

МАТЕМАТИКА ЖӘНЕ ФИЗИКАЛЫҚ ПРОЦЕСТЕР МЕН МЕХАНИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELING OF PHYSICAL PROCESSES AND MECHANICAL SYSTEMS

МРНТИ 30.19.15

<https://doi.org/10.51889/2959-5894.2026.94.2.001>

Л.А. Алексеева¹ , Н.Ж. Айнакеева^{1,2*} 

¹Институт механики и машиноведения им. У.А.Джолдасбекова, г.Алматы, Казахстан

²Университет Нархоз, г.Алматы, Казахстан

*e-mail: ainakeyevanursaule@gmail.com

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ НА ДВУХЗВЕННОМ ТЕПЛОВОМ ГРАФЕ И ИХ РЕШЕНИЯ

Аннотация

В работе исследуются стационарные и нестационарные краевые задачи на двухзвенном тепловом графе с локальными и связанными граничными условиями. Рассматривается линейный граф, состоящий из двух последовательно соединённых стержней с различными тепловыми параметрами и одной узловой точкой. На основе метода обобщённых функций и преобразования Фурье по времени разработана унифицированная методика решения краевых задач на двухзвенном тепловом графе на графах. Построены разрешающие системы уравнений для задач Дирихле и Неймана–Дирихле, получены аналитические интегральные представления решений. Проведены численные эксперименты по исследованию распределения температуры и влияния частоты колебаний на тепловое состояние графа. Полученные результаты могут применяться при моделировании тепловых процессов в многозвенных стержневых конструкциях, используемых в строительстве, машиностроении и тепловых сетях.

Ключевые слова: температура, тепловой граф, краевые задачи, метод обобщённых функций, граничные условия, преобразование Фурье.

Л.А. Алексеева¹, Н.Ж. Айнакеева^{1,2}

¹У.А. Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты, Алматы қ., Қазақстан

²Нархоз университеті, Алматы қ., Қазақстан

ЕКІ БУЫНДЫ ЖЫЛУЛЫҚ ГРАФТАҒЫ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ШЕШІМДЕРІ

Аңдатпа

Зерттеу жұмысында локалды және байланысқан шекаралық шарттары бар екі буынды жылулық графтағы стационарлық және нестационарлық емес шеттік есептер зерттеледі. Өртүрлі жылу параметрлері бар және бір түйіндік нүктемен байланысқан екі тізбекті өзекшеден тұратын сызықтық граф қарастырылады. Жалпыланған функциялар әдісі мен уақыт бойынша Фурье түрлендіруі негізінде екі буынды жылулық графтағы шеттік есептерді шешудің бірегей әдістемесі жасалды. Дирихле және Нейман–Дирихле есептері үшін шешуші теңдеулер жүйесі құрылып, шешімдердің аналитикалық интегралдық өрнектері алынды. Температураның таралуы мен тербеліс жиілігінің графтың жылулық күйіне әсерін зерттеу бойынша сандық эксперименттер жүргізілді. Алынған нәтижелер құрылыс,

машина жасау және жылу желілерінде қолданылатын көп буынды өзекшенің конструкциялардағы жылу процестерін модельдеуде пайдаланылуы мүмкін.

Түйін сөздер: температура, жылулық граф, шеттік есептер, жалпыланған функциялар әдісі, шекаралық шарттар, Фурье түрлендіруі.

L.A. Alexeyeva¹, N.Zh. Ainakeyeva^{1,2}

¹Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan

²Narxoz University, Almaty, Kazakhstan

BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON A TWO-LINK THERMAL GRAPH AND THEIR SOLUTIONS

Abstract

The paper investigates stationary and nonstationary boundary value problems on a two-link thermal graph with local and coupled boundary conditions. A linear graph consisting of two sequentially connected rods with different thermal parameters and a single junction point is considered. Based on the generalized functions method and the Fourier transform with respect to time, a unified technique for solving boundary value problems on a two-link thermal graph is developed. Resolving systems of equations for the Dirichlet and Neumann–Dirichlet problems are constructed, and analytical integral representations of the solutions are obtained. Numerical experiments were carried out to study temperature distribution and the influence of oscillation frequency on the thermal state of the graph. The obtained results can be applied to modeling thermal processes in multilink rod structures used in construction, mechanical engineering, and thermal networks.

Keywords: temperature, thermal graph, boundary value problems, generalized functions method, boundary conditions, Fourier transform.

Введение

Основные положения

В работе исследуются стационарные и нестационарные краевые задачи на двухзвенном тепловом графе с локальными и связанными граничными условиями. Разработана унифицированная методика решения задач на основе метода обобщённых функций и преобразования Фурье по времени. Построены разрешающие системы уравнений для задач Дирихле и Неймана-Дирихле и получены аналитические интегральные представления решений. Проведены численные эксперименты, позволяющие исследовать влияние частоты колебаний и тепловых параметров на распределение температуры в элементах графа. Полученные результаты могут применяться при моделировании тепловых процессов в многозвенных инженерных конструкциях и тепловых сетях.

