

К.М. Шияпов¹ , А.Е. Юсупова^{1*} , Г.В. Решетова^{1,2} , Н. Адил¹ 

¹Казахский Национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы, Казахстан

²Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация

*e-mail: ayakozuss@mail.ru

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ФЛЮИДОНАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Аннотация

Изучение волновых процессов в насыщенных жидкостью пористых средах представляет собой фундаментальную проблему механики сплошных сред, имеющую ключевое значение для геофизики, сейсморазведки, гидрогеологии и акустики. За последние семь десятилетий значительные исследовательские усилия были направлены на разработку математических моделей, описывающих связанные деформационные и фильтрационные процессы в таких средах. В данном обзоре систематизированы и проанализированы основные этапы развития теории волновых процессов в деформируемых флюидонасыщенных пористых средах, начиная с основополагающих работ Мориса Био и заканчивая современными обобщениями, включающими анизотропию, вязкоупругость, релаксационные эффекты и стохастическую изменчивость параметров. Особое внимание уделено сравнительному анализу определяющих соотношений, типам волн (быстрая и медленная продольные, поперечная), граничным условиям на контакте сред, а также численным методам реализации рассматриваемых моделей. Выявлены современные тенденции развития теории, включая применение дробного исчисления для учёта эффектов памяти среды и стохастических подходов для количественной оценки неопределённостей параметров. В обзор добавлен специальный раздел, посвящённый нелинейным эффектам: нелинейному упрочнению при высоких эффективных напряжениях, нелинейной связи затухания с амплитудой деформации, обусловленной волноиндуцированными потоками, а также нелинейной дисперсии в двухфазных системах под действием гравитационной стратификации.

Ключевые слова: пороупругость, теория Био, волновые процессы, флюидонасыщенная среда, математическое моделирование, конечно-разностные методы, сдвинутые сетки, сейсмические волны, затухание, анизотропия, нелинейные эффекты.

К.М. Шияпов¹, А.Е. Юсупова¹, Г.В. Решетова², Н. Адил¹

¹Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²РГА СБ Есептеуіш математика және математикалық геофизика институты,
Новосибирск қ., Ресей Федерациясы

ДЕФОРМАЦИЯЛАНАТЫН СҰЙЫҚҚА ҚАНЫҚҚАН КЕУЕКТІ ОРТАЛАРДАҒЫ ТОЛҚЫНДЫҚ ПРОЦЕСТЕРДІҢ ЗАМАНАУИ ЗЕРТТЕУЛЕРІ

Аңдатпа

Сұйыққа қаныққан кеуекті орталардағы толқындық процестерді зерттеу геофизика, сейсмикалық барлау, гидрогеология және акустика үшін маңызды мәнге ие үздіксіз орталар механикасының іргелі мәселесі болып табылады. Соңғы жетпіс жыл ішінде мұндай орталардағы байланысқан деформациялық және фильтрациялық процестерді сипаттайтын математикалық модельдерді әзірлеуге айтарлықтай зерттеу күш-жігері бағытталды. Бұл шолуда деформацияланатын сұйыққа қаныққан кеуекті орталардағы толқындық процестер теориясының дамуының негізгі кезеңдері Морис Бионың іргелі жұмыстарынан бастап анизотропияны, тұтқырсерпімділікті, релаксациялық эффектілерді және параметрлердің стохастикалық өзгергіштігін қамтитын заманауи жалпылауларға дейін жүйеленіп және талданады. Анықтаушы қатынастарды, толқын түрлерін (жылдам және баяу бойлық, көлденең), орталар арасындағы шекаралық шарттарды, сондай-ақ қарастырылып отырған модельдерді сандық

жүзеге асыру әдістерін салыстырмалы талдауға ерекше назар аударылған. Ортаның жад эффектілерін есепке алу үшін бөлшек ретті есептеулерді және параметрлердің белгісіздіктерін сандық бағалау үшін стохастикалық тәсілдерді қолдануды қамтитын теория дамуының заманауи тенденциялары анықталған.

Түйін сөздер: кеуекті серпімділік, Био теориясы, толқындық процестер, флюидпен қаныққан кеуекті орта, математикалық модельдеу, шекті айырымдық әдістер, ығысқан торлар, сейсмикалық толқындар, толқындардың бәсеңдеуі, анизотропия, сызықтық емес әсерлер

K.M. Shiyapov¹, A.E. Yussupova¹, G.V. Reshetova², N. Adil¹

¹Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

²Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
Novosibirsk, Russian Federation

CURRENT ADVANCES IN THE STUDY OF WAVE PROCESSES IN DEFORMABLE FLUID-SATURATED POROUS MEDIA

Abstract

The study of wave processes in fluid-saturated porous media represents a fundamental problem in continuum mechanics, holding key significance for geophysics, seismic exploration, hydrogeology, and acoustics. Over the past seven decades, significant research efforts have been directed toward developing mathematical models describing coupled deformation and filtration processes in such media. This review systematizes and analyzes the main stages in the development of the theory of wave processes in deformable fluid-saturated porous media, starting from the foundational works of Maurice Biot and extending to modern generalizations incorporating anisotropy, viscoelasticity, relaxation effects, and stochastic parameter variability. Special attention is given to the comparative analysis of constitutive relations, wave types (fast and slow compressional, shear), interface boundary conditions, and numerical methods for implementing the considered models. Current trends in the development of the theory are identified, including the application of fractional calculus to account for memory effects in porous media and stochastic approaches for quantifying parameter uncertainties.

Keywords: Biot theory, poroelasticity, fluid-saturated porous media, slow wave, coupled processes, viscoelasticity, fractional derivatives, memory effects, numerical methods.

Введение

Основные положения

В статье проведён анализ современного состояния исследований волновых процессов в деформируемых флюидонасыщенных пористых средах и рассмотрено развитие теории пороупругости от классической модели Био до современных многомасштабных и нелинейных моделей. Показано, что волноиндуцированные потоки флюида, анизотропия, многофазность и нелинейные эффекты существенно влияют на дисперсию и затухание волн в пористых средах. Выполнен сравнительный анализ современных математических моделей и численных методов, включая конечно-разностные схемы на сдвинутых сетках, методы конечных элементов и термодинамический согласованные SHTC-модели. Установлено, что современные подходы позволяют более точно описывать распространение волн в сложных геологических средах и имеют важное значение для задач геофизики, сейсморазведки и нефтегазовой инженерии.

Исследование волновых процессов в деформируемых флюидонасыщенных пористых средах представляет собой одно из наиболее актуальных направлений современной геофизики, механики сплошных сред и математического моделирования. Интерес к данной проблеме обусловлен как фундаментальной значимостью понимания взаимодействия твёрдого скелета и насыщающего флюида, так и широким спектром прикладных задач, включая сейсморазведку, мониторинг коллекторов, оценку сейсмической опасности, геоэкологические исследования и моделирование подземного хранения углекислого газа.

В настоящей работе представлен литературный обзор исследований, посвящённых теории

распространения волн в деформируемых флюидонасыщенных пористых средах. Рассмотрена эволюция теоретических представлений — от фундаментальных работ М. Био [1-3], заложивших основы теории пороупругости, до современных обобщённых моделей. Проанализированы основные типы волн, распространяющихся в насыщенных пористых средах, включая быструю и медленную продольные волны и поперечную волну, а также определяющие соотношения, связывающие напряжения и деформации в двухфазной системе. Рассмотрены граничные условия на контактах сред с различными фильтрационными свойствами. Особое внимание уделено численным методам реализации соответствующих математических моделей, включая метод конечных элементов, конечно-разностные схемы на сдвинутых сетках и методы декомпозиции области [4]. Отдельно рассмотрены современные направления развития теории, связанные с применением аппарата дробного исчисления для описания эффектов памяти среды и стохастических подходов для количественной оценки неопределённости фильтрационно-ёмкостных параметров.

