

А.Б. Утесов *, Г.И. Утесова

Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, г.Актобе, Казахстан

*e-mail: adilzhan_71@mail.ru

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ИЗ КЛАССА НИКОЛЬСКОГО - БЕСОВА

Аннотация

Цель настоящего исследования заключается в построении конечного объекта (оператора дискретизации), который с любой точностью приближает решение уравнения теплопроводности с начальным условием из многомерного функционального класса Никольского - Бесова в некоторой метрике. Методология исследования основана на известных утверждениях теории приближений. Актуальность проведенного здесь исследования объясняется следующими обстоятельствами: во - первых, в данной статье для представимого в виде абсолютно сходящегося кратного функционального ряда и принадлежащего периодическому классу Никольского - Бесова решения уравнения теплопроводности предложен с любой точностью приближающий его оператор дискретизации, который построен по значениям начального условия в точках равномерной сетки единичного куба; во - вторых, доказано, что любой оператор дискретизации, построенный по заданному конечному набору значений определенных на рассматриваемом функциональном классе линейных функционалов не улучшает порядок погрешности, полученной при приближении решения предложенным оператором дискретизации.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, оператор дискретизации, порядок погрешности, начальное условие, линейные функционалы, класс Никольского - Бесова.

А.Б. Утесов, Г.И. Утесова

Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІНІҢ НИКОЛЬСКИЙ - БЕСОВ КЛАСЫНА ТИЕСІЛІ ШЕШІМІН ДИСКРЕТТЕУ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Осы зерттеудегі мақсат – алғашқы шарты көпөлшемді Никольский - Бесов класында жататын жылуөткізгіштік теңдеуі шешімін қандай да бір метрикада кез келген дәлдікпен жуықтайтын ақырлы объектіні (дискреттеу операторын) құру. Зерттеу әдістемесі жуықтаулар теориясының белгілі тұжырымдарына сүйенеді. Осында жүргізілген зерттеудің өзектілігі келесі жайттармен түсіндіріледі: біріншіден, бұл мақалада жылуөткізгіштік теңдеуінің абсолютті жинақталатын еселі функционалдық қатар түрінде болатын және периодты Никольский - Бесов класында жататын шешімін кез келген дәлдікпен жуықтайтын, алғашқы шарттың бірлік кубтың біркелкі торының нүктелеріндегі мәндері бойынша құрылған дискреттеу операторы ұсынылған; екіншіден, қарастырып отырған функциялық класта анықталған сызықтық функционалдар мәндерінің алдын - ала берілген ақырлы жиынтығы бойынша құрылған кез келген дискреттеу операторы шешімді ұсынылған дискреттеу операторымен жуықтауда пайда болатын қателікті реті бойынша жақсартпайтыны дәлелденген.

Түйін сөздер: жылуөткізгіштік теңдеуі, дискреттеу операторы, қателік реті, алғашқы шарт, сызықтық функционалдар, Никольский - Бесов класы.

A.B. Utessov, G.I. Utessova

Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

**ON THE DISCRETIZATION OF THE HEAT EQUATION SOLUTION
FROM NIKOL'SKII - BESOV CLASS**

Abstract

The aim of this study is to construct a finite object (discretization operator) that approximates with any accuracy the solution of the heat equation with an initial condition from the multidimensional Nikol'skii - Besov functional class in a certain metric. The research methodology is based on well-known statements of approximation theory. The relevance of the study carried out here is explained by the following circumstances: firstly, in this article, for a solution of the heat equation representable in the form of an absolutely convergent multiple functional series and belonging to the periodic Nikol'skii - Besov class, a discretization operator approximating it with any accuracy is proposed, constructed from the values of the initial condition at the points of a uniform grid of the unit cube; secondly, it is proven that any discretization operator constructed from a given finite set of values of linear functionals defined on the functional class under consideration does not improve the order of the error obtained when approximating the solution by the proposed discretization operator.

