептеліп, Python және Matlab орталарында тексерілді. Алынған нәтижелер ұсынылған тәсілдің инвестициялық шешімдерді негіздеуде тиімді әрі практикалық тұрғыдан қолдануға жарамды екенін көрсетті. Сонымен қатар модель инвестициялық процестің динамикасын талдауға және әртүрлі сценарийлер жағдайында инвесторлардың стратегияларын бағалауға мүмкіндік береді. Зерттеу нәтижелері цифрлық жобаларды жоспарлау мен басқаруда қолданбалы маңызға ие.

Пайдаланылған дереккөздер тізімі

*[1]*https://www.bugin.kz/18839-tsifrlyq-tekhnologiyalar.

[2]Isaacs, R. Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization. — *New York: John Wiley & Sons, 1965. — 384 p.*

[3]Başar, T., Olsder, G. J. Dynamic Noncooperative Game Theory. — *SIAM, 1999.*

[4]Dockner, E., Jørgensen, S., Van Long, N., Sorger, G. Differential Games in Economics and Management Science. — *Cambridge University Press, 2000.*

[5]Krasovskii, N. N., Subbotin, A. I. Game-Theoretical Control Problems. — *Springer, 1988.*

[6] Akhmetov, B. B., Lakhno, V. A., Akhmetov, B. S., & Malyukov, V. P. The Choice of Protection Strategies During the Bilinear Quality Game On Cyber Security Financing. Bulletin of The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, (3), - 2018. -P.6–14.

[7]Malyukov, V.P. (1993). Discrete-approximation method for solving a bilinear differential game, Cybernetics and Systems Analysis, 29(6), pp. 879 - 888. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90001-3

[8]Akhmetov, B., Lakhno, V., Akhmetov, B., Alimseitova, Z. Development of sectoral intellectualized expert systems and decision making support systems in cybersecurity, Advances in Intelligent Systems and Computing, Vol. 860. - 2019. -P. 162-171. - DOI: 10.1007/978-3-030-00184-1_15

[9] Smit, H. T., &Trigeorgis, L. (2015). Flexibility and games in strategic investment.

[10] Arasteh, A. (2017). Considering the investment decisions with real options games approach. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 72, pp. 1282-1294. - DOI: 10.1016/j.rser.2016.10.043

References

*[1]*https://www.bugin.kz/18839-tsifrlyq-tekhnologiyalar.

[2] Isaacs, R. Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization. — New York: John Wiley & Sons, 1965. — 384 p.

[3] Başar, T., Olsder, G. J. Dynamic Noncooperative Game Theory. — SIAM, 1999.

[4] Dockner, E., Jørgensen, S., Van Long, N., Sorger, G. Differential Games in Economics and Management Science. — Cambridge University Press, 2000.

[5] Krasovskii, N. N., Subbotin, A. I. Game-Theoretical Control Problems. — Springer, 1988.

[6]Akhmetov, B. B., Lakhno, V. A., Akhmetov, B. S., & Malyukov, V. P. The Choice of Protection Strategies During the Bilinear Quality Game On Cyber Security Financing. Bulletin of The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, (3), - 2018. -P.6–14.

[7]Malyukov, V.P. (1993). Discrete-approximation method for solving a bilinear differential game, Cybernetics and Systems Analysis, 29(6), pp. 879-888. - DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90001-3

[8]Akhmetov, B., Lakhno, V., Akhmetov, B., Alimseitova, Z. Development of sectoral intellectualized expert systems and decision making support systems in cybersecurity, Advances in Intelligent Systems and Computing, Vol. 860. - 2019. -P. 162-171. - DOI: 10.1007/978-3-030-00184-1_15

[9] Smit, H. T., &Trigeorgis, L. (2015). Flexibility and games in strategic investment.

[10] *Arasteh, A. (2017). Considering the investment decisions with real options games approach. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 72, pp. 1282-1294. - DOI: 10.1016/j.rser.2016.10.043*