

Ж. Е. Демеубаева¹ , С.Е. Касенов^{2,3*} , Н.М. Темирбеков^{2,3} , А.Н. Темирбеков² 

¹Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті,
Өскемен қ., Қазақстан

²Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

³ҚР Ұлттық инженерлік академиясы, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: syrym.kasenov@mail.ru

МАГНИТТЕЛЛУРЛЫҚ ЗОНДЫЛАУДЫҢ КЕРІ ЕСЕБІН САНДЫҚ ШЕШУДЕ ТҮЙІНДЕС ТЕҢДЕУЛЕР ӘДІСІН ҚОЛДАНУ

Аңдатпа

Бұл мақалада Максвелл теңдеулеріне негізделген магниттеллурлық зондылау (МТЗ) әдісінің тура және кері есептерін шешудің теориялық және сандық тәсілдері қарастырылған. Өртүрлі электр кедергілеріне ие горизонталь қабатталған изотропты орта үшін геоэлектрлік модельдің математикалық сипаттамасы берілген. Кері есепті шешу үшін оптималды басқару әдісі мен түйіндес теңдеулер аппараты қолданылды. Бақылау деректері бойынша электр өткізгіштіктің таралуын қалпына келтіру үшін градиенттік итерациялық алгоритм жасалды. Сандық эксперименттер ұсынылған әдістің орнықтылығын және жинақтылығын көрсетті: итерациялар саны артқан сайын функционалдың мәні азайып, параметрлердің қалпына келтірілген мәндері нақты шешімге жақындай түсті. Алынған нәтижелер МТЗ әдісінің геоэлектрлік құрылымды түсіндірудегі тиімділігін және Жер қыртысының терең қабаттарының электрофизикалық қасиеттерін бағалаудағы қолданбалы маңыздылығын дәлелдейді.

Түйін сөздер: магниттеллурлық зондылау, кері есеп, түйіндес теңдеулер әдісі, тиімді басқару, градиенттік әдіс, сандық модельдеу.

Ж. Е. Демеубаева¹, С.Е. Касенов^{2,3}, Н.М. Темирбеков^{2,3}, А.Н. Темирбеков²

¹Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева,
г. Усть-Каменогорск, Казахстан

²Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

³Национальная инженерная академия Республики Казахстан, г. Алматы, Казахстан

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СОПРЯЖЁННЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ.

Аннотация

В статье рассматриваются теоретические основы и численные методы решения прямой и обратной задач магнитотеллурического зондирования (МТЗ), основанных на уравнениях Максвелла. Подробно описана математическая модель геоэлектрической среды, состоящей из горизонтально-слоистых изотропных слоёв с различными электрическими сопротивлениями. Для решения обратной задачи использован метод оптимального управления и аппарат сопряжённых уравнений. Разработан алгоритм восстановления распределения электрической проводимости по наблюдаемым данным МТЗ с применением градиентного итерационного подхода. Проведены численные эксперименты, подтвердившие устойчивость и сходимость предложенного метода: при возрастании числа итераций функционал заметно уменьшается, а восстановленные параметры приближаются к истинным значениям. Полученные результаты демонстрируют высокую эффективность разработанного подхода при интерпретации данных магнитотеллурического зондирования и его применимость для оценки глубинных геоэлектрических характеристик земной коры, что имеет важное значение для геофизических исследований и прогнозирования перспективных участков недр.

Ключевые слова: магнитотеллурическое зондирование, обратная задача, метод сопряжённых уравнений, оптимальное управление, градиентный метод, численное моделирование.

Zh.E. Demeubayeva¹, S.E. Kasenov^{2,3}, N. M. Temirbekov^{2,3}, A. N. Temirbekov²

¹ D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

² Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

³ National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan

APPLICATION OF THE ADJOINT EQUATION METHOD IN THE NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF MAGNETOTELLURIC SOUNDING

Abstract

The article discusses the theoretical foundations and numerical methods for solving the direct and inverse problems of magnetotelluric sounding (MTS) based on Maxwell's equations. A mathematical description of the geoelectrical model consisting of horizontally layered isotropic media with different electrical resistivities is presented. The inverse problem is solved using the optimal control approach and the adjoint equation method. A gradient iterative algorithm is developed to reconstruct the distribution of electrical conductivity from observational MTS data. Numerical experiments confirm the stability and convergence of the proposed method: as the number of iterations increases, the objective functional decreases significantly, and the reconstructed parameters closely approach the true values. The results demonstrate the effectiveness of the MTS technique in interpreting geoelectrical structures and its practical importance for assessing the deep-layer electrophysical properties of the Earth's crust in geophysical exploration.

Keywords: magnetotelluric sounding, inverse problem, adjoint equation method, optimal control, gradient iteration, numerical modeling.

Кіріспе

Магниттеллурлық зондылау (МТЗ) әдісі жердің табиғи айнымалы электромагниттік өрісін, яғни магниттеллурлық өрісті (МТ-өріс) зерттеуге негізделген. Табиғи электромагниттік өріс әртүрлі жиіліктегі тербелістерден тұрады.

