МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКАНЫ ОҚЫТУ ӘДІСТЕМЕСІ
МАТЕМАТИКА. МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

МРНТИ 27.27.15
УДК 517. 53

А.Қ. Абиров [1], Н.Қ. Шаждекеева [1], Т.Н. Ахмурзина [1]

[1]Х. Досмұхамедов атындағы Атырау мемлекеттік университеті, Атырау қ., Қазақстан

ГИПЕРКОМПЛЕКС ЖҮЙЕДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ

Аңдатпа

Мақалада гиперкомплекс жүйеде тұрақты коэффициентті гиперкомплекс айнымалының бірінші ретті біртексіз дифференциалдық теңдеуін шешу мәселесі қарастырылады. Дифференциалдық теңдеудің оң жағының әртүрлі жағдайларындағы шешімнің құрылымы анықталады. Нөлдің бөлгішінің пайда болу жағдайындағы теңдеудің шешуінің құрылымы көрсетіледі.

Гипрекомплекстік функцияның компоненті тәуелсіз айнымалының көпмүшелігі болғанда дифференциалдық теңдеу біртексіз нақты айнымалылардың n теңдеулер жүйесіне айналатыны және оның дифференциалды теңдеулер теориясының белгілі әдістерімен шешілетіні нақтыланады. Осылайша, гиперкомплекстік жүйеде біртексіз дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық түрдегі шешімдерін алу ғылым мен техниканың әр түрлі салаларындағы процестерді моделдеудің өсуінің тиімділігіне әкеледі.

Түйін сөздер: гиперкомплекс жүйе, гиперкомплекс сан, гиперболалық сан, нөлдің бөлгіші, дифференциалдық теңдеу, жеке және жалпы шешім, экспоненциалды полином.

Аннотация

А.К. Абиров [1], Н. К.Шаждекеева [1], Т.Н.Ахмурзина [1]
[1] Атырауский государственный университет имени Х.Досмухамедова , г.Атырау, Казахстан

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЙ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНОЙ СИСТЕМЕ

В статье рассматривается задача решения неоднородного дифференциального уравнения первого порядка с переменной с постоянным коэффициентом в гиперкомплексной системе. Определена структура решения в разных случаях правой части дифференциального уравнения. Показана структура решения уравнения в случае появления делители нуля.

Выясняется, что, когда компонент гиперкомплексной функции является полиномом независимой переменной, дифференциальное уравнение превращается в неоднородную систему вещественных переменных из n уравнений и ее решение определяются определенными методами теории дифференциальных уравнений. Таким образом, получение аналитически однородных решений неоднородных дифференциальных уравнений в гиперкомплексной системе приводит к повышению эффективности моделирования процессов в различных областях науки и техники.

Ключевые слова: гиперкомплексная система, гиперкомплексное число, гиперболическое число, делители нуля, дифференциальное уравнения, частное и общее решение, экспоненциальный полином.

Abstract

DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A HYPERCOMPLEX SYSTEM

AbirovA.K. [1], ShazhdekeevaN.K. [1], Akhmurzina T.N. [1]
[1] Atyrau State University named after Kh. Dosmukhamedov, Atyrau, Kazakhstan

The article considers the problem of solving an inhomogeneous first-order differential equation with a variable with a constant coefficient in a hypercomplex system. The structure of the solution in different cases of the right-hand side of the differential equation is determined. The structure of solving the equation in the case of the appearance of zero divisors is shown.

It turns out that when the component of a hypercomplex function is a polynomial of an independent variable, the differential equation turns into an inhomogeneous system of real variables from n equations and its solution is determined by certain methods of the theory of differential equations. Thus, obtaining analytically homogeneous solutions of inhomogeneous differential equations in a hypercomplex system leads to an increase in the efficiency of modeling processes in various fields of science and technology.

Keywords: hypercomplex system, hypercomplex number, hyperbolic number, zero divisors, differential equations, partial and general solution, exponential polynomial.

Тұрақты коэффициентті гиперкомплекс айнымалының бірінші ретті біртексіз дифференциалдық теңдеуі деп

$$\dot{X} + AX = F(t), \tag{1}$$

түрдегі теңдеуді айтамыз. Мұндағы А – гиперкомплекс сан, ал $F(t)$ – нақты айнымалының гиперкомплекс функциясы. (1) теңдеудің жалпы шешімі біртекті

$$\dot{X} + AX = 0, \tag{2}$$

теңдеудің барлық шешімдерінің және қандайда бір (1) теңдеудің жеке шешімінің қосындысы екенін көрсетейік. $U(t)$– (1) теңдеудің жеке шешімі, ал $V(t)$– (2) теңдеуініңкез келген шешімі болсын. Сонда $\dot{V} + AV = 0$ және $\dot{U} + AU = F(t)$. Бұларды қоссақ, онда $\dot{U} + \dot{V} + AU + BU = F(t)$.

Бұдан $X = U + V$ (1) теңдеудің жалпы шешімі болатындығы шығады.