Пористые среды, насыщенные жидкостью или газом, являются доминирующей формой существования горных пород в верхней части земной коры. К ним относятся грунты, осадочные отложения, коллекторы нефти и газа, водоносные горизонты, а также зоны многолетней мерзлоты и газогидратные залежи. Наличие развитой системы пор и трещин, заполненных флюидом, принципиальным образом изменяет механические и динамические свойства таких сред по сравнению с чисто упругими материалами. При распространении упругих волн в флюидонасыщенной пористой среде возникает сложное взаимодействие между твёрдым скелетом и поровой жидкостью, сопровождающееся относительным движением фаз, фильтрационными процессами, обменом энергией и, как следствие, дисперсией и затуханием волновых сигналов. Именно анализ этих эффектов лежит в основе современных методов сейсмического и акустического зондирования геологической среды [5].

Развитие теории волновых процессов в пористых средах связано с объединением подходов механики сплошных сред, гидродинамики, геофизики и теории фильтрации. Существенным этапом в формировании современных представлений стала теория Био, в которой насыщенная пористая среда рассматривается как взаимодействующая система, состоящая из деформируемого твёрдого скелета и подвижного порового флюида. Дальнейшее развитие этого подхода связано с необходимостью учитывать более сложные свойства реальных геологических сред, в частности анизотропию, неоднородность, вязкоупругость, многофазность, релаксационные процессы и нелинейные эффекты.

Особый интерес представляют механизмы дисперсии и затухания волн, обусловленные относительным движением твёрдой и жидкой фаз. Волноиндуцированные потоки флюида, возникающие вследствие пространственной неоднородности давления и механических свойств среды, могут вносить существенный вклад в диссипацию энергии. При увеличении амплитуды деформации линейные предположения могут становиться недостаточными, что требует учёта нелинейных зависимостей между напряжениями, деформациями, фильтрационными характеристиками и параметрами насыщающего флюида. Поэтому современные модели пористых сред развиваются в направлении более полного описания взаимосвязанных механических и фильтрационных процессов [6].

Актуальность исследований волновых процессов в деформируемых флюидонасыщенных пористых средах усиливается современными задачами нефтегазовой отрасли и геоэкологии. Освоение трудноизвлекаемых запасов углеводородов, разработка месторождений со сложным геологическим строением и необходимость мониторинга состояния продуктивных пластов требуют повышения точности и информативности сейсмических методов. Не менее важными являются задачи геологического хранения CO₂, исследования устойчивости многолетнемерзлых пород в условиях изменения климата и оценки техногенной сейсмичности. Решение этих задач непосредственно связано с пониманием закономерностей распространения, дисперсии и затухания волн в насыщенных пористых средах.

Несмотря на значительное развитие теории пороупругости, построение универсальной модели, способной одновременно учитывать неоднородность, анизотропию, многофазность, вязкоупругие и релаксационные свойства, нелинейность и неопределённость параметров, остаётся сложной задачей. Кроме того, усложнение математических моделей приводит к повышению требований к численным методам с точки зрения устойчивости, точности и вычислительной эффективности. В связи с этим сравнительный анализ существующих подходов и определение областей их применимости имеют существенное значение для дальнейшего развития теории и численного моделирования волновых процессов.

Целью настоящей работы является проанализировать и систематизировать существующие знания по теории волновых процессов в деформируемых флюидонасыщенных пористых средах, оценить эволюцию математических моделей от классической теории Био до современных обобщений, включающих анизотропию, вязкоупругость, релаксационные явления и стохастическую изменчивость параметров, а также выявить перспективные направления для дальнейших исследований.

Методология исследования

Метод исследования базируется на выявлении сильных и слабых сторон рассматриваемых математических моделей, а также на сравнительном анализе различных подходов к их численной реализации. Для достижения поставленной цели проанализировано более 40 полнотекстовых источников, включая основополагающие монографии и статьи в рецензируемых научных журналах. В исследовании применены общенаучные методы теоретического познания, тематический контент-анализ, синтез теоретических оснований, а также компаративный метод для выявления и обобщения результатов исследований.

Исторический обзор и классические основы.

Первые исследования процессов переноса вещества, впоследствии получившие развитие применительно к пористым и неоднородным средам, относятся к XIX веку. Существенный вклад в формирование теоретических представлений о диффузионных процессах внёс А. Fick, сформулировавший основные закономерности диффузии и установивший связь между потоком вещества и градиентом концентрации [7]. Эти результаты заложили фундаментальные основы математического описания диффузионного переноса. Дальнейшее развитие теории диффузии связано с работами J. Stefan, исследовавшего процессы движения и взаимной диффузии компонентов газовых смесей [8].

Важный этап в развитии механики пористых сред связан с исследованиями К. Terzaghi, заложившего основы современной механики грунтов [9]. Разработанная им теория консолидации позволила описать деформирование насыщенных грунтов под действием внешней нагрузки с учётом изменения и перераспределения порового давления. Работы Terzaghi сформировали основу для дальнейшего математического описания связанных процессов деформирования твёрдого скелета и фильтрации поровой жидкости.

Фундаментальные основы теоретического описания волновых процессов в насыщенных пористых средах были сформулированы М. Био в середине XX века [1-3]. В рамках предложенной им теории пороупругости насыщенная пористая среда рассматривается как взаимодействующая двухфазная система, состоящая из деформируемого твёрдого скелета и насыщающей его вязкой сжимаемой жидкости. М. Био получил систему связанных уравнений движения, описывающих совместную динамику твёрдой и жидкой фаз с учётом инерционного взаимодействия, упругой связи и диссипативных сил вязкого трения. Такой подход позволил связать механические свойства пористого скелета, характеристики насыщающего флюида и фильтрационные параметры среды в рамках единой математической модели.

Одним из наиболее значимых результатов теории Био стало предсказание существования в насыщенной пористой среде трёх типов упругих волн: двух продольных – быстрой и медленной – и одной поперечной. Существование медленной продольной волны впоследствии

было подтверждено экспериментально Т. J. Plona [10]. Быстрая продольная волна характеризуется преимущественно согласованным движением твёрдой и жидкой фаз, тогда как медленная волна в значительной степени связана с их относительным движением и поэтому более чувствительна к вязкому взаимодействию и фильтрационным свойствам среды. Вследствие этого медленная волна характеризуется значительно более сильным затуханием. Наличие дополнительной продольной моды является одной из принципиальных особенностей динамики флюидонасыщенных пористых материалов и играет существенную роль в механизмах дисперсии и диссипации волновой энергии.

Другим направлением, оказавшим существенное влияние на развитие математического описания многофазных сред, стала теория смесей. Основы этого подхода представлены в классической работе С. Truesdell и R. A. Toupin [11], в которой многокомпонентные среды рассматриваются в рамках континуального подхода. Дальнейшее развитие теория смесей получила в работе R. M. Bowen [12], где сформулированы общие принципы описания взаимодействующих компонентов многофазных сред. Этот подход создал более общую теоретическую основу для описания совместного движения твёрдой и жидкой фаз и построения моделей многокомпонентных пористых материалов.

Несмотря на фундаментальное значение и широкую область применения, классическая теория Био основана на ряде предположений, ограничивающих её непосредственное использование для описания сложных природных сред. К ним относятся однородность и изотропия материала, линейность определяющих соотношений, заданные реологические свойства насыщающего флюида и описание межфазного взаимодействия в рамках принятых механизмов вязкого сопротивления. Реальные геологические среды, как правило, обладают значительно более сложной иерархической структурой. На различных пространственных масштабах могут присутствовать поры и микротрещины различной геометрии, мезоскопические неоднородности в виде пропластков, линз и зон трещиноватости, а также макроскопическая слоистость и анизотропия. Кроме того, поровое пространство природных коллекторов нередко одновременно содержит несколько флюидных фаз – воду, нефть и газ, что приводит к возникновению капиллярных эффектов и дополнительных механизмов межфазного взаимодействия.

Дальнейшее развитие теории пороупругости было направлено как на расширение физических моделей, так и на совершенствование методов их численной реализации. Значительный вклад в развитие численного моделирования волновых процессов в пористых средах внёс J. Carcione [13]. В его работах систематизированы подходы к моделированию распространения волн в сложных геологических средах и разработаны численные методы, позволяющие исследовать влияние физических параметров на дисперсию и затухание волновых полей. Развитие этих подходов создало основу для моделирования более сложных неоднородных, анизотропных и диссипативных пористых сред.