Keywords: heat equation, discretization operator, error order, initial condition, linear functionals, Nikol'skii - Besov class.

Введение

Основные положения. В статье рассмотрена задача оптимальной дискретизации решения уравнения теплопроводности с начальным условием f из класса Никольского – Бесова. Погрешность дискретизации оценена в метрике пространства $L^{\infty, q}$. Результатом данного исследования является построение оптимального оператора дискретизации по значениям f в точках равномерной сетки куба $[0,1]^s$.

Впервые задача дискретизации решения уравнения теплопроводности была рассмотрена китайскими математиками Хуа Ло Кеном и Вань Юанем [1, с. 217- 219]. Они доказали, что решение $u = u(t, x; f)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^s$$

с начальным условием $u(0, x; f) = f(x)$ из класса Коробова E представляется в виде абсолютно сходящегося кратного ряда

$$u(t, x; f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)} \quad (\hat{f}(m) = \int_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m, x)} dx) \quad (1)$$

и оценили сверху погрешность отклонения от $u = u(t, x; f)$ оператора дискретизации, построенного по оптимальным параллелепипедальным сеткам. Затем эта задача при различных функциональных классах, содержащих начальные условия $u(0, x; f) = f(x)$ и обеспечивающих абсолютную сходимость ряда (1) изучалась в работах казахстанских математиков в рамках общей постановки задачи восстановления по конечной числовой информации об исследуемом объекте (см., например, [2-5] и библиографии в них).

Приведем в рамках общей постановки, изложенной в [3], определения вычислительного агрегата, точного порядка оптимального восстановления, оптимального вычислительного агрегата. Пусть даны натуральное число N , нормированные пространства X и Y числовых

функций, определенных на множествах Ω и Ω_1 соответственно, функциональный класс $F \subset X$, отображение $T: F \mapsto Y$, и функция

$$\varphi_N \equiv \varphi_N(z_1, \dots, z_N; y): \mathbb{C}^N \times \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C},$$

которая при каждом фиксированном $(z_1, \dots, z_N)$ как функция от переменной y принадлежит пространству Y , и пусть через $l^{(N)}$ обозначен N -мерный вектор $(l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)})$ с функционалами $l_N^{(1)}: F \rightarrow \mathbb{C}, \dots, l_N^{(N)}: F \rightarrow \mathbb{C}$.

Определение 1. Для заданной пары $(l^{(N)}, \varphi_N)$ числовая функция

$$\varphi_N(l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f); y)$$

от переменной y называется вычислительным агрегатом.

Для положительных последовательностей $\{a_n\}_{n \geq 1}$ и $\{b_n\}_{n \geq 1}$ запись $a_n \ll b_n$ будет означать существование некоторой независимой от $n \in \mathbb{N}$ величины $C > 0$ такой, что $a_n \leq C b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. При этом значения $C > 0$ в разных выражениях могут быть различными. А одновременное выполнение соотношений $a_n \ll b_n$ и $b_n \ll a_n$ записывается в виде $a_n \asymp b_n$.

Далее, для заданных F, Y, D_N и $T: F \mapsto Y$ определим величину

$$\delta_N(D_N, T, F)_Y = \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N((l^{(N)}, \varphi_N), T, F)_Y, \quad (2)$$

где D_N – множество всех пар $(l^{(N)}, \varphi_N)$,

$$\delta_N((l^{(N)}, \varphi_N), T, F)_Y = \sup_{f \in F} \| (Tf)(\cdot) - \varphi_N(l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f); \cdot) \|_Y.$$

Определение 2. Положительная последовательность $\{\psi_N\}_{N \geq 1}$ такая, что

$$\delta_N(D_N, T, F)_Y \asymp \psi_N \quad (3)$$

называется точным порядком оптимального восстановления.