Скин-эффект деп аталатын құбылыстың нәтижесінде жоғары жиілікті тербелістер тереңдік артқан сайын тезірек әлсірейді, ал төмен жиілікті спектр құрамдас бөліктері едәуір тереңге өтеді. Сондықтан өрістің жоғары жиілікті құрамдастары негізінен қиманың жер бетіне жақын қабаттары туралы ақпарат береді. Жиілік азайған сайын қиманың терең бөліктерінің бақыланатын өріске қосқан үлесі артады, бұл геоэлектрлік қиманың терең қабаттары жөнінде мәлімет алуға мүмкіндік береді [1-2].

МТЗ әдісі жиіліктік зондылаудың бір түрі болып табылады. Бұл әдістің бірқатар артықшылықтары бар: ол генераторлық қондырғыларды қолдануды талап етпейді және бақыланатын көздері бар әдістерге қолжетімсіз болатын терең қабаттарды зерттеуге мүмкіндік береді.

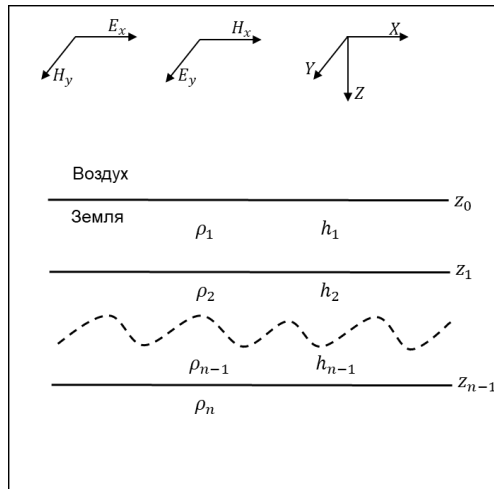
МТЗ әдістерінің бақыланатын көздері бар әдістерден тағы бір елеулі айырмашылығы электромагниттік өрістің жеке компоненттерінен беріліс функцияларына көшу қажеттілігінде. Беріліс функциялары бір немесе екі нүктеде өлшенген өрістің белгілі компоненттерінің қатынастары болып табылады. Мұндай тәсіл табиғи электромагниттік өріс көздерінің белгісіз параметрлерін есептеуден шығарып тастауға мүмкіндік береді.

МТЗ әдісі Жердің жоғарғы қабаттарының құрылымы туралы ақпарат алуға бағытталған, магнитосфералық және ионосфералық белсенділікпен байланысты айнымалы электромагниттік өрісті зерттеуге негізделген электрбарлаудың негізгі әдістерінің бірі [3].

А.Н. Тихонов пен Л. Каньяр еңбектерінде Жер әртүрлі электрлік кедергілерге ие горизонталь қабаттардан тұратын орта ретінде қарастырылады. Бұл жағдайда әр қабат ішіндегі кедергі тұрақты деп есептеледі, ал жоғарғы жартылай кеңістіктің (ауа қабатының) кедергісі шексіз деп алынады [4,5].

1-сурет модель қимасының схемалық бейнесін көрсетеді. Модель әртүрлі қасиеттері бар бірнеше горизонталь-біртекті және изотропты қабаттардан тұрады: меншікті кедергілер ρ_m және қуаттылықтар h_m (мұндағы m - қабат нөмірі). Оң жақты координаттар жүйесін қарастырайық, мұнда Z осі төмен бағытталған, ал X және Y осьтері ауа мен Жерді бөлетін жазықтықта орналасқан. Жер кедергілері $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n$ және қуаттылықтары $h_1, h_2, \dots, h_n$

болатын n көлденең изотропты қабаттарға бөлінеді. Соңғы қабаттың (n -ші қабат) қуаттылығы шексіз деп есептеледі. Жоғарғы жартылай кеңістік ($z < 0$) өткізбейтін ауамен толтырылған, диэлектрлік өтімділігі ε_0 . Магниттік өтімділік μ тұрақты және модельдің барлық аймақтарында бірге тең [1-3,6].



Сурет 1. МТЗ-да қолданылатын көлденең-қабатты ортаның геоэлектрлік моделі

Жер бетіне жоғарыдан түсетін, xy жазықтығында эллипстік поляризацияланған, z осі бойымен таралатын жазық біртекті моногармониялық бастапқы электромагниттік толқын $\vec{E}_l, \vec{H}_l$ берілсін. Бұл толқынды бір-бірінен тәуелсіз екі сызықты поляризацияланған жазықбіртекті толқындарға жіктеуге болады: E_x^l, H_y^l және E_y^l, H_x^l .