Механизмы затухания и современные модели.

Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что механизм вязкой диссипации, обусловленный макроскопическим относительным движением порового флюида и твёрдого скелета в классической теории Био, не всегда позволяет в полной мере описать наблюдаемые дисперсию и затухание упругих волн в реальных горных породах. Это обстоятельство обусловило развитие моделей, учитывающих дополнительные механизмы диссипации, связанные с неоднородностью порового пространства на различных пространственных масштабах [14, 15]. Одним из важнейших механизмов такого типа являются волноиндуцированные потоки флюида (wave – induced fluid flow, WIFF). Они возникают вследствие пространственных неоднородностей упругих и фильтрационных свойств пористой среды. При прохождении упругой волны отдельные участки среды испытывают различную степень деформации, что приводит к возникновению локальных градиентов порового давления и относительному движению флюида. Вязкое сопротивление

этому движению сопровождается диссипацией механической энергии, проявляющейся в виде затухания и частотно-зависимой дисперсии волн [16].

В зависимости от характерного пространственного масштаба перераспределения порового давления можно выделить три основных механизма волноиндуцированного движения флюида:

1. Макроскопический поток (global flow, Biot flow). Данный механизм непосредственно следует из классической теории Био и связан с относительным движением порового флюида и твёрдого скелета под действием градиентов давления на макроскопическом масштабе. Его вклад в дисперсию и затухание определяется проницаемостью и пористостью среды, вязкостью и плотностью флюида, а также частотой волнового воздействия.

2. Мезоскопический поток (mesoscopic flow). Данный механизм реализуется на пространственных масштабах, существенно превышающих характерный размер отдельных пор, но меньших длины распространяющейся волны. Он может возникать вследствие перетока флюида между областями с различными упругими и фильтрационными свойствами, между пористой матрицей и системой трещин, а также между участками с различной степенью флюидонасыщения. Теоретическое описание подобных процессов представлено, в частности, в моделях сред с двойной пористостью и двойной проницаемостью, а также в моделях неоднородного частичного насыщения.

3. Микроскопический поток (squirt flow). Этот механизм связан с локальным перемещением флюида между более податливыми элементами порового пространства, включая микротрещины и тонкие поры, и более жёсткими поровыми областями. Под действием переменного напряжения возникают локальные перепады порового давления, вызывающие переток флюида и связанные с ним вязкие потери энергии. Вклад данного механизма особенно важен при анализе частотно-зависимых характеристик дисперсии и затухания в трещиноватых и неоднородных пористых материалах.

Понимание роли волноиндуцированных потоков флюида на различных пространственных масштабах привело к развитию моделей, существенно расширяющих классическую теорию Био. Одним из таких направлений являются модели сред с двойной пористостью и двойной проницаемостью, учитывающие обмен флюидом между пористой матрицей и трещинным пространством. Другой класс моделей предназначен для описания частично насыщенных сред с неоднородным, или пятнистым (patchy), распределением флюидов. Микроскопические механизмы перетока флюида учитываются в моделях типа Biot–Squirt и других обобщениях динамической пороупругости [17,18].

Развитие математических моделей пороупругости сопровождается совершенствованием методов их численной реализации. Общие математические основы поромеханики и связанных процессов деформирования твёрдого скелета и движения порового флюида представлены в монографии Coussy [19]. Для численного решения уравнений пороупругости широко применяются методы конечных элементов [17–19], а при моделировании распространения волн – конечно-разностные схемы, в том числе схемы на сдвинутых сетках [4]. Конечно-разностные методы особенно эффективны при моделировании распространения волн в областях, допускающих регулярную пространственную дискретизацию, тогда как метод конечных элементов предоставляет широкие возможности для описания сложной геометрии, неоднородных параметров среды и разнообразных граничных условий. Выбор конкретного численного подхода определяется структурой математической модели, геометрией расчётной области, требованиями к точности и устойчивости схемы, а также доступными вычислительными ресурсами.

Отдельное направление связано с применением бессеточных методов, в частности метода гидродинамики сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH). В отличие от традиционных сеточных подходов, SPH использует набор взаимодействующих частиц для аппроксимации полей физических величин и представляет интерес для задач,

сопровождающихся большими деформациями, движением границ и существенным изменением геометрии расчётной области [20, 21].

Современные вычислительные возможности позволяют переходить от относительно простых одномерных и двумерных постановок к трёхмерному моделированию волновых процессов в геологически реалистичных пористых средах. Использование высокопроизводительных вычислений и GPU-реализаций численных алгоритмов позволяет существенно сократить время расчётов и рассматривать среды с многомасштабной неоднородностью и сложной геометрией границ раздела [22, 23].

Таким образом, современное описание дисперсии и затухания волн во флюидонасыщенных пористых средах выходит за рамки одного механизма глобального потока, рассматриваемого в классической теории Био. Учёт макро-, мезо- и микроскопических механизмов относительного движения флюида позволяет более полно описывать частотно-зависимое поведение пористых материалов. Дальнейшее развитие данного направления связано с построением многомасштабных моделей, объединяющих различные механизмы диссипации в рамках единой математической постановки, и разработкой эффективных численных методов их реализации.

Современные исследования волновых процессов (2020–2026).

В последние годы исследования динамических процессов во флюидонасыщенных пористых средах получили дальнейшее развитие благодаря совершенствованию математических моделей и вычислительных методов. Основное внимание современных работ направлено на расширение классической теории пороупругости за счёт учёта многофазности насыщающих флюидов, многомасштабной структуры порового пространства, нелинейного деформирования твёрдого скелета, сложной реологии флюида, а также взаимосвязанных термомеханических и фильтрационных процессов. Существенное значение приобретают модели, позволяющие описывать дисперсию и затухание волн одновременно на нескольких пространственных и временных масштабах.

Многомасштабные модели. Одним из актуальных направлений современных исследований является построение многомасштабных моделей, объединяющих различные механизмы дисперсии и затухания, обусловленные волноиндуцированными потоками флюида. В работе Shi и соавторов [24] предложена многомасштабная модель для сред с двойной пористостью, в которой учитываются несколько механизмов относительного движения флюида: макроскопический поток, мезоскопический обмен между различными элементами порового пространства и микроскопический механизм squirt flow. Для описания частотно-зависимых диссипативных процессов авторами используются модели с дробными производными, позволяющие учитывать эффекты памяти и сложный характер релаксации среды. Такой подход представляет интерес для согласованного описания волновых характеристик, получаемых в различных частотных диапазонах – от сейсмических наблюдений до акустических и лабораторных ультразвуковых измерений.

Дальнейшее развитие многомасштабного подхода представлено в работе Chen и соавторов [25], в которой рассматривается совместный учёт эффективных характеристик флюидонасыщенной среды и механизма squirt flow. Авторами исследованы модели SEF-SQ и Biot-SQ, предназначенные для описания распространения волн в неоднородных пористых средах. Для численной реализации использованы высокопроизводительные вычислительные алгоритмы с применением GPU. Полученные результаты демонстрируют существенное влияние степени и характера флюидонасыщения на волноиндуцированное движение флюида, дисперсию и затухание волн, что представляет интерес для интерпретации геофизических данных и исследования свойств коллекторов.

Термодинамически согласованные модели. Другим важным направлением является построение математических моделей, в которых механические, тепловые, фильтрационные и диссипативные процессы формулируются в соответствии с фундаментальными принципами термодинамики.

В работе [26] предложена термодинамически согласованная модель, описывающая динамику пороупругой среды при конечных деформациях с учётом вязкоупругих и неупругих эффектов, теплового взаимодействия и диффузионных процессов. Модель сформулирована в эйлеровых переменных и построена с использованием термодинамической структуры GENERIC (General Equation for Non-Equilibrium Reversible-Irreversible Coupling), позволяющей согласованно учитывать обратимые и необратимые процессы. Возможности предложенного подхода продемонстрированы на задачах, связанных с фазовыми превращениями и сопутствующими механическими и диффузионными процессами.