Определение 3. Вычислительный агрегат $(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N) \equiv \tilde{\varphi}_N(\tilde{l}_N^{(1)}(f), \dots, \tilde{l}_N^{(N)}(f); \cdot)$, реализующий соотношение (3), называется оптимальным.

Конкретизируя в (2) класс F , пространство Y , отображение $T: F \mapsto Y$ и множество D_N получаем различные задачи оптимального восстановления. Если в качестве отображения T рассматривается решение какого-либо уравнения в частных производных, то вместо терминов «восстановление» и «вычислительный агрегат» используются термины «дискретизация» и «оператор дискретизации» соответственно (см., например, [2], [6 - 8]). В случае $Tf(\cdot) = u(\cdot; f)$ придем к задаче оптимальной дискретизации решения уравнения теплопроводности с начальным условием из класса F операторами дискретизации $(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N$ в метрике пространства Y .

В [2] при $F = B_{2, \theta}^r, Y = L^{\infty, q}, Tf(\cdot) = u(\cdot; f), D_N = L_N$ установлено соотношение (определение класса $B_{2, \theta}^r$ и пространства $L^{\infty, q}$ приведены ниже).

$$\delta_N(L_N, Tf(\cdot) = u(\cdot; f), B_{2,\theta}^r)_{L^{q,\infty}} \asymp \frac{N^{1/2-1/q}}{N^{r/s}}, 2 \leq q \leq \infty, \quad (4)$$

где символом L_N обозначено множество операторов дискретизации $(l^{(N)}, \varphi_N)$ с

линейными функционалами $l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}$, определенными на рассматриваемом классе $B_{2,\theta}^r$.

При этом точный порядок (4) реализуется оператором дискретизации, построенной по коэффициентам Фурье начального условия.

В данной работе доказано, что оператор дискретизации $(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)$, построенный по значениям начального условия f в заданных точках $\tilde{\xi}_N^{(1)}, \dots, \tilde{\xi}_N^{(N)}$ единичного куба $[0,1]^s$ также реализует точный порядок (4).

Методология исследования

Приведем необходимые обозначения, определения класса $B_{2,\theta}^r$ и пространства $L^{q,\infty}$, а также вспомогательные утверждения.

Всюду ниже, как обычно, $[a]$ — целая часть числа a , для конечного множества A символом $|A|$ обозначается число его элементов, норма вектора $m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s$ определяется равенством $\|m\| = \max\{|m_1|, \dots, |m_s|\}$, символ $\square$ будет означать конец доказательства.

Класс Никольского — Бесова $B_{2,\theta}^r \equiv B_{2,\theta}^r[0,1]^s$, по определению, состоит из всех суммируемых на $[0,1]^s$ и 1 — периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье — Лебега $\hat{f}(m)$ которых удовлетворяют условию

$$1 \geq \|f\|_{B_{2,\theta}^r} = \begin{cases} \sup_{k=0,1,2,\dots} 2^{kr} \left(\sum_{m \in I_k} |\hat{f}(m)|^2 \right)^{1/2}, \text{ if } \theta = \infty; \\ \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kr\theta} \left(\sum_{m \in I_k} |\hat{f}(m)|^2 \right)^{\theta/2}, \text{ if } 1 \leq \theta < \infty, \end{cases}$$

где, здесь и всюду ниже, $I_k = \{m \in Z^s : [2^{k-1}] \leq \|m\| < 2^k\}$ для каждого $k \in \{0,1,2,\dots\}$.

$L^{\infty,q} \equiv L^{\infty,q}([0;+\infty) \times [0,1]^s)$, $1 \leq q \leq \infty$ определяется как множество всех функций $g:[0;+\infty) \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что для каждого $t \in [0;+\infty)$ функция $g_t(x) = g(t,x)$ как функция аргумента $x \in \mathbb{R}^s$ является измеримой, периодической с периодом 1 по каждой из своих s переменных и удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{L^{\infty,q}} \equiv \sup_{t \geq 0} \text{vrai} \|g(t, \cdot)\|_q < +\infty (L^{\infty}[0,1]^s \equiv C[0,1]^s).$$

Лемма 1. Если $r > s/2$, то для каждой функции $f \in B_{2,\theta}^r$ ее тригонометрический ряд

Фурье $\sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m,x)}$ сходится абсолютно при любом методе суммирования.