С развитием машиностроения стали активно применяться сложные многозвенные стержневые конструкции, работающие в различных термических условиях. Они широко используются в строительной механике, машиностроении, робототехнике и многих других областях. Актуальной научно-технической задачей является исследование теплового состояния сетевых систем различного назначения при динамических и термических воздействиях с учётом их термоупругих свойств при динамических и термических воздействиях, в том числе видов воздействия. Это необходимо для анализа прочности и надёжности конструкций таких объектов, определения безопасных режимов эксплуатации и предотвращения катастроф. Математическое моделирование термодинамики стержневых конструкций и создание на его основе информационных технологий является одним из наиболее эффективных и недорогих методов исследования и проектирования таких систем.

Развитие аналитических и численных методов, направленных на математическое моделирование сетевых структур, основывается на решении и анализе прямых и обратных задач для систем уравнений с различными параметрами на графах. Основные исследования в этом направлении связаны с анализом спектральной полноты и свойства базисности собственных функций краевых задач, а также определением условий существования и единственности решений прямых и обратных задач.

История теории обыкновенных дифференциальных уравнений на сетевых структурах сравнительно недолгая. Большинство работ посвящено прямым задачам спектральной теории для дифференциальных операторов на компактных графах. Наиболее известны результаты Г. Люмера, Ю. Белова, С. Никаиза, О. Пенкина, Г. Борга, Б. Левитана и др. [1-6]. Другой класс теории обратных краевых задач для операторов Штурма–Лиувилля – это краевые задачи с условиями разрыва коэффициентов уравнений внутри интервала исследовались В. Проворотовым и другими [7-8]. Современное состояние теории обратных краевых задач на графах рассмотрено в работах В. Юрко [9-10].

Изучение волнового уравнения на графах является относительно новым направлением. Одной из первых работ в этом направлении была монография Ф. Али-Мехмети «Нелинейные волны в сетях» [11]. В этой работе было получено решение волнового уравнения в форме типа Д’Аламбера для графа с крестообразной структурой, состоящей из четырёх одинаковых рёбер. К. Каттанео и Л. Фонтана применили формулу Д’Аламбера и нашли решение задачи Коши для волнового уравнения на конечных взвешенных сетях [12]. В статьях [13-16] рассмотрены различные краевые задачи для волнового уравнения Даламбера на графах.

Процесс распространения тепла в системе стержней на графе типа «дерево» в виде пучка линейных дифференциальных операторов рассматривался Ю. Мартыновым [17]. Точных решений для таких графов пока не построено.

Как видим, в настоящее время теория краевых задач на графах различной структуры начинает интенсивно развиваться.

В данной работе рассматриваются и исследуются нестационарные и стационарные краевые задачи теплопроводности на двухзвенном тепловом графе, которые можно использовать для определения термонапряженного состояния различных стержневых конструкций, типичных в инженерной практике. На основе теории обобщённых функций разработан унифицированный метод решения различных краевых задач теплопроводности на стержнях как конечной длины, так и на звёздных графах.

Ранее авторами рассматривались решения краевых задач теплопроводности и термоупругости на звездном графе с одной узловой точкой [18-19]. Здесь рассматриваются краевые задачи теплопроводности на линейном графе, состоящем из двух последовательно соединённых звеньев с различными тепловыми параметрами с одной узловой точкой.

Заметим, что вопросы корректности краевых задач уравнений теплопроводности с разрывными коэффициентами рассматривали ранее Самарский А.А. [20], Камынин Л.И. [21-22]. В работе [23] рассматривалась краевая задача уравнений теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности и условием непрерывности тепловых потоков в одной точке разрыва, для решения которой использовался метод разделения переменных. Однако решение не было построено.

Здесь на основе Метода Обобщённых Функций [24] и преобразования Фурье по времени разработана унифицированная методика решения краевых задач теплопроводности, типичных для технических приложений. Построены обобщённые решения нестационарных и стационарных краевых задач при различных граничных условиях на концах графа, как локальных, заданных на каждом конце графа, так и связанных с температурой и тепловыми потоками на обоих концах. В аналитическом виде получены регулярные интегральные представления решений краевых задач.

Представлены результаты численных экспериментов задач стационарных колебаний на двухзвенных тепловых графах при разных краевых условиях. Исследовано влияние частоты колебаний и тепловых параметров графа на его температуру в любом элементе графа.

Полученные решения позволяют моделировать источники тепла различного типа, в том числе с использованием сингулярных обобщённых функций и исследовать их воздействие на тепловое состояние всего графа.

Разработанный метод исследования теплового состояния многозвенных стержневых конструкций можно использовать при проектировании опор зданий, мостов, тепловых магистралей и должен найти широкое применение в будущем.

Методы исследования

Исследование основано на методах математической физики, теории краевых задач на графах. Для решения задач на двухзвенном тепловом графе использованы метод обобщённых функций и преобразование Фурье по времени. На основе уравнений связи температур и тепловых потоков построены разрешающие системы линейных алгебраических уравнений для различных типов граничных условий. Аналитические решения получены в виде интегральных представлений, после чего проведены численные эксперименты для исследования распределения температуры и влияния частоты колебаний на тепловое состояние графа.

Понятие графа было впервые введено Леонардом Эйлером в 1736 году. В своей работе [25] он впервые применил теоретико-графовый подход для решения известной задачи о кёнигсбергских мостах. В начале XX века венгерский математик Денеш Кёниг первым предложил использовать термин «граф» по отношению к диаграммам, содержащим дискретное множество точек, соединённых прямыми линиями, и начал изучать их общие свойства. В 1936 году им была опубликована первая книга по теории графов, где был представлен обзор всех работ, начиная с 1736 года. Граф – это геометрическая структура, состоящая из *рёбер* (отрезков прямых), соединённых между собой в узловых точках, которые называют *вершинами*. Он имеет N -ребер, а число вершин определяется структурой графа. Два ребра графа называются *смежными*, если у них есть общая вершина.