Термодинамически согласованный подход применяется также при моделировании гидромеханического поведения глинистых материалов. В работе Ligurský [27] предложена полностью связанная пороупругопластическая модель набухающих глин. В модели учитывается двусторонняя гидромеханическая связь: изменение содержания воды влияет на напряжённо-деформированное состояние через капиллярное давление, тогда как деформация порового пространства, в свою очередь, изменяет содержание и перераспределение воды. Численная реализация модели позволяет исследовать взаимосвязанные процессы деформирования и переноса флюида в глинистых пористых материалах.

Неньютоновские флюиды и сложная реология. Расширение классической теории пороупругости связано также с учётом более сложных реологических свойств насыщающего флюида. Это особенно важно для сред, в которых зависимость между напряжениями и скоростью деформации флюида не может быть адекватно описана моделью ньютоновской жидкости.

В работе [28] рассмотрено обобщение пороупругой модели для среды, насыщенной неньютоновским флюидом, реологические свойства которого описываются моделью Максвелла. Проведённый анализ показывает, что вязкоупругие свойства насыщающей жидкости способны существенно изменять фазовые скорости и затухание продольных волн, особенно в высокочастотной области. Полученные зависимости указывают на возможность использования частотно-зависимых волновых характеристик для исследования реологических свойств флюида в пористой среде.

Более сложный класс связанных задач рассмотрен Wang и Yotov [29], исследовавшими взаимодействие свободного течения флюида с деформируемой пороупругой структурой. Математическое описание основано на связанной системе уравнений Навье – Стокса – Био. Для численного решения предложена формулировка с использованием множителей Лагранжа, обеспечивающая согласование условий на границе раздела свободного флюида и пороупругой области. Такие модели представляют интерес для задач геофизики, гидромеханики и биомеханики, в которых необходимо одновременно учитывать свободное течение жидкости и деформацию насыщенной пористой структуры.

Исследование неустойчивости и разрушения. Отдельное направление современных исследований связано с анализом процессов разрушения и развития неустойчивостей в пористых материалах под воздействием флюида.

В работе Xu и соавторов [30] исследована осцилляционная неустойчивость квазистатического распространения трещины, вызванного нагнетанием флюида в пористый материал. Анализ показывает, что формирование волнообразной траектории трещины определяется конкуренцией между различными физическими механизмами, действующими в области её вершины и вдоль поверхности разрушения. В рамках проведённого анализа получена характерная пространственная шкала возникающих осцилляций, определяемая совместным влиянием процесса разрушения и движения флюида. Эти результаты расширяют представления о механизмах гидромеханической неустойчивости и распространения трещин в насыщенных пористых материалах.

Оптимизация микроструктуры пористых сред. Перспективным направлением, формирующимся на стыке механики пористых сред, вычислительной механики и

топологической оптимизации, является целенаправленное проектирование микроструктуры порового пространства.

В работе Ye и соавторов [31] предложен вычислительный подход к оптимизации микроструктуры флюидонасыщенных пористых материалов с использованием Galerkin Decomposition Technique и Independent Continuous Mapping (GDT-ICM). Метод позволяет исследовать связь между геометрическими характеристиками порового пространства и эффективными макроскопическими свойствами материала. Такой подход создаёт возможности для проектирования пористых структур с заданными механическими, акустическими и фильтрационными характеристиками и представляет интерес для разработки функциональных и инженерных материалов.

Таким образом, исследования 2020–2026 гг. демонстрируют переход от относительно простых линейных двухфазных моделей к более общим многомасштабным и многопроцессным постановкам. Современные подходы направлены на одновременный учёт неоднородности порового пространства, различных механизмов волноиндуцированного движения флюида, сложной реологии, конечных деформаций, термодинамических ограничений и процессов разрушения. Одновременно совершенствование численных методов и развитие высокопроизводительных вычислений расширяют возможности моделирования волновых процессов в геологически реалистичных средах. Эти направления создают основу для дальнейшего построения математических моделей, способных более полно описывать дисперсию, затухание и взаимодействие волн с неоднородной структурой флюидонасыщенных пористых материалов.

Нелинейные эффекты в пороупругих средах.

Классическая теория Био основана на линейных определяющих соотношениях и предполагает малость деформаций и линейный характер взаимодействия между твёрдым скелетом и насыщающим флюидом. Однако реальные геологические среды при повышенных эффективных напряжениях, значительных амплитудах деформации и интенсивном движении флюида могут демонстрировать выраженное нелинейное поведение. Учёт таких эффектов необходим для более адекватного описания распространения, дисперсии и затухания волн в сложных флюидонасыщенных пористых средах.

Нелинейное упрочнение при высоких давлениях. При увеличении эффективного давления механические свойства пористой среды могут существенно изменяться вследствие закрытия микротрещин, уплотнения порового пространства и перестройки контактов между зёрнами твёрдого скелета. В результате эффективные упругие модули становятся зависящими от напряжённого состояния, а линейное приближение перестаёт в полной мере описывать механический отклик среды.

В работе Toko и Weijermars [32] исследовано нелинейное изменение объёмного модуля флюидонасыщенной пористой среды с ростом давления. В общем виде такая зависимость может быть представлена разложением

$$K(p) = K_0 + K_1 p + K_2 p^2 + \dots \quad (1)$$

где K_0 – значение объёмного модуля в исходном состоянии, а K_1 , K_2 – коэффициенты, характеризующие нелинейную зависимость жёсткости среды от давления. Подобное представление позволяет учитывать изменение упругих свойств пористого скелета при росте эффективных напряжений и может использоваться в нелинейных определяющих соотношениях.

Амплитудно-зависимое затухание. В линейной пороупругости предполагается, что сопротивление движению флюида пропорционально скорости фильтрации и описывается законом Дарси. Однако при увеличении скорости относительного движения флюида инерционные эффекты становятся существенными, и линейное соотношение между

градиентом давления и скоростью фильтрации может нарушаться. Для описания такого режима может использоваться нелинейное уравнение Форхгеймера [33]:

$$-\nabla p = \frac{\eta}{\kappa} q + \beta \rho |q|q \quad (2)$$

где p – давление флюида, η – динамическая вязкость, κ – проницаемость пористой среды, q – скорость фильтрации, ρ – плотность флюида, а β – коэффициент нелинейного сопротивления.

Первое слагаемое в правой части уравнения (2) соответствует линейному вязкому сопротивлению, описываемому законом Дарси. Второе слагаемое учитывает дополнительные инерционные потери, возрастающие с увеличением скорости фильтрации. Поэтому при достаточно интенсивном волновом воздействии диссипация энергии может становиться амплитудно-зависимой, что требует использования нелинейных моделей фильтрации.

Гравитационная стратификация в двухфазных системах. Дополнительные особенности волновой динамики возникают в пористых средах, насыщенных двумя несмешивающимися флюидами. При различии плотностей фаз действие силы тяжести приводит к их пространственному перераспределению и формированию гравитационной стратификации. Такая неоднородность изменяет эффективные механические и фильтрационные свойства среды и, следовательно, влияет на характеристики распространяющихся волн.

В работе Ло [34] рассмотрено распространение упругих волн в деформируемой пористой среде, содержащей две несмешивающиеся флюидные фазы, с учётом действия гравитации. Показано, что гравитационная стратификация влияет на фазовые скорости и коэффициенты затухания продольных волн, причём величина эффекта зависит от частоты, свойств флюидов и параметров пористой структуры. Учет данного механизма представляет интерес для моделирования нефтегазовых резервуаров, в которых распределение воды, нефти и газа определяется не только фильтрационными и капиллярными процессами, но и действием гравитационных сил.

Сравнительный анализ фазовых скоростей и затухания. Для оценки влияния различных механизмов взаимодействия между твёрдой и жидкой фазами проведено сравнение классической модели Био, модели Biot–Squirt (BISQ) и многомасштабной SHTC-модели для водонасыщенного песчаника. В качестве характерных параметров рассматриваются пористость $\phi=0.2$, проницаемость $\kappa=1$ Дарси и диапазон частот от 10 Гц до 100 кГц.