E_x^m, H_y^m толқыны жерде $\vec{E}_1 = E_x \vec{i}$ электр өрісін және $\vec{H}_1 = H_y \vec{j}$ магнит өрісін тудырады, ал E_y^m, H_x^m толқыны $\vec{E}_2 = E_y \vec{j}$ электр өрісін және $\vec{H}_2 = H_x \vec{i}$ магнит өрісін тудырады. Осы элементар толқындардың суперпозициясы нәтижесінде толық өріс келесі түрде анықталады:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_x \vec{i} + E_y \vec{j}, \quad (1)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = H_x \vec{i} + H_y \vec{j},$$

мұндағы $\vec{E}, \vec{H}$ ортогональ комплексті векторлар. Шынында да, ортаның осьтік симметриясы шартынан келесі қорытынды шығады:

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} \quad (2)$$

бұдан

$$(\vec{E} \cdot \vec{H}) = E_x H_x + E_y H_y = 0.$$

Импеданс деп

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} \quad (3)$$

шамасын айтады. Жер бетінде $z = 0$ кезінде кіріс импедансы Z_n алынады, мұндағы n индексі қимадағы қабаттардың санына сәйкес келеді.

Қазіргі уақытта магниттеллурлық зондылау деректерін интерпретациялау минералдық ресурстарды іздеу, геотермалдық жүйелерді зерттеу, мұнай-газ кен орындарын барлау және Жер қыртысының терең құрылымын анықтау сияқты маңызды қолданбалы есептерді шешуде кеңінен пайдаланылады. Алайда МТЗ-ның кері есебі табиғатынан қисынды емес (ill-posed)

есептер класына жатады: өлшеу қателіктері мен бастапқы деректердегі аз ғана ауытқулар шешімнің айтарлықтай өзгеруіне алып келеді. Сондықтан кері есепті орнықты және дәл шешуге мүмкіндік беретін тиімді сандық алгоритмдерді әзірлеу қазіргі қолданбалы математика мен есептеу геофизикасының өзекті ғылыми мәселелерінің бірі болып табылады. Осыған байланысты түйіндес теңдеулер әдісіне негізделген градиенттік алгоритмдерді пайдалану есептеу тиімділігін арттыруға және параметрлерді қалпына келтіру дәлдігін жақсартуға мүмкіндік береді. Сондықтан ұсынылып отырған зерттеу МТЗ-ның кері есебін шешудің математикалық аппаратын жетілдіруге және оны геофизикалық практикада қолдануға бағытталған.

Зерттеудің мақсаты – магниттеллурлық зондылаудың кері есебін шешу үшін түйіндес теңдеулер әдісіне негізделген тиімді градиенттік алгоритмді құру және оның сандық эксперименттер арқылы орнықтылығы мен жинақтылығын зерттеу.

Зерттеу әдіснамасы

Зерттеуде қолданылған әдістер зерттелетін есептің математикалық табиғатына сәйкес таңдалды. Магниттеллурлық зондылаудың тура есебі Максвелл теңдеулеріне негізделгендіктен, электромагниттік өрістің таралу заңдылықтарын дәлірек сипаттайды. Кері есеп функционалды минимизациялау есебі ретінде қарастырылып, оны шешу үшін оптималды басқару теориясы мен түйіндес теңдеулер аппараты қолданылды. Бұл тәсіл функционалдың градиентін аналитикалық түрде есептеуге мүмкіндік береді және параметрлердің көпөлшемді кеңістігінде есептеу шығынын азайтады. Градиенттік итерациялық алгоритмнің таңдалуы оның есептеу қарапайымдылығымен, орнықтылығымен және үлкен өлшемді геофизикалық есептерде кеңінен қолданылуымен негізделеді. Ұсынылған әдістің тиімділігі сандық эксперименттер нәтижелері арқылы бағаланды.

Теориялық тұрғыда бұл әдіс электромагниттік өрісті сипаттайтын Максвелл теңдеулері жүйесіне негізделеді. Біртекті және изотропты ортада, сыртқы әсерлер болмаған жағдайда, Максвелл теңдеулері келесі түрде жазылады [7]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H}(t) = \frac{\vec{E}(t)}{\rho} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E}(t) = -\mu \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{H}(t) = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E}(t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Мұнда $\vec{E}(t)$ және $\vec{H}(t)$ сәйкесінше электр және магнит өрістерінің кернеулік векторларын білдіреді, ал ρ, ε және μ ортаның меншікті кедергісі, диэлектрлік және магниттік өтімділігі сияқты қасиеттерін сипаттайды.

Құрылымдық электрбарлау аясында әдетте магниттік емес тау жыныстары зерттеледі, олар үшін магниттік өтімділік μ вакуумның магниттік өтімділігіне тең ($\mu = \mu_0$).

Квазистационарлық жуықтау өрістердің баяу өзгеретінін болжайтындықтан, Максвелл теңдеулер жүйесінің бірінші теңдеуінің оң жағындағы екінші мүше ығысу токтарына жауап беретін бөлік өткізгіштік токтарға сәйкес келетін бірінші мүшемен салыстырғанда елеусіз деп есептеледі. Сондықтан статикалық немесе квазистатикалық электромагниттік өрістерді қарастырғанда ығысу токтарын елемеге болады. Бұл жүйені талдауды жеңілдетіп, Максвелл теңдеулерін ықшам түрде шешуге мүмкіндік береді.