Граф называется неориентированным, если ориентация его рёбер в пространстве не имеет значения при расчёте задач на этом графе. Если ориентация рёбер в пространстве является существенной для решения задач на графе и должна быть задана, то такой граф называется пространственно-ориентированным.

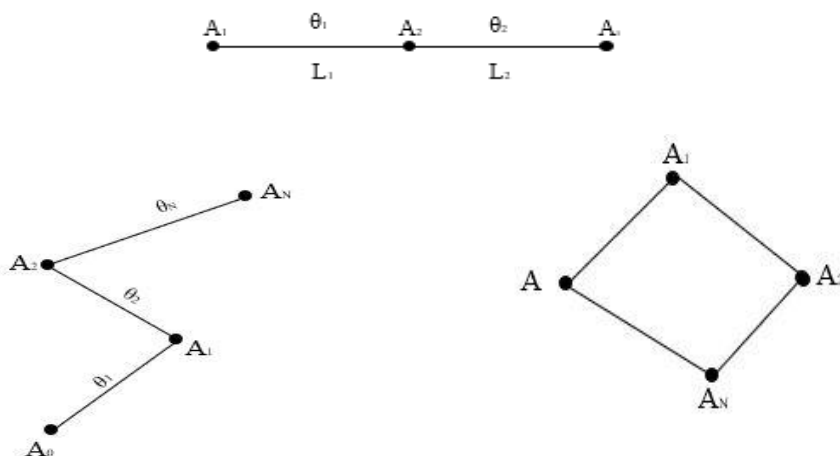


Рисунок 1. Линейные графы

Исследования по решению краевых задач математической физики на графах и свойств их решений начали развиваться сравнительно недавно, а точных решений, которые дают состояние графа в любой точке каждого из его элементов очень мало. Здесь такое решение строится для решения задач теплопроводности на двухзвенном графе с приведением расчётов для двух краевых задач. Разработанная методика позволяет использовать эти формулы для решения аналогичных задач на линейных незамкнутых тепловых графах с произвольным числом рёбер.

1. *Постановка краевых задач для уравнений теплопроводности на линейном графе.* Здесь рассматривается неориентированный линейный тепловой граф из двух рёбер: (A_1, A_2) , (A_2, A_3) – отрезков длины L_j ($j=1,2$) с одной узловой точкой A_2 . На каждом отрезке $\Lambda_j = [0, L_j]$ вводится своя система координат (x_j, t) с началом в A_j : $x_j = 0$, и функции состояния температуры $\theta_j(x_j, t)$, которые удовлетворяют уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial t} - \kappa_j \frac{\partial^2 \theta_j}{\partial x_j^2} = F_j(x_j, t), \quad (1)$$

где κ_j - коэффициент температуропроводности на j -ом ребре, $F_j(x_j, t)$ – источник тепла на j -ом ребре.

Начальные условия (условия Коши): при $t=0$ известна температура графа:

$$\theta_j(x_j, 0) = \theta_0^j(x_j), \quad 0 \leq x_j \leq L_j, \quad t = 0, \quad (2)$$

$$\theta_0^j(0) = \theta_j(0, 0), \quad \forall j.$$

Краевые условия. На концах графа A_1, A_3 заданы условия вида:

$$\alpha_{11}\theta_1^1(t) + \beta_{11}q_1^1(t) + \alpha_{12}\theta_2^2(t) + \beta_{12}q_2^2(t) = T_1(t), \quad t \geq 0; \quad (3)$$

$$\alpha_{21}\theta_1^1(t) + \beta_{21}q_1^1(t) + \alpha_{22}\theta_2^2(t) + \beta_{22}q_2^2(t) = T_2(t), \quad t \geq 0.$$

Здесь и далее введены следующие обозначения температуры и ее производной на

концах графа: $\theta_1^j(t) = \theta_j(0, t)$, $q_1^j(t) = \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \Big|_{x_j=0}$; $\theta_2^j(t) = \theta_j(L_j, t)$, $q_2^j(t) = \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \Big|_{x_j=L_j}$.

В общем узле графа A_2 заданы следующие контактные условия:

(условия трансмиссии)

$$\theta_2^1(t) - \theta_1^2(t) = 0 \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\kappa_1 q_2^1(t) - \kappa_2 q_1^2(t) = G(t). \quad (5)$$

Здесь $G(t)$, $T(t)$ – известные функции из класса $C[0; \infty)$, α_{ij}, β_{ij} – заданные константы.

Первое условие (4) – это условие непрерывности температуры. Второе (5) задаёт тепловые потоки в узле графа, $G(t)$ заданная функция из класса обобщённых функций медленного роста. Выбор коэффициентов в краевых условиях (3) позволяет решать широкий класс краевых задач на графе, в том числе классические.

Например, при $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{22} = 1$ (остальные α_{ij}, β_{ij} нулевые) это задача Дирихле на тепловом графе.

При $\beta_{11} = 1$, $\beta_{22} = 1$ (остальные α_{ij}, β_{ij} нулевые) это задача Неймана для двухзвенного графа.