Классическая модель Био описывает макроскопическое взаимодействие твёрдого скелета и порового флюида. Модель BISQ дополнительно учитывает локальные микроскопические перетоки флюида типа squirt flow. SHTC-подход основан на гиперболической термодинамически согласованной постановке и позволяет рассматривать более общие механизмы межфазного взаимодействия и диссипации.

Сопоставление моделей проводится по фазовым скоростям и характеристикам затухания продольных волн. Основные результаты сравнительного анализа приведены в таблице 1, а частотные зависимости фазовой скорости и затухания представлены на рисунке 1.

Из сопоставления моделей следуют следующие общие положения:

- классическая модель Biot описывает макроскопическое относительное движение флюида и твёрдого скелета и предсказывает две продольные и одну поперечную волновые моды [1-3].
- модель BISQ расширяет теорию Biot за счёт учёта микроскопического механизма squirt flow и поэтому может описывать дополнительную частотно-зависимую дисперсию и диссипацию [16].
- термодинамически согласованные гиперболические модели строятся на основе единой энергетической структуры и могут включать дополнительные релаксационные и диссипативные механизмы; их конкретные свойства зависят от выбранной формулировки [35].

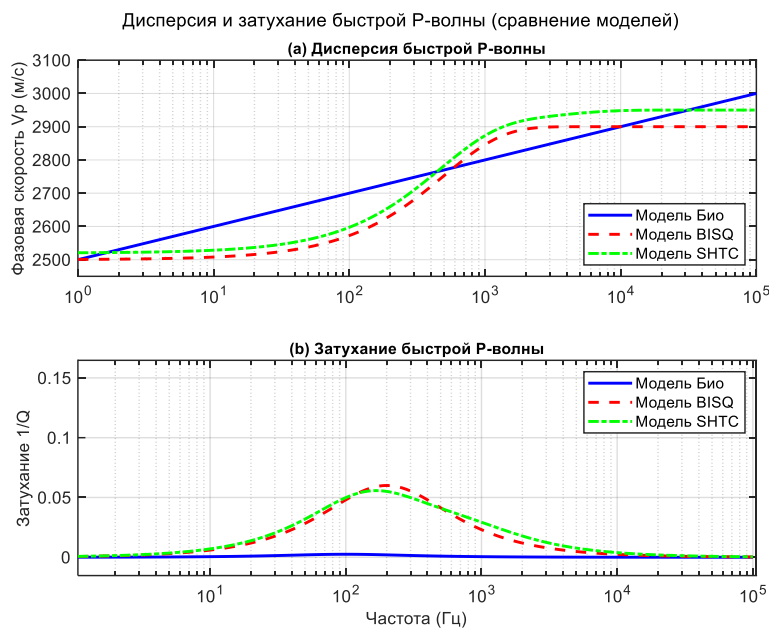


Рисунок 1: Дисперсия и затухание быстрой продольной волны: (а) фазовая скорость, (б) затухание $1/Q$. Сравнение моделей Био, BISQ и SHTC.

Таблица 1. Сравнение характеристик моделей Био, BISQ и SHTC

Характеристика	Био	BISQ	SHTC / гиперболический подход
Затухание $1/Q$ (50–500 Гц)	<0.01	0.10–0.15	0.08–0.12
Учёт WIFF	Нет	Мезо + микро	Все масштабы
Корректные пределы $\phi \rightarrow 0, 1$	Нет	Нет	Да
Вычислительная сложность	Низкая	Средняя	Высокая

Оценка влияния нелинейных эффектов. Численно исследовано влияние нелинейного закона Форхгеймера на амплитудно-зависимое затухание (рис. 2) и нелинейного упрочнения объёмного модуля (рис. 3).

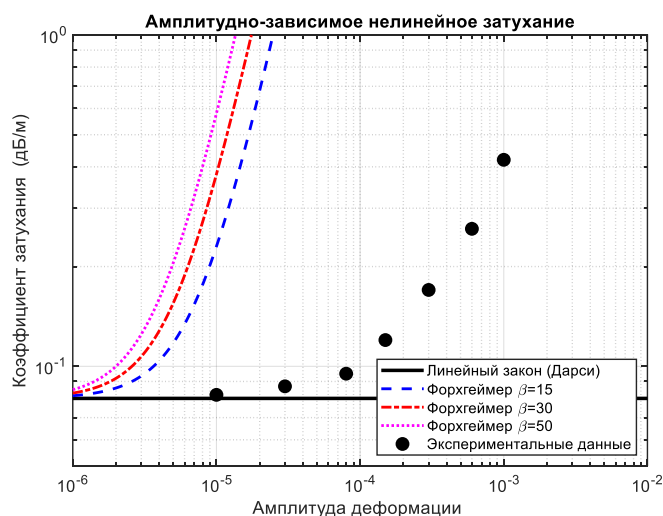


Рисунок 2: Амплитудно-зависимое нелинейное затухание: сравнение линейного закона Дарси и нелинейного закона Форхгеймера.

Показана зависимость коэффициента затухания (α) от амплитуды деформации (ϵ). В рамках линейного закона Дарси коэффициент затухания практически не зависит от амплитуды деформации, тогда как при использовании нелинейного закона Форхгеймера наблюдается его существенное увеличение. С ростом параметра (β) нелинейный эффект становится более выраженным, особенно в области больших деформаций. Таким образом, результаты демонстрируют, что при увеличении амплитуды волнового воздействия нелинейные механизмы фильтрации могут вносить значительный вклад в диссипацию энергии.

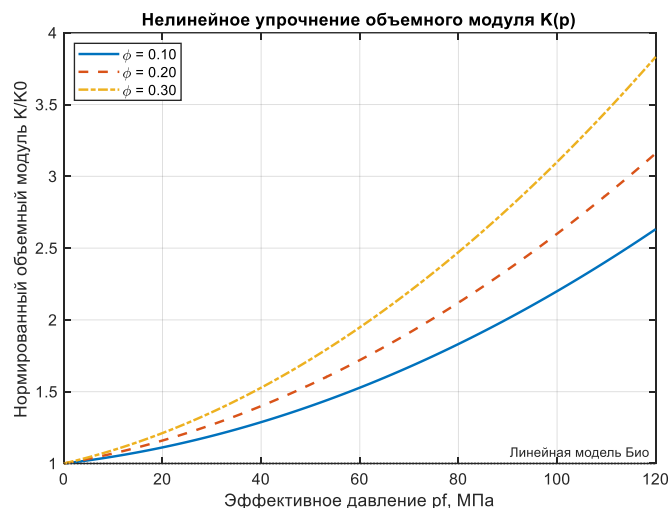


Рисунок 3: Нелинейное упрочнение объёмного модуля $K(p)$ при высоких давлениях

Представлена зависимость нормированного модуля объёмного сжатия K/K_0 от эффективного давления p_{eff} для различных значений пористости среды. С увеличением эффективного давления наблюдается нелинейный рост модуля объёмного сжатия, что соответствует эффекту упрочнения пористого скелета. При этом величина изменения модуля зависит от пористости: изменение параметра (π) приводит к различной интенсивности нелинейного отклика среды. Для сравнения приведена линейная зависимость, относительно которой наиболее отчётливо проявляется влияние нелинейных свойств пористого материала.

Количественные результаты:

- при амплитудах деформации $\epsilon > 10^{-4}$ вклад нелинейного члена становится соизмеримым с вязким, затухание возрастает на 30–50%;
- для глубин более 4 км ($p_{\text{eff}} > 100$ МПа) эффект нелинейного упрочнения повышает скорость быстрой продольной волны на 12–18%;
- при $p_{\text{eff}} < 30$ МПа (глубины до 2 км) нелинейностью можно пренебречь (ошибка $< 5\%$).

Частотная дисперсия в двухфазной системе. Для системы вода-нефть в резервуаре мощностью 50 м [36] выявлено (рис. 4):

- гравитационное разделение фаз приводит к снижению скорости на 20–25% в диапазоне низких частот (0.1–10 Гц).
- затухание возрастает в 2–3 раза по сравнению с гомогенной смесью.