Осы жағдайда Максвелл теңдеулерінің біріншісін келесі түрде жазуға болады:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(t) = \frac{\vec{E}(t)}{\rho} \quad (5)$$

Электрбарлау әдістерінде гармониялық өрістерді талдау кезінде жиі символдық әдіс қолданылады. Бұл әдіс бойынша өрісті сипаттайтын векторлар келесі түрде өрнектеледі: $\vec{A}(t) = \operatorname{Re}(\vec{A} \cdot e^{-i\omega t})$, мұнда $\vec{A}(t)$ – вектордың уақыт бойынша мәні, $\vec{A}$ – оның комплексті амплитудасы, ω – бұрыштық жиілік, t – уақыт. Электр және магнит өрістерінің комплекс амплитудаларын қолданған жағдайда, Максвелл теңдеулері келесі түрде жазылады:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\vec{E}}{\rho} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H} \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Теңдеудің жазылу түрін өзгертіп, Максвелл теңдеулерінің біріншісін координаталық түрде келесідей өрнектейміз:

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \sigma(E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}) \quad (7)$$

Біздің модельде өріс пен қиманың горизонталь бағытта тұрақты екенін ескерсек, осы теңдеудегі барлық горизонталь туындылар нөлге тең болады. Бұл оны келесі түрде ықшамдауға мүмкіндік береді:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial H_x}{\partial z}\vec{j} = \sigma E_x\vec{i} + \sigma E_y\vec{j} + \sigma E_z\vec{k} \quad (8)$$

Осыған ұқсас түрде Максвелл теңдеулерінің екіншісі де ықшамдалып, қарапайым түрге келтіріледі:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{j} = i\omega\mu_0(H_x\vec{i} + H_y\vec{j} + H_z\vec{k}) \quad (9)$$

(8) бен (9) теңдеулерін талдау арқылы және $\vec{k}$ векторына сәйкес компоненттерді бөліп көрсетсек $E_z = 0$, $H_z = 0$ екені анықталады. Демек, Тихонов–Каньяр моделінде электр және магнит өрістерінің вертикаль компоненттері болмайды. Енді (8) теңдеуді $\vec{i}$ векторы бойынша, ал (9) теңдеуді $\vec{j}$ векторы бойынша жіктеп, алынған теңдеулерді бір жүйеге жазамыз [8]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu_0 H_y \end{cases} \quad (10)$$

(8) теңдеуді $\vec{j}$ векторы бойынша, ал (9) теңдеуді $\vec{i}$ векторы бойынша жіктеу арқылы алынған теңдеулерден тұратын тағы бір жүйені құрамыз:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y \\ -\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu_0 H_x \end{cases} \quad (11)$$

(10) және (11) жүйелерінің тәуелсіздігі Тихонов–Каньяр моделіндегі магнитотеллурлық өрістің екі тәуелсіз бөліктен модалардан тұратынын көрсетеді. Бірінші мода E_x және H_y компоненттерін, ал екінші мода E_y және H_x компоненттерін қамтиды. (10) жүйесінің екінші теңдеуінен H_y -ті өрнектеп, оны бірінші теңдеуге қойсақ, E_x компоненті үшін бірөлшемді Гельмгольц теңдеуін аламыз:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{i\omega\mu_0 E_x}{\rho} = 0 \quad (12)$$

Осыған ұқсас түрде, осы жүйенің бірінші теңдеуінен E_x -ті өрнектеп, оны екінші теңдеуге қойсақ, H_y компоненті үшін бірөлшемді Гельмгольц теңдеуін аламыз:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \frac{i\omega\mu_0 H_y}{\rho} = 0 \quad (13)$$

$k = \sqrt{-i\omega\mu_0/\rho}$ толқын санын енгіземіз. Комплекс санның квадрат түбірі екі мәнге ие болғандықтан, біз оның нақты бөлігі оң болатын мәнін таңдаймыз. Толқын санының нақты және жорамал бөліктерін келесі түрде жазуға болады:

$$Re(k) = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\rho}} \quad Im(k) = -\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\rho}} \quad (14)$$

Енді E_x және H_y үшін бірөлшемді Гельмгольц теңдеулері келесі түрге ие болады:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - k^2 E_x = 0, \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - k^2 H_y = 0 \quad (15)$$

Алынған теңдеулер МТЗ-ның тура есебін шешудегі бастапқы теңдеулер болып табылады. Олар кедергісі ρ болатын қабат ішіндегі өрістің мінез-құлқын сипаттайды. Айта кетейік, (11) жүйесіне де осындай түрлендірулер жүргізу арқылы E_y және H_x компоненттерін қамтитын мода үшін де осыған ұқсас теңдеулер жүйесін алуға болады.

Бір қабатты орта үшін кері есептің келесі тұжырымын қарастыруға болады. (12) және (13) теңдеулері МТЗ-ның тура есебінің шешіміне әкеледі [9]:

$$u_{zz} + i\omega\mu_0\sigma(z)u = 0, \quad z \in [0, L], \quad (16)$$

$$(u_z + h_1 u)|_{z=0} = 1, \quad (17)$$

$$(u_z + h_2 u)|_{z=L} = 0, \quad (18)$$

мұнда $\rho = 1/\sigma$ қимадағы меншікті электр кедергілерінің бірөлшемді таралуы, σ ортаның өткізгіштігі.