Здесь рассмотрим общий случай при произвольных α_{ij}, β_{ij} , которые позволяют на одних концах задавать требуемую температуру, а на других тепловые потоки и даже связывать температуры и тепловые потоки на концах графа. Последнее очень полезно для инженерных приложений при расчёте теплопередачи в тепловых сетях.

Требуется найти решение краевой задачи (1) - (5) на этом тепловом двухзвенном графе.

2. Уравнения связи краевых функций на ребрах теплового графа. Рассмотрим температуру $\theta_j(x_j, t)$ на ребре графа $[0, L_j]$, которая является решением уравнения теплопроводности (1).

Решение краевых задач теплопроводности на сегменте ранее получено в пространстве преобразований Фурье по времени [1]. Используем его для решения тепловой задачи на графе.

Трансформанта Фурье по времени температуры j -го ребра графа определяется формулой:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_j(x_j, \omega) = & \bar{F}^j(x_j, \omega) * \bar{U}^j(x_j, \omega) + \theta_0^j(x_j) H(L_j - x_j) H(x_j) * \bar{U}^j(x_j, \omega) + \\ & + \kappa_j \bar{q}_2(\omega) H(x_j) \bar{U}^j(L_j - x_j, \omega) - \kappa_j \bar{q}_1(\omega) H(L_j - x_j) \bar{U}^j(x_j, \omega) + \\ & + \kappa_j \bar{\theta}_2(\omega) H(x_j) \bar{U}^j_{,x}(L_j - x_j, \omega) - \kappa_j \bar{\theta}_1(\omega) H(L_j - x_j) \bar{U}^j_{,x}(x_j, \omega). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь черта над функцией означает преобразование Фурье по времени этой функции,

$\bar{U}^j_{,x} = \frac{\partial \bar{U}^j}{\partial x}$, $H(\dots)$ - функция Хевисайда, $H(L_j - x_j) H(x_j)$ - характеристическая функция интервала $(0, L_j)$, $\bar{U}^j(x_j, \omega)$ - трансформанта Фурье по времени функции Грина уравнения теплопроводности:

$$U^j(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4k_j t}}}{2\sqrt{\pi k_j t}} H(t), \quad k_j = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\omega}{\kappa_j}}$$

На j -ом ребре графа она равна:

$$\bar{U}^j(x_j, \omega) = -\frac{\sin(k_j |x_j|)}{2k_j}, \quad k_j = \sqrt{i\omega\kappa_j^{-1}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa_j}}. \quad (7)$$

Предельный переход в формулах (6) к концам интервала дает уравнения связи температуры и тепловых потоков на концах ребер, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{cc} 0,5 & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\theta}_1^j(\omega) \\ \kappa_j \partial_x \bar{U}^j(L_j, \omega) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \bar{U}^j(L_j, \omega) \\ \bar{q}_1^j(\omega) \end{array} \right\} + \\ & + \left\{ \begin{array}{cc} \kappa_j \partial_x \bar{U}^j(L_j, \omega) & -\bar{U}^j(L_j, \omega) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\theta}_2^j(\omega) \\ \bar{q}_2^j(\omega) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{Q}^j(0, \omega) \\ \bar{Q}^j(L, \omega) \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где правые части определены начальными условиями и действующими тепловыми источниками на j -ом ребре:

$$\bar{Q}^j(x_j, \omega) = \bar{F}^j(x_j, \omega) *_{x_j} \bar{U}^j(x_j, \omega) - \kappa_j^{-1} \theta_0^j(x_j) H(L_j - x_j) H(x_j) *_{x_j} \bar{U}^j(x_j, \omega). \quad (9)$$

Здесь слагаемые – функциональные свёртки по указанной переменной x_j .

Система из двух уравнений (8) является определяющей связи 4 краевых функций и определяет температуру на отрезке, если все четыре краевых значения температуры и ее производной известны. Используем ее для построения разрешающей системы уравнений на графе.

3. Разрешающая система уравнений на двухзвенном тепловом графе. Для построения разрешающей системы уравнений представим (8) в следующем матричном виде:

$$\mathbf{A}^j(\omega) \times \mathbf{B}^j(\omega) = \mathbf{C}^j(\omega), \quad (10)$$

$$\mathbf{A}^j(\omega) = \begin{Bmatrix} 0,5 & 0 & \kappa_j \bar{U}^j_{,x}(L_j, \omega) & -\bar{U}^j(L_j, \omega) \\ \kappa_j \bar{U}^j_{,x}(L_j, \omega) & \bar{U}^j(L_j, \omega) & 0,5 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^j(\omega) = \begin{pmatrix} \bar{\theta}_1^j(\omega) \\ \bar{q}_1^j(\omega) \\ \bar{\theta}_2^j(\omega) \\ \bar{q}_2^j(\omega) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}1^j(\omega) = \begin{pmatrix} \bar{Q}^j(0, \omega) \\ \bar{Q}^j(L_j, \omega) \end{pmatrix}, \quad j=1,2. \quad (11)$$

Перейдём к построению разрешающей системы уравнений для определения неизвестных граничных функций на звёздном графе.