(1) теңдеудің оң жағы $F(t)$ біртектіемес сызықты гиперкомплекс функция, яғни мына түрде болсын:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i.$$

Мысалға, теңдеудің гиперболалық сандардың жүйесіндегі шешуін табуды қарастырайық. Гиперболалық сандардың [1–3] жүйесіндегі $\{e_1, e_2\}$ базисінде экспонента мына түрде анықталады:

$$e^{\alpha t} = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2;$$

$$f_1(t) = e^{\left(\alpha_1 + \frac{q}{2}\alpha_2\right)t}\left(\cosh(l\alpha_2 t) - \frac{q}{2l}\sinh(l\alpha_2 t)\right);$$

$$f_2(t) = e^{\left(\alpha_1 + \frac{q}{2}\alpha_2\right)t}\frac{1}{l}\sinh(l\alpha_2 t);$$

$$\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2;$$

$$j^2 = p + qj;$$

$$l = \sqrt{p + q^2/4}.$$

Гипрекомплекстік функцияның компоненті тәуелсіз айнымалының көпмүшелігі болса, онда (1) теңдеу біртексіз нақты айнымалылардың n теңдеулер жүйесіне айналады және оны дифференциалды теңдеулер теориясының белгілі әдістерімен шешіледі. (1) теңдеудің оң жағы экспоненттi болатын кезін қарастырайық $\dot{X} + AX = Be^{Mt}$,мұндағы A, B және M гиперболалық сандар.

Шешімді $X_r = Ne^{Mt}$ түрдегі жеке жағдайды іздестірейік. Туындыны тауып $\dot{X_r} = NMe^{Mt}$ және оны теңдеуге қойып, аламыз:$NM + AN = B$. Егер $A + M$ саны нөлдік бөлгіші болмаса, онда $N = B/(A + M)$.

Сонымен жеке жағдайдағы шешім мына түрде болады: $X_r = B/(A + M)\,e^{Mt}$. Онда (1) теңдеудің жалпы шешімі мына түрде болады: $X = Ke^{-At} + B/(A + M)\,e^{Mt}$, мұндағы K – гиперболалық еркін тұрақты, ал $A + M \neq 0$ және $A + M$ нөлдік бөлгіш емес.

Енді теңдеудің оң жағы гиперболалық функция болсын:

$$\dot{X} + AX = B\sinh t;$$

$$\dot{X} + AX = B\cosh t$$

Теңдеудің жеке шешімін гиперсинус және гиперкосинустың сызықты комбинациясы түрінде іздейік:

$$X = R_1\sinh(Ct) + R_2\cosh(Ct);$$

$$\dot{X} = C(R_1\cosh(Ct) + R_2\sinh(Ct)).$$

Бұл теңдіктерді алдыңғы теңдіктерге қойып бірінші және екінші теңдеуге қатысты аламыз:

$$X_r = AB/(A^2 - C^2) \cdot \sinh(Ct) - BC/(A^2 - C^2) \cdot \cosh(Ct);$$

$$X_r = -BC/(A^2 - C^2) \cdot \sinh(Ct) + AB/(A^2 - C^2) \cdot \cosh(Ct).$$

$A^2 - C^2 \neq 0$ болуы шешімнің бар болуының негізгі шарты, сонымен қатар берілген теңдеудегі гиперкомплекстік сандар жүйесінде нөлдік бөлгіші болмауы керек.

Енді оң жағы – экспоненциалды полином болатын жағдайды қарастырайық. Экспоненциалды полином деп $F(t)e^{kt}$ өрнегін айтамыз, мұнда $F(t)$ – гиперкомплекстік полином.

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, e_i.$$

бұрынғыша n– гиперкомплекс сандар жүйесінің қатары. $f_i(t)$ – нақты t айнымалының полиномы, ал e_i гиперкомплекс сандар жүйесінің базистік элементі. (1) – біртексіз теңдеудің оң жағы экспоненциалды полиномы

$$\dot{X} + AX = F(t)e^{Bt}.$$

$F(t)$ өрнегінің сызықтылығынан, оның жеке шешімдерінің қосындысы да жеке шешім болады. Сондықтан $\dot{X} + AX = f_i(t)e_ie^{Bt}, i = 1,2, \dots, n$ түріндегі теңдеудің шешімін қарастырған жеткілікті.