Доказательство. Применяя неравенство Гёльдера для конечной суммы

$$\sum_{m \in I_k} \hat{f}(m), k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

и принимая во внимание включение $B_{2, \theta}^r \subset B_{2, \infty}^r \equiv H_2^r$ (см., например, [9, с. 230]), имеем

$$\sum_{m \in I_k} |\hat{f}(m)| \ll \left(\sum_{m \in I_k} |\hat{f}(m)|^2 \right)^{1/2} 2^{ks/2} \ll \frac{1}{2^{kr}} 2^{ks/2}. \quad (5)$$

откуда, согласно условию $r > s/2$, следует $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m \in I_k} |\hat{f}(m)| < +\infty$. Поэтому, при любом

методе суммирования имеет место равенство $\sum_{m \in Z^s} |\hat{f}(m)| = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m \in I_k} |\hat{f}(m)|$. Согласно этому

равенству тригонометрический ряд Фурье $\sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m, x)}$ каждой функции $f \in B_{2, \theta}^r$

сходится абсолютно при любом методе суммирования. $\square$

Лемма 2 (см. [2], Лемма В). Пусть дано целое положительное число s . Для всякой 1-периодической по каждой переменной функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ с абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом Фурье решение $u = u(t, x; f)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}$, $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^s$ с начальным условием $u(0, x) = f(x)$

представимо в виде $u(t, x; f) = \sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)}$.

Лемма 3 (см. [10, с. 22]). Пусть для 1 – периодической по каждой переменной суммируемой функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ ее ряд Фурье $\sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m, x)}$ сходится абсолютно. Тогда для

всякого $m \in Z^s$ и набора целых положительных чисел $N_1, \dots, N_s$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \hat{f}(m) - \frac{1}{N_1 \dots N_s} \sum_{n_1=1}^{N_1} \dots \sum_{n_s=1}^{N_s} f(n_1/N_1, \dots, n_s/N_s) e^{-2\pi i m_1(n_1/N_1)} \times \dots \times e^{-2\pi i m_s(n_s/N_s)} = \\ = - \sum_{n \in Z^s / \theta} \hat{f}(n_1 N_1 + m_1, \dots, n_s N_s + m_s), \end{aligned}$$

где $\theta = (0, \dots, 0) \in Z^s$.

Результаты исследования

Далее, ради краткости, вместо

$\delta_N(L_N, Tf(\cdot) = u(\cdot; f), B_{2, \theta}^r)_{L^{\infty, q}}, \delta_N((\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N), Tf(\cdot) = u(\cdot; f), B_{2, \theta}^r)_{L^{\infty, q}}$ и $\|\cdot\|_{L^q}$ будем писать

$\delta_N(L_N), \delta_N((\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N))$ и $\|\cdot\|_q$ соответственно.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть даны $s \in \mathbb{N}, 2 \leq q \leq \infty, 1 \leq \theta \leq \infty$ и пусть $r > s/2$. Тогда для каждого $N \equiv N(K) = K^s, K = 1, 2, \dots$ имеет место соотношение

$$\delta_N((\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)) \asymp N^{1/2 - 1/q - r/s}, \quad (6)$$