На каждом ребре L_j графа имеем систему двух линейных алгебраических уравнений (10) для определения четырёх краевых функций $\mathbf{B}^j(\omega)$ каждого элемента графа:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\cos(k_j L_j)}{k_j} & \frac{\sin(k_j L_j)}{k_j} \\ -\frac{\cos(k_j L_j)}{k_j} & -\frac{\sin(k_j L_j)}{k_j} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\theta}_1^j(\omega) \\ \bar{q}_1^j(\omega) \\ \bar{\theta}_2^j(\omega) \\ \bar{q}_2^j(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_1^j(\omega) \\ \bar{F}_2^j(\omega) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $k_j(\omega) = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa_j}}$, j – номер соответствующего ребра графа, а

$$\bar{F}_1^j(\omega) = 2\bar{Q}^j(0, \omega), \quad \bar{F}_2^j(\omega) = 2\bar{Q}^j(L_j, \omega). \quad (13)$$

Далее, с учётом краевых условий на конце графа (3), добавляются 2 уравнения для определения и условия трансмиссии (4), (5) в узле графа дают ещё 2 уравнения для определения 8 граничных функций на рёбрах графа:

$$\mathbf{B}(\omega) = (\bar{\theta}_1^1 \quad \bar{q}_1^1 \quad \bar{\theta}_2^1 \quad \bar{q}_2^1 \quad \bar{\theta}_1^2 \quad \bar{q}_1^2 \quad \bar{\theta}_2^2 \quad \bar{q}_2^2).$$

Итак, имеем полную систему из 8 линейных уравнений для определения этих функций. Запишем эту систему в матричном виде.

Т е о р е м а 1. Разрешающая система уравнений краевой задачи Дирихле (1) – (5) на двухзвенном тепловом графе имеет следующий вид:

$$\mathbf{A}(\omega) \times \mathbf{B}(\omega) = \mathbf{F}(\omega). \quad (14)$$

где

$$\mathbf{F}(\omega) = \{\bar{F}_1^1, \bar{F}_2^1; \bar{F}_1^2, \bar{F}_2^2; \bar{T}^1, \bar{T}^2; 0, \bar{G}(\omega)\},$$

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos(k_1 L_1) & \frac{\sin(k_1 L_1)}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(k_1 L_1) & \frac{-\sin(k_1 L_1)}{k_1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\cos(k_2 L_2) & \frac{\sin(k_2 L_2)}{k_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(k_2 L_2) & -\frac{\sin(k_2 L_2)}{k_2} & 1 & 0 \\ \alpha_{11} & \beta_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{22} & \beta_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_1 & 0 & -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ее решение равно

$$B(\omega) = A^{-1} \times F(\omega).$$

Здесь в первых 4 строках вдоль диагонали стоят матрицы A_1, A_2 связи (10) для каждого ребра этого графа. Остальные элементы нулевые. В следующих двух строках матрицы A записаны краевые условия (3). В следующих двух строках стоят условия трансмиссии в узле графа A_1 (4), (5).

После определения неизвестных краевых и узловых функций $B(\omega)$, по формулам (6) определяем температуру на каждом ребре графа. Используя обратное преобразование Фурье по времени, находим температуру графа в исходном пространстве- времени:

$$\theta_j(x_j, t) = \frac{H(L_j - x_j)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\theta}_j(x_j, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Заметим, что преобразование Фурье по времени этих краевых задач, описывает процесс стационарных колебаний при периодических внешних воздействиях заданной частоты ω .

Составлена программа решения поставленных краевых задач в системе MatCad-15 для двухзвенного теплового графа и проведены разнообразные численные эксперименты по расчёту теплового состояния графа при периодических колебаниях температуры и тепловых потоков на его концах. Здесь приведём результаты численных экспериментов для двух постановок краевых задач теплопроводности.

Результаты исследования

4. *Задача Дирихле на двухзвенном тепловом графе.* В качестве примера рассмотрим двухзвенный тепловой граф, который состоит из двух стержней с разным коэффициентом теплопроводности. Здесь рассмотрим стационарные колебания с заданной частотой в отсутствии внешних тепловых источников:

$$G(x, t) = 0, \quad F_j(x_j, t) = 0, \quad j = 1, 2.$$

В случае задачи Дирихле известна температура на концах графа (локальные краевые условия):

$$\theta_1^1(t) = A_1 e^{-i\omega t}, \quad \theta_2^2(t) = A_2 e^{-i\omega t}. \quad (15)$$

Условия трансмиссии:

$$\theta_2^1(t) = \theta_1^2(t), \quad \kappa_1 q_2^1(L_2, t) = \kappa_2 q_2^2(t) \quad (16)$$

Разрешающая система уравнений:

$$\mathbf{A}(\omega) \times \mathbf{B}(\omega) = \mathbf{F}^T(\omega), \quad (17)$$

где матрица системы имеет вид:

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos(k_1 L_1) & \frac{\sin(k_1 L_1)}{k_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(k_1 L_1) & \frac{-\sin(k_1 L_1)}{k_1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\cos(k_2 L_2) & \frac{\sin(k_2 L_2)}{k_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(k_2 L_2) & -\frac{\sin(k_2 L_2)}{k_2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_1 & 0 & -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{F}(\omega) = (0, 0, 0, 0, A_1, A_2, 0, 0)$, $\mathbf{F}^T$ - транспонированный $\mathbf{F}$.