Математикалық геофизикада екі негізгі есепті ажырату қабылданған: тура есеп – онда берілген модель бойынша теориялық электромагниттік өріс есептелінеді, және кері есеп – онда модельдік өріс арқылы ортаның σ параметрлері аныкталады [9,10].

Сондықтан

$$u|_{z=0} = f(\omega), \quad (19)$$

қосымша ақпарат беру арқылы (16) – (19) кері есепті аламыз. Ал σ коэффициентті функционалдың минимумы шартынан табамыз:

$$J(\sigma) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} [u(0, \omega; \sigma) - f(\omega)]^2 d\omega \rightarrow \min. \quad (20)$$

Магниттеллурлық зондылаудың кері есебі үшін түйіндес теңдеулер әдісі. Кері есеп (16)–(19) оптималды басқару әдісімен шешілді. (16)–(18) есеп үшін (20) функционалының минимумын қамтамасыз ететін $\sigma(z)$ басқаруын табу қажет.

Функционалдың вариациясы келесі түрде жазылады:

$$\begin{aligned}\delta J &= J(\sigma + \delta\sigma) - J(\sigma) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} ([u(0, \omega; \sigma + \delta\sigma) - f(\omega)]^2 - [u(0, \omega; \sigma) - f(\omega)]^2) d\omega \\ &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} (u(0, \omega; \sigma + \delta\sigma) + u(0, \omega; \sigma) - 2f(\omega)) \cdot (u(0, \omega; \sigma + \delta\sigma) - u(0, \omega; \sigma)) d\omega.\end{aligned}$$

$\delta u(z, \omega; \sigma) = u(z, \omega; \sigma + \delta\sigma) - u(0, \omega; \sigma)$ белгілеуін енгізсек, келесі өрнекті аламыз:

$$\delta J = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} [u(0, \omega; \sigma) - f(\omega)] \cdot \delta u(0, \omega; \sigma) d\omega + o(\|\delta u\|).$$

(16)–(18) есепке қатысты ауытқыған есептің қойылымын қарастырайық:

$$\tilde{u}_{zz} + i\omega\mu_0(\sigma + \delta\sigma)\tilde{u} = 0, \quad (21)$$

$$(\tilde{u}_z + h_1\tilde{u})|_{z=0} = 1, \quad (22)$$

$$(\tilde{u}_z + h_2\tilde{u})|_{z=L} = 0. \quad (23)$$

$\delta u(z, \omega; \sigma)$ -мен байланысты есепті тұжырымдау үшін (21)–(23) теңдеулер жүйесінен (16)–(18) теңдеулер жүйесін азайтамыз. Нәтижесінде келесі қатынастарды аламыз:

$$\delta u_{zz} + \sigma \cdot i\omega\mu_0 \cdot \delta u + \delta\sigma \cdot i\omega\mu_0 \cdot u = 0, \quad (24)$$

$$(\delta u_z + h_1\delta u)|_{z=0} = 0, \quad (25)$$

$$(\delta u_z + h_2\delta u)|_{z=L} = 0. \quad (26)$$

(24) өрнекті қарастырамыз және еркін $\psi(z, \omega)$ функциясына көбейтеміз. Алынған өрнекті z және ω бойынша интегралдаймыз.

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_0^L (\delta u_{zz} + \sigma \cdot i\omega\mu_0 \cdot \delta u + \delta\sigma \cdot i\omega\mu_0 \cdot u) \cdot \psi(z) dz d\omega \\ &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[\int_0^L \delta u_{zz} \psi dz + \sigma \cdot i\omega\mu_0 \cdot \int_0^L \delta u \cdot \psi dz + \delta\sigma \cdot i\omega\mu_0 \cdot \int_0^L u \cdot \psi dz \right] d\omega \\ &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[\delta u_z \psi|_0^L - \delta u \psi_z|_0^L + \int_0^L \delta u (\psi_{zz} + \sigma \cdot i\omega\mu_0 \cdot \psi) dz + \delta\sigma \cdot i\omega\mu_0 \cdot \int_0^L u \cdot \psi dz \right] d\omega \\ &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[\int_0^L (\psi_{zz} + \sigma i\omega\mu_0 \psi) \delta u dz + \delta\sigma \cdot i\omega\mu_0 \int_0^L u \psi dz \right] d\omega + \\ &+ \int_{\omega_1}^{\omega_2} [\delta u_z(L, \omega) \psi(L, \omega) - \delta u_z(0, \omega) \psi(0, \omega) - \delta u(L, \omega) \psi_z(L, \omega) + \delta u(0, \omega) \psi_z(0, \omega)] d\omega.\end{aligned}$$

(25) және (26) шекаралық шарттарды ескере отырып келесі өрнектерді аламыз

$$0 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[\int_0^L (\psi_{zz} + \sigma i \omega \mu_0 \psi) \delta u dz + \delta \sigma \cdot i \omega \mu_0 \int_0^L u \psi dz \right] d\omega + \\ + \int_{\omega_1}^{\omega_2} [\delta u(0, \omega)(\psi_z(0, \omega) + h_1 \psi(0, \omega)) - \delta u(L, \omega)(\psi_z(L, \omega) + h_2 \psi(L, \omega))] d\omega.$$

Анықтама бойынша функционал өсімшесінің негізгі бөлігі градиент болып табылады $J(\sigma + \delta\sigma) - J(\sigma) = \langle \delta\sigma, J'(\sigma) \rangle = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} [u(0, \omega; \sigma) - f(\omega)] \cdot \delta u(0, \omega; \sigma) d\omega$.