где оператор дискретизации $(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)$ определен по некоторому упорядочению $\tilde{\xi}_N^{(1)}, \dots, \tilde{\xi}_N^{(N)}$ множества $\{(n_1/K, \dots, n_s/K) : n_i = 1, \dots, K, i = 1, \dots, s\}$ равенствами

$$\tilde{l}_N^{(1)}(f) = f(\tilde{\xi}_N^{(1)}), \dots, \tilde{l}_N^{(N)}(f) = f(\tilde{\xi}_N^{(N)}) \text{ и}$$

$$\tilde{\varphi}_N(\tau_1, \dots, \tau_N; t, x) = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N \tau_\nu \sum_{m \in \Pi_K} e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x - \tilde{\xi}_N^{(\nu)})},$$

$$\Pi_K = \{m \in \mathbb{Z}^s : |m_1| < K/4, \dots, |m_s| < K/4\}.$$

Доказательство. Ясно, что для каждой функции $f \in B_{2, \theta}^r$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} (\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)(t, x) &= \tilde{\varphi}_N(\tilde{l}_N^{(1)}(f), \dots, \tilde{l}_N^{(N)}(f); t, x) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N f(\tilde{\xi}_N^{(l)}) \sum_{m \in \Pi_K} e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x - \tilde{\xi}_N^{(l)})} = \\ &= \sum_{m \in \Pi_K} \left(\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N f(\tilde{\xi}_N^{(l)}) e^{-2\pi i(m, \tilde{\xi}_N^{(l)})} \right) e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)} = \\ &= \sum_{m \in \Pi_K} \left(\frac{1}{K^s} \sum_{n_1=1}^K \dots \sum_{n_s=1}^K f(n_1/K, \dots, n_s/K) e^{-2\pi i m_1(n_1/K)} \times \dots \times e^{-2\pi i m_s(n_s/K)} \right) \times \\ &\quad \times e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)}. \end{aligned} \quad (7)$$

По леммам 1 и 2 имеет место равенство

$$u(t, x; f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)}.$$

Поэтому, в силу равенств (7) и Леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} u(t, x; f) - (\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)(t, x) &= \\ &= \sum_{m \notin \Pi_K} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)} + \\ &+ \sum_{m \in \Pi_K} \left\{ - \sum_{n \in \mathbb{Z}^s \setminus \theta} \hat{f}(n_1 K + m_1, \dots, n_s K + m_s) \right\} e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, применяя равенство Парсеваля, для каждого $t \in [0, \infty)$ получаем

$$\left\| \sum_{m \notin \Pi_K} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2 (m,m)t} e^{2\pi i (m,\cdot)} \right\|_2 \leq \left(\sum_{m \notin \Pi_K} |\hat{f}(m)|^2 \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad (9)$$

$$\left\| \sum_{m \in \Pi_K} \left\{ - \sum_{n \in Z^s \setminus \theta} \hat{f}(n_1 K + m_1, \dots, n_s K + m_s) \right\} e^{-4\pi^2 (m,m)t} e^{2\pi i (m,x)} \right\|_2 << \\ << \left(\sum_{m \in \Pi_K} \left| \sum_{n \in Z^s \setminus \theta} \hat{f}(n_1 K + m_1, \dots, n_s K + m_s) \right|^2 \right)^{1/2} \quad (10)$$

В работе [10, с. 49 и с. 54] для функции f из обобщенного класса Никольского $H_2^{\omega_r}$ получены следующие неравенства

$$\left(\sum_{m \notin \Pi_K} |\hat{f}(m)|^2 \right)^{1/2} << \omega_r(1/N^{1/s}) \quad \text{и} \quad (11)$$

$$\left(\sum_{m \in \Pi_K} \left| \sum_{n \in Z^s \setminus \theta} \hat{f}(n_1 K + m_1, \dots, n_s K + m_s) \right|^2 \right)^{1/2} << \omega_r(1/N^{1/s}), \quad (12)$$

где через $\omega_r(\delta)$ обозначена функция типа модуля гладкости порядка r . При $\omega_r(\delta) = \delta^r$,

$\delta \in [0,1]$ класс $H_2^{\omega_r}$ обращается в класс Никольского H_2^r . Поэтому, для каждой $f \in B_{2,\theta}^r$,