Решение системы (17) имеет вид:

$$\mathbf{B}(\omega) = \mathbf{A}^{-1}(\omega) \times \mathbf{F}^T(\omega). \quad (16)$$

Таким образом, найдены все граничные функции для двух отрезков данного графа. Аналитическое решение имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_j(x_j, \omega) = & \kappa_j \left\{ q_2(\omega) H(x_j) U_2^j(L_j - x_j, \omega) - q_1(\omega) H(L_j - x_j) U_2^j(x_j, \omega) + \right. \\ & \left. + \theta_2(\omega) H(x_j) U_{2,x}^j(L_j - x_j, \omega) - \theta_1(\omega) H(L_j - x_j) U_{2,x}^j(x_j, \omega) \right\}. \\ U_2^j(x_j, \omega) = & -\frac{\sin(k_j |x_j|)}{2k_j \kappa_j}, \quad k_j = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa_j}}, \quad j=1, 2. \end{aligned} \quad (17)$$

На рис. 2 представлен график амплитуд колебаний температуры ребер при разной частоте колебаний температуры на конце первого ребра с амплитудой $A_1=1$. Температура на втором конце ребра постоянна: $A_2=0$. Безразмерные параметры на ребрах 1 и 2: $L_2=2L_1$, $\kappa_2 = 1.2\kappa_1$.

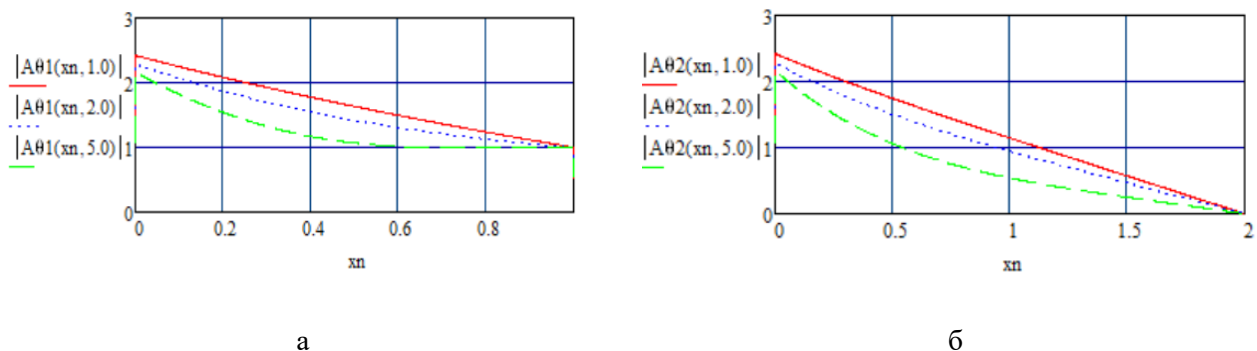


Рисунок 2. Амплитуда колебаний температуры при разной частоте колебаний температуры на конце первого стержня: ребро 1, $xn=L_1-x$, (а); ребро 2, $xn=x$, (б)

При низких частотах колебаний происходит почти линейное изменение амплитуды колебаний температуры, максимум которой наблюдается в узловой точке. С увеличением частоты колебаний линейность нарушается, а амплитуда колебаний в узловой точке падает.

На рис. 3 представлены графики колебаний температуры рёбер в фиксированных точках при $\omega=1$ рад/с, а именно, на их концах и серединах: $x_1 = 0.0, 0.5L_1, L_1$ (а) ; $x_2 = 0.0, 0.5L_2, L_2$ (б). Здесь $A_1 = 0.5, A_2 = 0, T_1(0, t_n, 1) = \theta_1(L_1, t) = \bar{\theta}_1(L_1, 1)e^{-i\omega t}$.

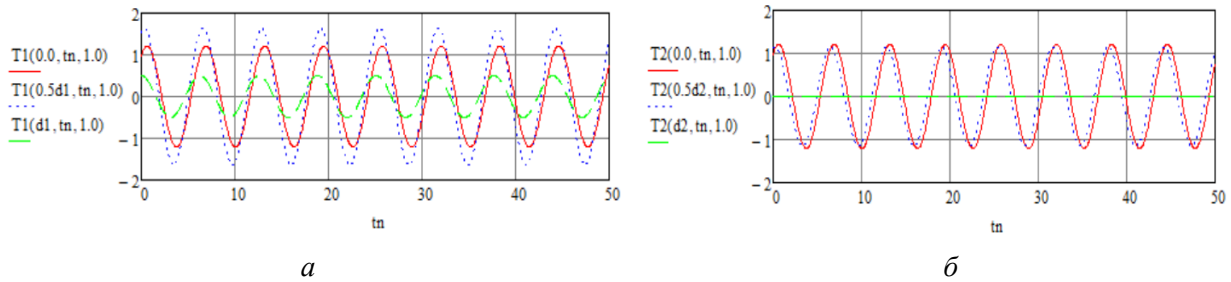


Рисунок 3. Колебания температуры в фиксированных точках стержня 1 (а) и стержня 2 (б): $\omega = 1$

Этот алгоритм позволяет решать задачи периодических колебаний температуры и тепловых потоков на концах графа. Для этого достаточно разложить функции $T_1(t), T_2(t)$ в граничных условиях (3) в ряды Фурье по времени, и построить по этому алгоритму решение для каждой гармоники. Сумма этих решений даст решение периодической задачи с любым периодом колебаний.