Сонда түйіндес есептің қойылымын және функционалдың градиентін аламыз.

$$\psi_{zz} + \sigma i \omega \mu_0 \psi = 0, \quad (27)$$

$$\psi_z(0) + h_1 \psi(0) = 2[u(0, \omega; \sigma) - f(\omega)], \quad (28)$$

$$\psi_z(L) + h_2 \psi(L) = 0, \quad (29)$$

$$J'(\sigma) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[i \omega \mu_0 \int_0^L u \psi dz \right] d\omega. \quad (30)$$

Кері есепті шешу алгоритмі:

- 1) $\sigma^{(0)}$ бастапқы жуықтау.
- 2) $\sigma^{(n)}$ берілгендері бойынша (16)-(18) тура есепті шешу.
- 3) (20) формула бойынша $J(\sigma^{(n)})$ есептеу.
- 4) $u(0, \omega; \sigma^{(n)})$ бойынша (27)-(29) түйіндес есепті шешу.
- 5) (30) формула бойынша $J'(\sigma^{(n)})$ функционал градиентін есептеу.
- 6) $\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} - \alpha \cdot J'(\sigma^{(n)})$ келесі жуықтауды табу және 2-ге көшу.

Зерттеу нәтижелері

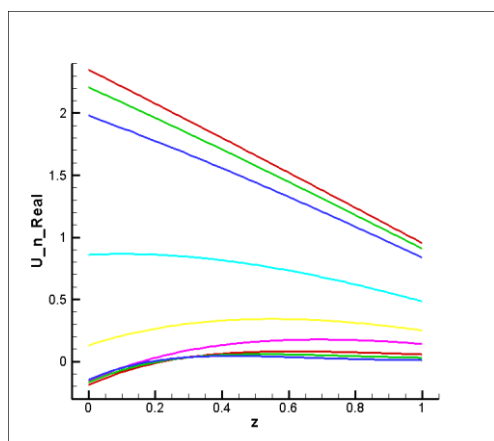
Тура есеп үшін параметрдің әртүрлі мәндерінде сандық эксперименттер жүргізілді

$$\omega = \left\{ \frac{\omega_0}{10}; \frac{\omega_0}{7}; \frac{\omega_0}{5}; \frac{\omega_0}{2}; \omega_0; 2 \cdot \omega_0; 5 \cdot \omega_0; 7 \cdot \omega_0; 10 \cdot \omega_0 \right\}$$

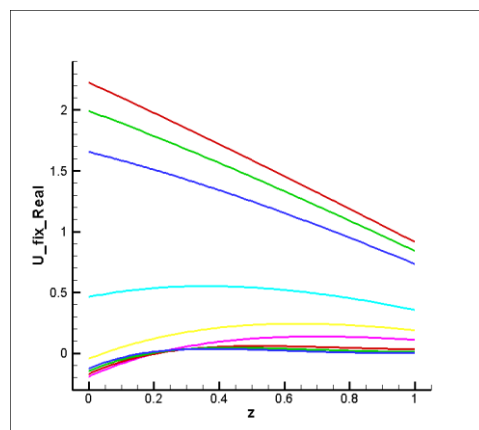
мұндағы $\omega_0 = 1.13 \cdot 10^8$ [8].

МТЗ-ның кері есебі сандық түрде градиенттік итерациялық әдіспен шешілді. Органың өткізгіштік коэффициентінің мәнін қалпына келтіру талап етіледі. Бастапқы жуықтау $\sigma_0 = 1$ деп алынған. 2,4-суреттерде өткізгіштік коэффициентінің қалпына келтірілген мәндері бойынша кері есептің $u(z)$ шешімінің графиктері келтірілген. Ал 3, 5-суреттерде дәл шешім $u(z)$ функциясының графиктері көрсетілген.

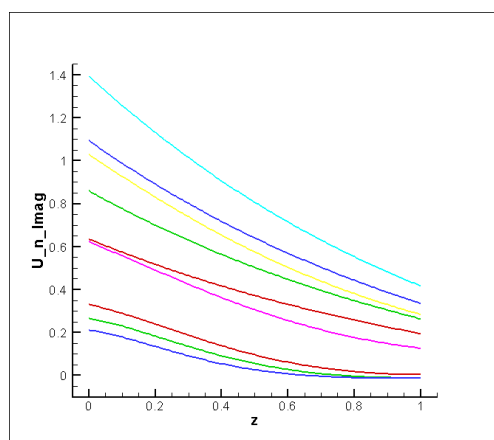
1-кестеден көрініп тұрғандай, 276 итерация орындалды, осы кезде функционал мәні 30,562283 есе азайды, ал органың өткізгіштік коэффициентінің дәл және жуық мәндерінің айырмасы нормасының мәні $5,5 \cdot 10^{-3}$ -ке тең болды.