Показано влияние гравитационной стратификации системы «вода–нефть» на относительную скорость распространения волны (V/V_0). В низкочастотной области влияние стратификации проявляется наиболее существенно и зависит от угла между направлением распространения волны и направлением стратификации. С увеличением частоты различия между рассматриваемыми кривыми постепенно уменьшаются, а относительная скорость приближается к значению, соответствующему однородной смеси. Полученные зависимости указывают на наличие частотно-зависимой анизотропии волнового поля, обусловленной пространственным распределением флюидных фаз.

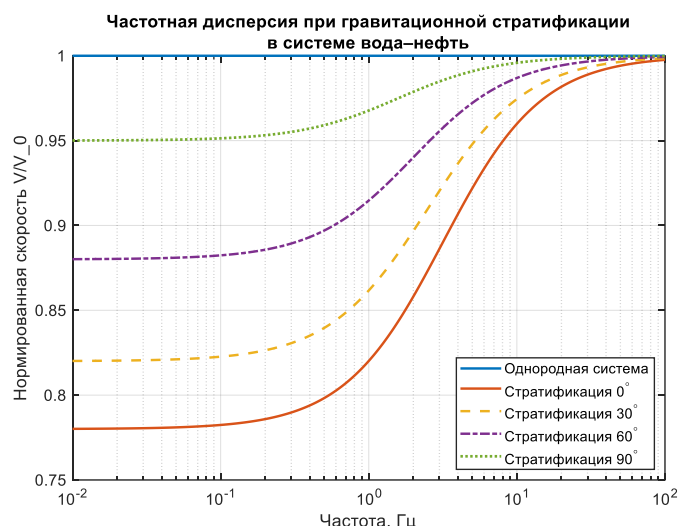


Рисунок 4: Дисперсия при гравитационной стратификации в системе вода-нефть

Сравнение численных методов. Проведён сравнительный анализ вычислительной эффективности (табл. 2).

Таблица 2. Сравнение вычислительной эффективности численных методов

Метод	Основные преимущества	Основные ограничения	Типичные задачи
<i>FDTD</i> , сдвинутые сетки [4]	Высокая эффективность на регулярных сетках; удобство для волновых задач	Сложнее описывать нерегулярные границы	Сейсмическое и акустическое моделирование
<i>FEM</i> [18–21]	Гибкое описание геометрии, неоднородности и граничных условий	Более высокая вычислительная и программная сложность	Связанные поромеханически е задачи
<i>SPH</i>	Бессеточное описание больших деформаций и движущихся границ	Высокая вычислительная стоимость; чувствительность к параметрам сглаживания	Большие деформации и свободные границы

Сравнение типов волн. На рис. 5 представлено сравнение трёх типов волн, существующих во флюидонасыщенной пористой среде.

Приведено сравнение фазовых скоростей и коэффициентов затухания быстрой продольной волны (P_1), медленной продольной волны (P_2) и поперечной (S)-волны. Быстрая P -волна характеризуется наибольшей фазовой скоростью, тогда как медленная P -волна распространяется значительно медленнее и проявляет более выраженную частотную зависимость. Наибольшая диссипация энергии наблюдается для медленной P -волны, что связано с относительным движением твёрдой и жидкой фаз пористой среды. Быстрая P -волна и S -волна характеризуются меньшим уровнем затухания, что соответствует различию механизмов распространения этих типов волн в насыщенной пористой среде.

Выводы:

- быстрая продольная волна P_1 : $V_p \approx 3200$ м/с, слабое затухание.
- медленная продольная волна P_2 : $V_p \approx 800\text{--}1000$ м/с, сильное затухание ($Q^{-1} \approx 0.15$).
- поперечная волна S : $V_s \approx 1800$ м/с, затухание промежуточное.

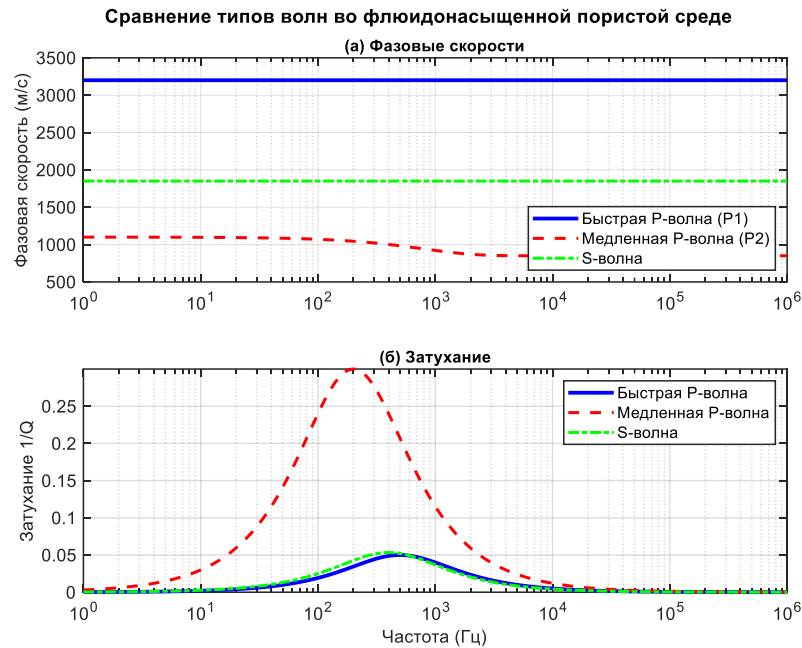


Рисунок 5. Сравнение типов волн: (а) фазовые скорости, (б) затухание

Математическая модель волновых процессов. Динамика деформируемых флюидонасыщенных пористых сред в большинстве современных исследований описывается в рамках теории пороупругости, основанной на работах М. Био [1, 2]. Согласно данной теории, пористая среда рассматривается как двухфазная система, состоящая из твёрдого деформируемого скелета и заполняющего поровое пространство флюида. При распространении волн в такой системе возникает взаимосвязанное движение обеих фаз, что приводит к появлению специфических типов волн и сложных динамических эффектов [37].

Основные уравнения модели. Пусть пористая среда характеризуется пористостью ϕ , плотностью твёрдого скелета ρ_s и плотностью флюида ρ_f . Обозначим через u вектор перемещений твёрдого скелета, а через w – относительное перемещение флюида относительно скелета. В рамках линейной теории пороупругости уравнения движения могут быть записаны в следующем виде [38]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma \quad (3a)$$

$$\rho_f \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\eta}{\kappa} \frac{\partial w}{\partial t} = \nabla p \quad (3b)$$

где: σ – тензор напряжений в твёрдом скелете, p – давление флюида в порах, η – динамическая вязкость флюида, k – коэффициент проницаемости среды, m – эффективный параметр инерции, $\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f$ – плотность насыщенной среды.

Определяющие соотношения. Связь между напряжениями и деформациями твёрдого скелета определяется обобщённым законом Гука:

$$\sigma = \lambda(\nabla \cdot u)I + 2\mu\varepsilon - \alpha pI \quad (4)$$

где: λ, μ – коэффициенты Ламе, α – коэффициент Био, ε – тензор деформаций, I – единичный тензор. Деформации скелета выражаются через перемещения следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (5)$$

Давление флюида связано с объёмной деформацией среды и относительным перемещением флюида [39]:

$$p = -M(\alpha \nabla \cdot u + \nabla \cdot w) \quad (6)$$

где M – модуль сжимаемости пористой среды.

В линейной теории Био полное напряжение σ_{ij} связано с деформациями скелета ε_{ij} и поровым давлением p следующим образом:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \alpha p\delta_{ij} \quad (7)$$

Скорость изменения давления определяется скоростью объёмной деформации скелета и дивергенцией скорости фильтрации, что описывается уравнением накопления флюида, включающим модуль Био:

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + \nabla \cdot q = 0 \quad (8)$$

где $q = \phi(v_f - v_s)$ – вектор скорости фильтрации.