в силу включения $B_{2,\theta}^r \subset B_{2,\infty}^r \equiv H_2^r$ и соотношений (8) - (12), имеет место неравенство

$$\|u(t, \cdot; f) - (\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)(t, \cdot)\|_2 << \frac{1}{N^{r/s}}, t \in [0, \infty). \quad (13)$$

Из (8) для всех $t \in [0, \infty)$ следует

$$\|u(t, \cdot; f) - (\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)(t, \cdot)\|_\infty \leq \sum_{m \notin \Pi_K} |\hat{f}(m)| + \\ + \sum_{m \in \Pi_K} \sum_{n \in Z^s \setminus \theta} |\hat{f}(n_1 K + m_1, \dots, n_s K + m_s)| \quad (14)$$

Используя неравенство Гёльдера, в силу включения $B_{2,\theta}^r \subset B_{2,\infty}^r \equiv H_2^r$ и определения класса $B_{2,\infty}^r \equiv H_2^r$, имеем

$$\sum_{m \notin \Pi_K} |\hat{f}(m)| \leq \sum_{\|m\| \geq K/4} |\hat{f}(m)| \leq \sum_{\|m\| \geq 2^{l-2}} |\hat{f}(m)| = \\ = \sum_{i=l-1}^{\infty} \sum_{2^{i-1} \leq \|m\| < 2^i} |\hat{f}(m)| << \sum_{i=l-1}^{\infty} \left(\sum_{2^{i-1} \leq \|m\| < 2^i} |\hat{f}(m)|^2 \right)^{1/2} \times \\ \times \left(\sum_{2^{i-1} \leq \|m\| < 2^i} 1 \right)^{1/2} << \sum_{i=l-1}^{\infty} 2^{-ir} 2^{is/2},$$

откуда, принимая во внимание условие $r > s/2$, получаем

$$\sum_{m \notin \Pi_K} |\hat{f}(m)| << \frac{\sqrt{N}}{N^{r/s}}. \quad (15)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in \Pi_K} \sum_{n \in Z^s \setminus \theta} |\hat{f}(n_1 K + m_1, \dots, n_s K + m_s)| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{m \in \Pi_K} \sum_{2^{i-1} \leq \|n\| < 2^i} |\hat{f}(n_1 K + m_1, \dots, n_s K + m_s)| \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Для каждого $i = 1, 2, \dots$ имеет место включение (см., например, [10, с. 51])

$$\begin{aligned} & \{(n_1 K + m_1, \dots, n_s K + m_s) : \|m\| < K/4, 2^{i-1} \leq \|n\| < 2^i\} \subset \\ & \subset \{(\tau_1, \dots, \tau_s) : 2^{l+i-2} \leq \|n\| < 2^{l+i+2}\}. \end{aligned}$$

Поэтому, продолжая неравенства (16) и повторяя проведенные выше рассуждения, придем к неравенству

$$\sum_{m \in \Pi_K} \sum_{n \in Z^s \setminus \theta} |\hat{f}(n_1 K + m_1, \dots, n_s K + m_s)| < \frac{\sqrt{N}}{N^{r/s}}. \quad (17)$$

Из неравенств (15), (17) и (14) следует

$$\|u(t, \cdot; f) - (\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)(t, \cdot)\|_{\infty} < \frac{\sqrt{N}}{N^{r/s}}. \quad (18)$$

При $q \in [2, \infty]$ имеет место неравенство (см., например, [11, с. 93])

$$\|g\|_q \leq \|g\|_2^{2/q} \|g\|_{\infty}^{1-2/q}.$$

Следовательно, согласно неравенствам (13) и (18), получаем

$$\|u(t, \cdot; f) - (\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)(t, \cdot)\|_q < \frac{N^{1/2-1/q}}{N^{r/s}},$$