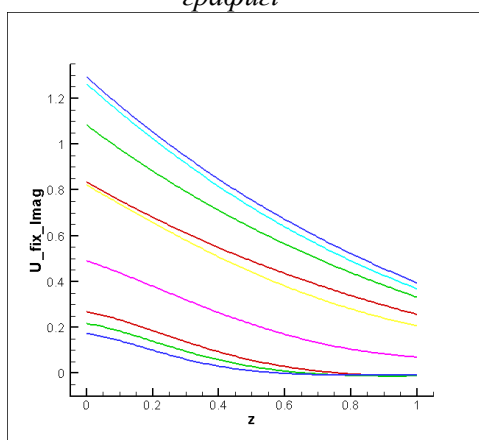
Сурет 2. $Re(U_n(z))$ графигі



Сурет 3. $Re(U_{ex}(z))$ тура шешімнің графигі



Сурет 4. $Im(U_n(z))$ графигі



Сурет 5. $Im(U_{ex}(z))$ тура шешімнің графигі

Кесте 1. Кері есептің сандық есептеулерінің нәтижелері

Итерация нөмірі	$J(\sigma_n)$	$\ \sigma_n - \sigma_{ex}\ $
1	139,133204	0,978553
10	139,092395	0.965388
100	138,543897	0.815651
200	137,176553	0.577429
276	4,552448	0,005512

Жүргізілген сандық эксперименттердің нәтижелері ұсынылған алгоритмнің жинақталатынын көрсетті. Итерациялар санының артуымен мақсаттық функционалдың мәні біртіндеп азайып, өткізгіштік коэффициентінің қалпына келтірілген мәндері нақты шешімге жақындайды. Сонымен қатар, қалпына келтірілген өткізгіштік профилі бастапқы модельдің негізгі ерекшеліктерін дәл қайталайды, бұл ұсынылған алгоритмнің практикалық қолдануға жарамдылығын көрсетеді.

Талқылау

Жүргізілген сандық эксперименттер түйіндес теңдеулер әдісіне негізделген ұсынылған алгоритмнің магниттелурлық зондылаудың кері есебін шешуде тиімді екенін көрсетті. Итерациялық процесс барысында мақсаттық функционалдың азаюы алгоритмнің жинақталуын және функционал градиентінің дұрыс есептелетінін дәлелдейді. Сонымен қатар қалпына келтірілген өткізгіштік коэффициентінің нақты модельге жақындауы ұсынылған тәсілдің дәлдігін көрсетеді.

Алынған нәтижелер әдебиетте қолданылатын дәстүрлі градиенттік әдістердің қасиеттерімен сәйкес келеді. Ұсынылған тәсіл функционал градиентін түйіндес есеп арқылы есептеуге мүмкіндік беретіндіктен, әр параметр бойынша жеке сезімталдық есептеулерін жүргізуді қажет етпейді. Бұл есептеу уақытын азайтып, үлкен өлшемді геофизикалық есептер үшін алгоритмнің тиімділігін арттырады.

Бұрынғы зерттеулерде магнитотеллурлық зондылаудың кері есептері көбінесе әртүрлі оңтайландыру алгоритмдері немесе эволюциялық әдістер арқылы шешілген. Мысалы, Differential Evolution әдісі параметрлік кеңістікте жаһандық минимумды іздеуде жоғары тиімділік көрсеткенімен, есептеу шығыны айтарлықтай жоғары болуы мүмкін. Ал ұсынылған түйіндес теңдеулер әдісі функционал градиентін аналитикалық түрде анықтауға мүмкіндік беретіндіктен, итерациялық процесті жылдамдатады және есептеу тиімділігін арттырады.

Сонымен бірге ұсынылған модель бірөлшемді горизонталь қабатталған орта үшін қарастырылған. Сондықтан күрделі үшөлшемді геологиялық құрылымдарды зерттеу кезінде модельді жалпылау және нақты далалық магнитотеллурлық деректерде сынақтан өткізу болашақ зерттеулердің негізгі бағыттарының бірі болып табылады.

Қорытынды

Бұл жұмыста магнитотеллурлық зондылаудың кері есебін шешуге арналған түйіндес теңдеулер әдісіне негізделген сандық алгоритм ұсынылды. Максвелл теңдеулерінен алынған математикалық модель негізінде функционалды минимизациялау тәсілі қолданылып, өткізгіштік коэффициентін қалпына келтіру алгоритмі жасалды. Сандық эксперименттер ұсынылған әдістің орнықтылығын, жинақталуын және жоғары дәлдігін көрсетті. Функционал мәнінің тұрақты төмендеуі мен қалпына келтірілген параметрлердің нақты шешімге жақындауы алгоритмнің тиімділігін растады. Зерттеу нәтижелері магнитотеллурлық зондылау деректерін интерпретациялау сапасын арттыруға мүмкіндік береді және пайдалы қазбаларды барлау, жер қойнауын геофизикалық зерттеу және геоэлектрлік модельдерді құру есептерінде қолдануға негіз болады. Болашақта ұсынылған әдісті көпқабатты және үшөлшемді модельдерге жалпылау, сондай-ақ нақты далалық деректерде апробациялау жоспарланып отыр.