4. Задача Неймана - Дирихле на двухзвенном тепловом графе. В случае задачи Неймана-Дирихле известен тепловой поток на одном конце графа (на левом звене в его начале), а на конце другого звена задана температура:

$$\kappa_1 q_1^1(t) = Q_1 e^{-i\omega t}, \quad \theta_2^2(t) = T_2 e^{-i\omega t}. \quad (18)$$

Условия трансмиссии имеют тот же вид (16), а правая часть

$$\mathbf{F}(\omega) = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ Q_1 \ T_2 \ 0 \ 0\}. \quad (19)$$

Матрица разрешающей системы уравнений (14) имеет следующий вид:

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-\cos(k_1 L_1)}{\kappa_1} & \frac{\sin(k_1 L_1)}{\kappa_1 k_1(\omega)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\cos(k_1 L_1)}{\kappa_1} & \frac{-\sin(k_1 L_1)}{\kappa_1 k_1(\omega)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-\cos(k_2 L_2)}{\kappa_2} & \frac{\sin(k_2 L_2)}{\kappa_2 k_2(\omega)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\cos(k_2 L_2)}{\kappa_2} & \frac{-\sin(k_2 L_2)}{\kappa_2 k_2(\omega)} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_1 & 0 & -\kappa_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Как видим, здесь изменилась только пятая строка матрицы, которая задает краевое условие на первом звене графа. Соответственно решение системы:

$$\mathbf{B}(\omega) = \mathbf{A}^{-1}(\omega) \times \mathbf{F}^T(\omega) = \\ = \left\{ \theta_1^1 \quad q_1^1 \quad \theta_2^1 \quad q_2^1 \quad \theta_1^2 \quad q_1^2 \quad \theta_2^2 \quad q_2^2 \right\}.$$

Таким образом, найдены все граничные функции для двух отрезков данного графа. Аналитическое решение имеет вид (17).

Здесь приведены расчеты задачи Неймана-Дирихле при заданных амплитудах теплового потока на конце первого ребра $Q_1=1$, при постоянной температуре на конце второго ребра графа $T_2=0$. На рис. 4 представлены графики температуры первого (а) и второго (б) ребра графа в момент времени $t = \pi/4$ при разных частотах: $w=0.001, 0.1, 1, 5$.

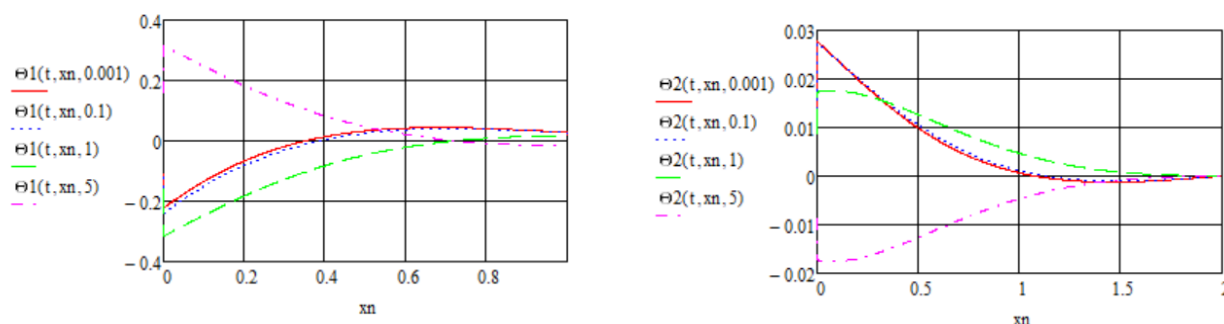


Рисунок 4 (а, б). Температура стержней при $t = \pi/4$, $w=0.001, 0.1, 1, 5$.

Максимальные изменения температуры происходят в первом звене графа, а во втором звене графа температура меняется незначительна и близка к температуре его конца. Заметим, что в силу линейности задачи, пропорциональное изменение заданной амплитуды теплового потока в сторону увеличения или уменьшения амплитуды колебаний приведет к такому же пропорциональному поведению температуры и тепловых потоков в обоих стержнях.

Разработанные программы в MatCad-15 позволяют определять температуру и тепловые потоки в любых точках звеньев графа, в любой момент времени и при разных частотах с высокой степенью точности.

Дискуссия

Полученные аналитические решения показали эффективность метода обобщённых функций при исследовании краевых задач на двухзвенных тепловых графах. Численные эксперименты подтвердили, что изменение частоты температурных колебаний существенно влияет на распределение температуры и тепловое состояние элементов графа. Установлено, что при низких частотах распределение температуры близко к линейному, тогда как с увеличением частоты наблюдается уменьшение амплитуды колебаний в узловой точке графа.

Разработанный подход позволяет учитывать различные типы граничных условий и тепловых параметров, что расширяет возможности его применения при моделировании тепловых процессов в инженерных конструкциях и тепловых сетях.

Заключение

Разработанные программы позволяют варьировать геометрические и тепловые характеристики графа, рассчитывать его температуру в любой момент времени в любой точке графа при различных краевых условиях на его концах.

Эта методика решения различных краевых задач, типичных для практических приложений, может быть распространена на линейные графы с произвольным числом рёбер. Действительно, каждое новое ребро добавляет 2 уравнения связи для 4-х краевых функций этого ребра и 2 условия трансмиссии в узловой точке этого ребра. Т.е. расширенная система уравнений (17) с добавлением, например, третьего ребра, будет иметь разрешающую систему из 12 уравнений для определения 12 неизвестных функций. А её решение будет иметь тот же вид (6). Построенные аналитические решения краевых задач теплопроводности на двухзвенном тепловом графе при различных условиях на его концах можно использовать, в частности, при расчёте прочностных свойств опор зданий, мостов с учётом перепада температур, что существенно влияет на расчёт напряжённо-деформированного состояния таких конструкций.