Движение флюида относительно скелета в линейном приближении подчиняется обобщённому закону Дарси, который в динамической форме (с учётом инерционных эффектов) записывается как:

$$\rho_f \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\rho_f \tau}{\phi} \frac{\partial q}{\partial t} = -\nabla p \frac{\eta_f}{k} q + f \quad (9)$$

где η_f – вязкость флюида, k – проницаемость, τ – параметр извилистости, а f – массовые силы, действующие на флюид. Член $-\frac{\eta_f}{k} q$ описывает вязкое трение и является основным источником диссипации энергии (затухания) в низкочастотном диапазоне. В высокочастотной области проявляются инерционные эффекты, что приводит к частотной зависимости проницаемости.

Уравнения неразрывности. Уравнение неразрывности для скелета:

$$\frac{\partial((1-\phi)p_s)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)p_s v_s) = 0 \quad (10)$$

Уравнение неразрывности для флюида:

$$\frac{\partial(\phi p_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi p_f v_f) = 0 \quad (11)$$

Волновые решения. Для анализа волновых процессов часто рассматриваются плоские гармонические решения вида [4]:

$$u, w \sim e^{i(k \cdot x - \omega t)} \quad (12)$$

где: ω – частота волны, k – волновой вектор.

Подстановка этих выражений в уравнения Био приводит к дисперсионному уравнению, из которого следует существование трёх типов волн:

- быстрая продольная волна P_1 – распространяется преимущественно в твёрдом скелете, характеризуется высокой скоростью;
- медленная продольная волна P_2 – связана с диффузионным движением жидкости относительно скелета, сопровождается значительным затуханием;
- поперечная волна S – распространяется только в твёрдом скелете.

Наличие второй продольной волны является характерной особенностью флюидонасыщенных пористых сред и связано с относительным движением флюида внутри порового пространства.

Численное моделирование. Для численного решения системы уравнений пороупругости широко применяются методы конечных разностей и конечных элементов. Эффективным инструментом исследования волновых процессов в сложных средах являются конечно-разностные схемы на сдвинутых сетках и метод конечных элементов. Для решения прямых задач сейсмики и акустического каротажа широко применяется метод конечных разностей во временной области (FDTD) с использованием сдвинутых (или разнесённых) сеток, впервые предложенный Virieux [4] для упругих сред. Как показано в работах Роменского и Решетовой [35], этот подход успешно адаптирован для моделирования волновых полей в насыщенных пористых средах на основе термодинамический согласованных моделей.

При использовании явной разностной схемы устойчивость решения определяется условием Куранта-Фридрихса-Леви (CFL) [5]:

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (13)$$

где: c – скорость распространения волны, Δt – шаг по времени, Δx – шаг по пространству. где: c – скорость распространения волны, Δt – шаг по времени, Δx – шаг по пространству. Выполнение данного условия является необходимым требованием для корректного моделирования динамических процессов [4].

Особенность метода на сдвинутых сетках заключается в дискретизации различных компонент волнового поля (скоростей твёрдой и жидкой фаз, компонент тензора напряжений и порового давления) в разных точках элементарной ячейки и на разных временных полушагах. Это позволяет достичь второго порядка аппроксимации по пространству и времени и корректно учитывать граничные условия на контрастных границах раздела сред. Важным преимуществом является возможность использования τ -метода для учёта частотно-независимого затухания (постоянной добротности Q), что критически важно для моделирования реальных геологических сред [40].

Результаты исследования

В результате проведённого обзора установлено, что классическая теория Био, несмотря на её фундаментальное значение, недостаточна для полного описания дисперсии и затухания волн в реальных флюидонасыщенных пористых средах, поскольку не учитывает многомасштабные механизмы волноиндуцированных потоков флюида и ряд существенных нелинейных эффектов.

Современные исследования показали, что наиболее адекватные результаты дают обобщённые модели, включающие мезоскопические и микроскопические механизмы переноса, частичную насыщенность, двойную пористость, вязкоупругость, анизотропию и термодинамический согласованные постановки. Таким образом, выдвинутая исследовательская гипотеза о необходимости расширения классической пороупругой теории для более точного описания волновых процессов в сложных геосредах в целом подтверждена. Полученные результаты также показали, что дальнейшее развитие данного направления связано с созданием многомасштабных нелинейных моделей и эффективных численных алгоритмов для решения прикладных задач геофизики и сейсморазведки.

Дискуссия

Проведённый анализ показал, что современные исследования волновых процессов в деформируемых флюидонасыщенных пористых средах направлены на преодоление ограничений классической теории Био. Полученные результаты подтверждают, что линейные

модели не позволяют в полной мере описывать дисперсию, затухание и нелинейные эффекты, наблюдаемые в реальных геологических средах. Особое значение имеют волноиндуцированные потоки флюида (WIFF), многофазность, анизотропия и нелинейная фильтрация, существенно влияющие на динамические характеристики среды.

Результаты исследования согласуются с современными работами в области пороупругости, где активно развиваются многомасштабные модели, термодинамически согласованные подходы и методы учёта нелинейных эффектов. Современные исследования показывают, что использование расширенных моделей позволяет значительно повысить точность описания волновых процессов в насыщенных пористых средах и улучшить интерпретацию сейсмических и акустических данных.

Практическая значимость полученных результатов связана с задачами геофизики, сейсморазведки, гидрогеологии, нефтегазовой инженерии и мониторинга состояния геологических резервуаров. Учёт сложных механизмов взаимодействия флюида и пористого скелета позволяет более корректно прогнозировать фильтрационные свойства среды, процессы распространения волн и изменение параметров коллекторов.

Перспективы дальнейших исследований связаны с разработкой нелинейных многомасштабных моделей, объединяющих эффекты анизотропии, многофазности, трещиноватости и термодинамических процессов. Особый интерес представляет развитие высокопроизводительных вычислительных методов, GPU-технологий и методов машинного обучения для моделирования сложных волновых процессов в реальных геологических средах.

Заключение

В работе проведён анализ современного состояния исследований волновых процессов в деформируемых флюидонасыщенных пористых средах. Рассмотрены основные этапы развития теории пороупругости – от классической модели Био до современных многомасштабных, нелинейных и термодинамически согласованных моделей. Показано, что учёт волноиндуцированных потоков флюида, нелинейных эффектов, анизотропии и многофазности существенно повышает точность описания процессов распространения волн в сложных геологических средах. Выполненный сравнительный анализ современных математических моделей и численных методов подтвердил перспективность использования конечно-разностных схем на сдвинутых сетках, методов конечных элементов и SHTC-моделей для решения задач геофизики и сейсморазведки. Установлено, что современные подходы позволяют более корректно описывать дисперсию, затухание и динамические характеристики волн в насыщенных пористых средах.

Полученные результаты имеют важное значение для задач нефтегазовой геофизики, гидрогеологии, инженерной геологии и мониторинга геосред. Перспективы дальнейших исследований связаны с развитием нелинейных многомасштабных моделей, учётом трещиноватости и многофазных процессов, а также применением высокопроизводительных вычислительных технологий и методов машинного обучения для моделирования сложных волновых процессов.

Благодарность

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант ИРН AP26196267 «Предсказательное численное моделирование изменчивости механических свойств пороупругих флюидонасыщенных сред в волновых сейсмических полях в результате природных и антропогенных воздействий в целях выработки надёжных схем геофизического мониторинга»).