откуда, в силу произвольности функции $f \in B_{2,\theta}^r$ и определения пространства $L^{\infty,q}$ придем к неравенству

$$\delta_N((\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)) < \frac{N^{1/2-1/q}}{N^{r/s}}. \quad (19)$$

Так как $(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N) \in L_N$, то в силу (4) имеем $\frac{N^{1/2-1/q}}{N^{r/s}} < \delta_N((\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N))$, что совместно с неравенством (19) приведет к (6). $\square$

Обсуждение

Данное исследование можно продолжить рассматривая задачу нахождения предельной погрешности оптимального оператора дискретизации $(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)$ (определение предельной погрешности можно найти, например, в [3]).

Заключение

Согласно сформулированной и доказанной выше теореме можно сделать следующий вывод:

Оператор дискретизации

$$(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)(t, x) = \tilde{\varphi}_N(\tilde{l}_N^{(1)}(f), \dots, \tilde{l}_N^{(N)}(f); t, x) = \\ = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N f(\tilde{\xi}_N^{(l)}) \sum_{m \in \Pi_K} e^{-4\pi^2 (m, m)t} e^{2\pi i (m, x - \tilde{\xi}_N^{(l)})}$$

является оптимальным при приближении решения $u = u(t, x; f)$ уравнения теплопроводности с начальным условием из класса Никольского – Бесова операторами дискретизации $(l^{(N)}, \varphi_N) \in L_N$ в метрике пространства $L^{\infty, q}$.

Список использованных источников

- [1] Hua Loo Keng, Wang Yuan. *Applications of Number Theory to Numerical Analysis* // Springer - Verlag. Berlin. Heidelberg. New York. Science Press, Beijing. 1981. 241 p.
- [2] Azhgaliev Sh. U. *Discretization of the solutions of the heat equation* // *Mathematical Notes*. - 2007. - 82(2). - P. 153 - 158. <https://doi.org/10.1134/S000143460707019X>
- [3] Utesov A.B., Bazarkhanova A.A. *On Optimal Discretization of Solutions of the Heat Equation and the Limit Error of the Optimum Computing Unit* // *Differential Equations*. - 2021. - 57 (12). - P. 1726 - 1735. DOI: 10.1134/S0012266121120168
- [4] Утесов А.Б., Утесова Г.И. О дискретизации решений уравнения теплопроводности по числовой информации // *Вестник Казахского национального педагогического университета имени Абая. Серия: Физико-математические науки*. - 2022. №1 (77). С.41 - 48. <https://doi.org/10.51889/2022-1.1728-7901.05>
- [5] Таугынбаева Г.Е., Жубанышева А.Ж., Нурмолдин Е.Е. Приближение решений уравнения теплопроводности с функцией распределения начальной температуры из классов Ульянова по неточным данным // *Многофазные системы*. - 2024. №2(19). - С. 73-78. DOI: 10.21662/mfs2024.2.011
- [6] Bailov E.A., Temirgaliev N. *Discretization of the Solutions to Poisson's Equation* // *Computational Mathematics and Mathematical physics*. - 2006. - 46(9). - P. 1515 - 1525. DOI: 10.1134/S0965542506090053
- [7] Утесов А.Б., Утесова Г.И., Шанауов Р.А., Аманов Н.Ш. О предельной погрешности оптимального оператора дискретизации решения уравнения Пуассона // *Вестник Казахского национального педагогического университета имени Абая. Серия: физико – математические науки*. – 2024. №3(87). - С. 57- 69. DOI: 10.51889/2959-5894.2024.87.3.005
- [8] Utesov A.B. *On Error Estimates for Discretization Operators for the Solution of the Poisson Equation* // *Differential Equations*. - 2024. - 60(1). - P. 136 -143. DOI:10.1134/S0012266124010117
- [9] Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*. - М.: Наука, 1977. - 455 с.
- [10] Утесов А.Б. *Задача восстановления функций и интегралов на обобщенных классах и решений уравнения теплопроводности*. - Дисс. канд. физ. - мат. наук, Алматы, 2001. - 84 с.
- [11] Temlyakov V. *Multivariate Approximation*. - Cambridge monographs on Applied and Computational Mathematics, 32, Cambridge University Press, 2018. - 551 p.