Полученные регулярные интегральные представления решений можно использовать для исследования термодинамики различных сетеподобных конструкции с учётом теплового нагрева (охлаждения).

Благодарность

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан Грант № AP23488145, 2024-2026 гг.

Список использованных источников

- [1] Lumer G. *Connecting of local operators and evolution equations on networks* // *Lecture Notes in Mathematics*. – Berlin: Springer, 1980. – Vol. 787. – P. 219–234.
- [2] Belov Yu.Ya. *Spectral problems for differential operators on graphs* // *Differential Equations*. – 1990. – Vol. 26. – No. 8. – P. 1231–1238.
- [3] Nicaise S. *Spectre des réseaux topologiques finis* // *Bulletin des Sciences Mathématiques*. – 1987. – Vol. 111. – P. 401–413.
- [4] Penkin O.M. *Boundary value problems on graphs and their applications* // *Mathematical Notes*. – 1995. – Vol. 58. – No. 4. – P. 987–995.
- [5] Borg G. *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen eigenwertaufgabe* // *Acta Mathematica*. – 1946. – Vol. 78. – P. 1–96.
- [6] Levitan B.M. *Inverse Sturm–Liouville Problems*. – Moscow: Nauka, 1984.
- [7] Zhabko A. P., Nurtazina K. B., Provotorov V.V. *Uniqueness solution to the inverse spectral problem with distributed parameters on the graph-star*, *Vestnik of Saint Petersburg University, Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2020, Vol.16. – No. 2. – P.129–143. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.205>.
- [8] Provotorov V. V. *Eigen functions of the Sturm-Lowville problem on a star graph*, *Sb.Mathematics*. – 199 (2008), 1523–1545. <https://doi.org/10.1070/SM2008v199n10ABEH003971>
- [9] Yurko V. A. *On the reconstruction of Sturm-Liouville operators on graphs*, *Mathematical Notes*, – 2006. – Vol. 79. – No. 4. – P. 619–630. <https://doi.org/10.1007/s11006-006-0064-0>
- [10] Yurko V. A. *An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with singular potentials on star-type graphs*, *Analysis on Graphs and Its Applications: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 77 (2008), 397–408.
- [11] Ali Mehmeti F. *Nonlinear Waves in Networks*. – Berlin: Akademie Verlag, 1994.
- [12] Cattaneo C., Fontana L. *D'Alembert formula on finite weighted networks* // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 2007. – Vol. 329. – P. 1284–1298.
- [13] Nicaise S. *Wave propagation on graphs* // *Applied Mathematics Letters*. – 1999. – Vol. 12. – No. 5. – P. 13–18.
- [14] Lagnese J., Leugering G., Schmidt E.J.P.G. *Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures*. – Boston: Birkhäuser, 1994.
- [15] Mugnolo D. *Semigroup Methods for Evolution Equations on Networks*. – Cham: Springer, 2014.
- [16] Kostrykin V., Schrader R. *Kirchhoff's rule for quantum wires* // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. – 1999. – Vol. 32. – P. 595–630.

- [17] Martynova U. V. About one problem of heat propagation in a system of rods on a graph of the “Tree” type, *Results of Science and Technology. Modern Mathematics and its Applications, Thematic Reviews*, – 2021. – Vol. 198. – P. 89–95. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-198-89-95>.
- [18] Alexeyeva L.A., Prikazchikov D.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. Solution of boundary value problems for a thermal star graph by generalized functions method// *Bulletin of the Karaganda University. Physics Series*. – 2025. – Vol. 2. – No. 118. – P. 4-5. <https://doi.org/10.31489/2025m2/4-15>
- [19] Ainakeyeva N.Zh., Alexeyeva L.A., Prikazchikov D.A. Dirichlet and Neumann problems for the heat equation on linear multilink thermal graphs and their solutions // *Kazakh Mathematical Journal*. – 2025. – Vol. 1. – No. 25. – P. 28-42. <https://doi.org/10.70474/3rsyzh34>
- [20] Samarskii A.A. *Theory of Difference Schemes*. – Moscow: Nauka, 1989.
- [21] Kamynin L.I. On boundary value problems of heat conduction with discontinuous coefficients // *Differential Equations*. – 1964. – Vol. 1. – No. 5. – P. 673–684.
- [22] Kamynin L.I. On the method of potentials for a parabolic equation with discontinuous coefficients. *DAN SSSR*. – 1962. – Vol. 145 – No. 6. – P. 1213–1216.
- [23] Koilyshov, U.K., Sadybekov, M.A., & Beisenbayeva, K.A. (2025). Solution of nonlocal boundary value problems for the heat equation with discontinuous coefficients, in the case of two discontinuity points. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 1(117), 81–91. <https://doi.org/10.31489/2025m1/81-91>
- [24] Vladimirov V.S. *Generalized functions in mathematical physics*, Moscow: Nauka. – 1978.– 512 p.
- [25] Euler L. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* // *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. – 1736. – Vol. 8. – P. 128–140.