Алғыс

Бұл зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті тарапынан қаржыландырылды (Грант №. BR27100483 «Жер қойнауын пайдаланушылардың бірыңғай платформасы «Minerals.gov.kz» деректерін талдау негізінде жасанды интеллект пен жерді қашықтықтан зондтау әдістерін қолдана отырып, кенді перспективалы аумақтарды бөлудің болжамды-ізвестіру технологияларын әзірлеу»).

Пайдаланылған дереккөздер тізімі

- [1] Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И. Магнитотеллургическое зондирование горизонтально-однородных сред. – Москва: Недра, 1992. – 351 с.
- [2] Кашафутдинов О.В. Обоснование прямой и обратной задач магнитотеллургического зондирования (МТЗ) и эксперименты по их решению. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2005. – 83 с.
- [3] Краснов И.К., Зубарев К.М., Иванова Т.Л. Численное решение задачи восстановления электрофизических параметров по результатам зондирования и переменным током // Математическое моделирование и численные методы. -2018. – №1. – С. 41-54.
- [4] Tikhonov, A.N. On determining electrical characteristics of the deep layers of the Earth's crust. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 1950, 73, 295–297.
- [5] Cagniard, L. Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting. Geophysics 1953, 18, 605–635.
- [6] В.А. Дедок, А.Л. Карчевский, В.Г. Романов, Численный метод определения диэлектрической

проницаемости по модулю вектора электрической напряженности электромагнитного поля, Сиб. журн. индустр. матем., 2019, том 22, номер 3, 48–58 DOI: 10.33048/sibjim.2019.22.305.

[7] Kabanikhin S. I., Lorenzi A. An identification problem related to the integrodifferential Maxwell's equation // *Inverse problems*. – 1991. – Т. 7. – №. 6. – С. 863.

[8] Syrym Kasenov, Altyn Nurseitova and DaniyarNurseitov A conditional stability estimate of continuation problem for the Helmholtz equation // *AIP Conference Proceedings*. – 2016. – V. 1759, 020119

[9] Kasenov, S.E.; Demeubayeva, Z.E.; Temirbekov, N.M.; Temirbekova, L.N. Solution of the Optimization Problem of Magnetotelluric Sounding in Quaternions by the Differential Evolution Method. *Computation* 2024,12, 127. <https://doi.org/10.3390/computation12060127>

References

[1] Berdichevsky, M.N.; Dmitriev, V.I.(2008) *Models and Methods of Magnetotellurics*; Springer Science & Business Media: Berlin/Heidelberg, Germany, 2008.

[2] Kashafutdinov, O.V.(2005) *Obosnovanie prjamoj i obratnoj zadach magnitotellurgicheskogo zondirovaniya (MTZ) i jeksperimenty po ih resheniju.*[Substantiation of Direct and Inverse Problems of Magnetotelluric Sounding (MTS) and Experiments to Solve Them], Krasnojarsk: IVM SO RAN, 83 p.(in Russian)

[3] Krasnov I.K., Zubarev K.M., Ivanova T.L.(2018) *Chislennoe reshenie zadachi voostanovlenija jelektrofizicheskikh parametrov po rezul'tatam zondirovaniya i peremennym tokom* [Umerical solution of the problem of restoring electrophysical parameters based on the results of sounding and alternating current]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody*. No1, pp. 41-54. (in Russian).

[4] Tikhonov, A.N. 1950. “On determining electrical characteristics of the deep layers of the Earth’s crust”. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, vol. 73, pp.295–297.

[5] Cagniard, L. 1953 “Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting”. *Geophysics* vol. 18, 605–635. <https://doi.org/10.1190/1.1437915>

[6] V. A. Dedok, A. L. Karchevskij, V. G. Romanov (2019) *Chislennyj metod opredelenija dijelektricheskoy pronicaemosti po modulju vektora jelektricheskoy naprjazhennosti jelektromagnitnogo polja* [Numerical method for determining the dielectric constant modulo the vector of the electric intensity of the electromagnetic field], *Sib. zhurn. industr. matem.*, vol 22, No. 3, pp. 48–58. <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.305>

[7] Kabanikhin, S.I.; Lorenzi, A.1991. “An identification problem related to the integrodifferent Maxwell’s equation”. *Inverse Probl.* vol. 7, 863. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/7/6/009>

[8] Kasenov, S.; Nurseitova, A.; Nurseitov, D.2016. “A conditional stability estimate of continuation problem for the Helmholtz equation”. *AIP Conf. Proc.* 1759, 020119.

[9] Kasenov, S.E.; Demeubayeva, Z.E.; Temirbekov, N.M.; Temirbekova, L.N. 2024. “Solution of the Optimization Problem of Magnetotelluric Sounding in Quaternions by the Differential Evolution Method”. *Computation*, vol.12, 127. <https://doi.org/10.3390/computation12060127>