References

- [1] Hua Loo Keng, Wang Yuan. *Applications of Number Theory to Numerical Analysis* // Springer - Verlag. Berlin. Heidelberg. New York. Science Press, Beijing. 1981. 241 p.
- [2] Azhgaliev Sh. U. *Discretization of the solutions of the heat equation* // *Mathematical Notes*. - 2007. - 82(2). - P. 153 - 158. <https://doi.org/10.1134/S000143460707019X>
- [3] Utesov A.B., Bazarkhanova A.A. *On Optimal Discretization of Solutions of the Heat Equation and the Limit Error of the Optimum Computing Unit* // *Differential Equations*. - 2021. - 57 (12). - P. 1726 - 1735. DOI: 10.1134/S0012266121120168
- [4] Utesov A.B., Utesova G.I. *O diskretizacii reshenij uravneniya teploprovodnosti po chislovoj informacii* [On discretization of solutions of the heat equation by numerical information] // *Vestnic Kazahskogo nacionalnogo pedagogicheskogo universiteta imeni Abaya. Seriya: fiziko – matematicheskie nauki*. - 2022. №1 (77). S.41 - 48. <https://doi.org/10.51889/2022-1.1728-7901.05> (In Russian)

[5] Taugynbaeva G.E., Zhubanysheva A.Zh., Nurmoldin E.E. *Priblizhenie reshenij uravneniya teploprovodnosti s funkciej raspredeleniya nachalnoj temperatury iz klassov Ulyanova po netochnym dannym* [Approximation of solutions of the heat conductivity equation with the distribution function on the initial temperature from the Ulyanov classes by inaccurate data]. *Mnogofaznye sistemy*. - 2024. №2(19). - pp. 73-78. DOI: 10.21662/mfs2024.2.011 (In Russian)

[6] Bailov E.A., Temirgaliev N. *Discretization of the Solutions to Poisson's Equation*// *Computational Mathematics and Mathematical physics*. - 2006. - 46(9). - P. 1515 - 1525. DOI: 10.1134/S0965542506090053

[7] Utesov A.B., Utesova G.I., Shanauov R.A., Amanov N.Sh. *O predelnoj pogreshnosti optimalnogo operatora diskretizacii resheniya uravneniya Puassona* [On limit error of the optimal discretization operator for solution of Poisson equation] // *Vestnic Kazahskogo nacionalnogo pedagogicheskogo universiteta imeni Abaya. Seriya: fiziko – matematicheskie nauki*. - 2024. №3(87). - pp. 57- 69. DOI: 10.51889/2959-5894.2024.87.3.005 (In Russian)

[8] Utesov A.B. *On Error Estimates for Discretization Operators for the Solution of the Poisson Equation* // *Differential Equations*. - 2024. - 60(1). - P. 136 -143. DOI:10.1134/S0012266124010117

[9] Nikolscij S.M. *Priblizhenie funkciy mnogih peremennyh i teoremy vlozheniya* [Approximation of functions of several variables and embedding theorems]. - Moscow: Nauka, 1977. - 455 p.. (In Russian)

[10] Utesov A.B. *Zadacha vosstanovleniya funkciy i integralov na obobshennyh klassah i reshenij uravneniya teploprovodnosti* [Problems of recovery of functions and integrals on generalized classes and solutions of the heat equation]. - Diss. kand. fiz. - mat. nauk, Almaty, 2001. - 84 p.. (In Russian)

[11] Temlyakov V. *Multivariate Approximation*. - Cambridge monographs on Applied and Computational Mathematics, 32, Cambridge University Press, 2018. - 551 p.