Гиперкомплекстік сандар жүйесінің негізгі базистік элементтері тұрақты болғандықтан, ол шешімге тұрақты көбейгіш болып енеді. Сызықтық дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясына сәйкес мына түрдегі нақты шешімі бар

$$X_r = g(t)e_ie^{Bt},$$

мұндағы $g(t)$ фунуциясы $f(t)$–ның дәрежесіне сәйкес дәрежедегі полином. $f(t), g(t)$ функцияларының дәрежелері r болсын:

$$f_i(t) = a_it^i, i = 0,1, \dots, r; \;\; g(t) = \beta_it^i,$$

Мұндағы жоғарғы индекс i айнымалы t–ның дәрежелік көрсеткіші:

$$X_r = e_i\beta_it^ie^{Bt}.$$

Туынды алайық:

$$dX_r/dt = e_ie^{Bt}\left(i\beta_it^{i-1} + d\beta_it^i\right).$$

Сонда тендеуге қою және дәрежелерін теңестіру арқылы

$$\beta_1 + \beta_0(K + 1) = \alpha_0;$$

……………………..

$$j\beta_j + \beta_{j-1}(K + 1) = \alpha_j;$$

………………………………

$$\beta_r(K + 1) = \alpha_r.$$

жүйесін аламыз. Осы жүйені шешу үшін рекурентті формулалар қолданылады:

$$\beta_r = \alpha_r/(K + 1);$$

$$\beta_j = \left[a_j - (K + 1)\beta_{j-1}\right]/j.$$

Ал енді берілген теңдеудің оң жағы гиперкомплекс коэффициентті полином болатын болсын: $\dot{X} + AX = F(t)$, мұндағы

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i t^i,$$

ал B_i гиперкомплекс сандар.

Бұл теңдеу сызықты болуына байланысты $F(t) = Bt^n$ жағдайды қарастыру жеткілікті.

g_i гиперкомплекс сан болғанда, теңдеудің шешімін бұрынғыша табамыз:

$$X = G(t) = \sum_{i=0}^{n} G_i t^i.$$

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{i=1}^{n} iG_i t^{i-1}.$$

Бұларды берілген теңдеуге қойып аламыз:

$$\sum_{i=1}^{n} iG_i t^{i-1} + A \sum_{i=0}^{n} G_i t^i = Bt^n.$$

Бірдей t дәрежесіне сәйкес коэффициенттерді теңестіру арқылы, мына жүйені аламыз:

$$G_1 + AG_0 = 0,$$

$$2G_2 + AG_1 = 0,$$

…..........................

$$jG_j + AG_{j-1} = 0,$$

………………………

$$AG_n = B.$$

Бұл жүйенің шешімі

$$G_j = -(Bj!)/\left(n!\,A^{n-j+1}\right), j = 0,1, \dots, n.$$

Көріп отырғандай, коэффициенттердің нөлге тең еместігі немесе нөлдің бөлгіші болмауы бастапқы теңдеудің бір шешімінің бар болу шарты. Кейбір ерекше жағдайды қарастырайық. Жоғарыдағы табылған теңдеудің жеке шешімін қарастыралық: $X_r = B/(A+M)\, e^{Mt}$.

Егер $M = -A$ болса, онда бөлгіш нөлге айналады. Бұл жағдайда жеке шешімді мына түрде іздейміз: $X_r = Nte^{-At}$. Сонда

$$\dot{X_r} = Ne^{-At} - NAte^{-At}$$

және шешімді теңдеуге қойып, теңдеудің екі жағын e^{-At}-не бөліп аламыз:

$$N - NAt + NAt = B;\; N = B.$$

Онда жеке шешім $X_r = Bte^{-At}$ түрінде болады.

Бұл түрдегі жеке шешім өлшеміне қарамастан барлық коммутативті гиперкомплекс сандар жүйесіне қолайлы.

$A + M \neq 0$, бірақ $A + M$ нөлдік бөлгіш болғандағы ерекше жағдайды қарастырсақ. $B \neq 0$ және$(A + M)B = 0$ болатын жүйеде B–гиперкомплекстік сан бар болса, онда шешімді дәрежелік қатардың қосындысы ретінде қарастырамыз:

$$X_r = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n,$$

мұндағы α_n - гиперкомплекс коэффициенттер. Осыдан

$$\frac{dX_r}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n t^{n-1}.$$

Бұны теңдеуге қойып, тәуелсіз айнымалы t дәрежелерінің коэффициенттерін теңестірсек, онда аламыз:

$$\alpha_1 = 1 - A\alpha_0;$$

$$\alpha_2 = \frac{B}{2!} - \frac{M}{2!}(1 - \alpha_0 M);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_n = \frac{B^{n-1}}{n!} - \frac{MB^{n-2}}{n!} + \frac{M^2 B^{n-3}}{n!} + \cdots + (-1)^n \frac{A^{n-1}}{n!}(1 - \alpha_0 M);$$

Әдетте бұл қатарды кішірейту мүмкін емес. Ал егер нақты нөлдік бөлгіші бар гиперкомплекстік сан алынса, онда сандық түрде шешімін құрастыруға болады.

Сонымен, әртүрлі коммутативті гиперкомплекстік жүйеде біртексіз дифференциалдық теңдеулердің аналитикалық түрдегі шешімдерін алуға мүмкін болады және бұл ғылым мен техниканың әр түрлі салаларындағы процестерді моделдеудің өсуінің тиімділігіне әкеледі.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 *Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973. – 145с.*

2 *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1977. – 416с.*

3 *Мәукеев Б. Дифференциалдық теңдеулерді шешу. –Мектеп,1989. - 232 б.*