Список использованных источников

- [1] Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range. // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1956a. Vol. 28, no. 2. p. 168–178. <https://doi.org/10.1121/1.1908239>
- [2] Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1956b. Vol. 28, no. 2. p. 179–191. <https://doi.org/10.1121/1.1908241>
- [3] Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // *Journal of Applied Physics*. 1962. Vol. 33, no. 4. p. 1482–1498. <https://doi.org/10.1063/1.1728759>
- [4] Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method // *Geophysics*. 1986. Vol. 51, no. 4. p. 889–901. <https://doi.org/10.1190/1.1442147>
- [5] Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik // *Mathematische Annalen*. 1928. Bd. 100, H. 1. p. 32–74. <https://doi.org/10.1007/BF01448839>
- [6] Pride, S. R., Berryman, J. G., Harris, J. M. Seismic attenuation due to wave-induced flow. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2004, vol. 109, B01201. DOI: [10.1029/2003JB002639](https://doi.org/10.1029/2003JB002639).
- [7] Fick A. Über Diffusion // *Annalen der Physik*. 1855. Vol. 170, no. 1. p. 59–86.
- [8] Stefan J. Über das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen // *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien*. 1871. Vol. 63. p. 63–124.
- [9] Terzaghi K. *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage*. – Leipzig: Deuticke, 1925.
- [10] Plona T.J. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies // *Applied Physics Letters*. 1980. Vol. 36, no. 4. p. 259–261. <https://doi.org/10.1063/1.91445>
- [11] Truesdell C., Toupin R.A. *The classical field theories* // *Principles of Classical Mechanics and Field Theory* / Ed. by S. Flüge. Berlin : Springer, 1960. p. 226–858. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2
- [12] Bowen R.M. *Theory of mixtures* // *Continuum Physics* / Ed. by A.C. Eringen. – New York: Academic Press, 1976. Vol. 3. p. 1–127. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-240603-8.50008-2>
- [13] Carcione J.M. *Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media*. – 3rd ed. – Amsterdam: Elsevier, 2014. p. 690. <https://doi.org/10.1016/C2010-0-67136-7>
- [14] Pride S.R., Berryman J.G. Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials. I. Governing equations and acoustic attenuation // *Physical Review E*. 2003. Vol. 68, no. 3. Article 036603. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.036603>
- [15] Pride S.R., Berryman J.G. Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials. II. Fluid transport equations // *Physical Review E*. 2003. Vol. 68, no. 3. Article 036604. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.036604>
- [16] Johnson D.L., Koplik J., Dashen R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media // *Journal of Fluid Mechanics*. 1987. Vol. 176. p. 379–402. <https://doi.org/10.1017/S0022112087000727>
- [17] White J.E. Computed seismic speeds and attenuation in rocks with partial gas saturation // *Geophysics*. 1975. Vol. 40, no. 2. p. 224–232. <https://doi.org/10.1190/1.1440520>
- [18] Dvorkin J., Nur A. Dynamic poroelasticity: A unified model with the squirt and the Biot mechanisms // *Geophysics*. 1993. Vol. 58, no. 4. p. 524–533. <https://doi.org/10.1190/1.1443435>
- [19] Coussy O. *Poromechanics*. – Chichester: John Wiley & Sons, 2004. p.312. ISBN 978-0-470-84920-0. <https://doi.org/10.1002/0470092718>
- [20] Pozorski J., Olejnik M. Smoothed Particle Hydrodynamics Modelling of Multiphase Flows: An Overview // *Acta Mechanica*. 2024. Vol. 235. p. 1685–1714. DOI: [10.1007/s00707-023-03763-4](https://doi.org/10.1007/s00707-023-03763-4).
- [21] Michéa D., Komatitsch D. Accelerating a Three-Dimensional Finite-Difference Wave Propagation Code Using GPU Graphics Cards // *Geophysical Journal International*. 2010. Vol. 182, No. 1. p. 389–402. DOI: [10.1111/j.1365-246X.2010.04616.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04616.x).
- [22] Ohminato T., Chouet B. A Free-Surface Boundary Condition for Including 3D Topography in the Finite-Difference Method // *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1997. Vol. 87, no. 2. p. 494–515.
- [23] Alkhimenkov Y. High-Resolution GPU-Based Simulations of Quasi-Static Poroelasticity: Seismic Attenuation and Modulus Dispersion in Three-Dimensional Stochastic Fracture Networks // *Geophysical Journal International*. 2025. Vol. 240, No. 2. p. 1234–1253. DOI: [10.1093/gji/ggae439](https://doi.org/10.1093/gji/ggae439).

- [24] Shi Z., et al. A multiscale model for wave propagation in double-porosity media // *International Journal of Engineering Science*. 2025. Vol. 208. Article 104056. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2025.104056>
- [25] Chen W., Zhang X., Dai T., Peng J., Ni Z. Modeling seismic wave propagation in partially saturated porous media: a comparative study // *Frontiers in Earth Science*. 2025. Vol. 13. Article 1610897. <https://doi.org/10.3389/feart.2025.1610897>
- [26] Mielke A., Roubíček T. A general thermodynamical model for finitely-strained continuum with inelasticity and diffusion, its GENERIC derivation in Eulerian formulation, and some application // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2025. Vol. 76. Article 11 p. 1–28. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-024-02391-9>
- [27] Ligurský T. A thermodynamically consistent fully coupled poroelastoplastic model for swelling clays // *Computers and Geotechnics*. 2025. Vol. 178. Article 106903. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2024.106903>
- [28] Ba J., Fang Z., Fu L.-Y., Xu W., Zhang L. Acoustic wave propagation in a porous medium saturated with a Kelvin–Voigt non-Newtonian fluid // *Geophysical Journal International*. 2023. Vol. 235, no. 3.p. 2056–2077. <https://doi.org/10.1093/gji/ggad355>
- [29] Wang X., Yotov I. A Lagrange multiplier formulation for the fully dynamic Navier-Stokes-Biot system // *IMA Journal of Numerical Analysis*. 2025. Article draf074. DOI: <https://doi.org/10.1093/imanum/draf074>
- [30] Xu W., Wang Q., Li B., Wang M., Yu H., Wu H. Oscillatory instability of quasistatic fluid-driven fracturing in porous materials // *Physical Review Letters*. 2026. Vol. 136, no. 6. Article 064301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.136.064301>
- [31] Ye H., Wang S., Li J., Dong Y., Zhu J. Layout optimization of pore microstructure in fluid-saturated porous media using Galerkin decoupling technology and independent continuous mapping method (GDT-ICM) // *Applied Mathematical Modelling*. 2025. Vol. 138. Article 115753. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.115753>
- [32] Toko A.D., Weijermars R. Beyond Biot – Nonlinear stiffening of the bulk modulus in fluid-saturated porous media. // *Results in Engineering*, Vol. 26, 2025, Article 105019. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.105019>
- [33] Pride S.R., Garambois S. Electro seismic wave theory of Frenkel and more recent developments // *Journal of Engineering Mechanics*. 2005. Vol. 131, no. 9. p. 898–907. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2005\)131:9\(898\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2005)131:9(898))
- [34] Lo W.C. Elastic wave propagation and attenuation through deformable porous media containing two immiscible fluids taking into account gravity effect. *Advances in Water Resources*, 2025, Article 105069. DOI: [10.1016/j.advwaters.2025.105069](https://doi.org/10.1016/j.advwaters.2025.105069)
- [35] Romensky E., Reshetova G., Peshkov I. Hyperbolic two-phase model for viscoelastic porous media // *Journal of Computational Physics*. 2022. Vol. 468. Article 111489. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111489>
- [36] Yang L., et al. Effects of multi-scale wave-induced fluid flow on seismic dispersion, attenuation and frequency-dependent anisotropy in periodic-layered porous-cracked media // *Petroleum Science*. 2025. Vol. 22, no. 2. p. 684–696. <https://doi.org/10.1016/j.petsci.2024.11.008>
- [37] Cheng A.H.-D. Poroelasticity. – Springer, 2016. p.878. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-25202-5>
- [38] Pride S.R. Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media // *Physical Review B*. 1994. Vol. 50, no. 21. p. 15678–15696. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.50.15678>
- [39] Pride S.R., Garambois S. The role of Biot slow waves in electro seismic wave phenomena // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2005. Vol. 118, no. 2. p. 697–711. <https://doi.org/10.1121/1.1932227>
- [40] Shiyapov K.M., Baishemirov Zh., Abdiramanov Zh., Zhanbyrbayev A. Studying the features of simulating fluid movement in porous media// *Herald of the Kazakh-British technical university*. 2023. 20(4) p.63-71. <https://doi.org/10.55452/1998-6688-2023-20-4-63-71>