МРНТИ 27.33.19
УДК 517.968.7

https://doi.org/10.51889/2020-3.1728-7901.10

М.Д. Кошанова[1]*, М.А. Муратбекова*[1]*, Б.Х. Турметов*[1]

[1]*Международный казахско-турецкий университет им. К.А.Ясави, г.Туркестан, Казахстан*

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С ИНВОЛЮЦИЕЙ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Аннотация

В настоящей работе изучаются новые классы краевых задач для нелокального аналога уравнения Пуассона. Краевые условия, а также нелокальный оператор Пуассона задаются при помощи операторов преобразования с ортогональными матрицами. В работе исследованы вопросы разрешимости аналогов краевых задач типа Дирихле и Неймана. Доказывется, что как и в классическом случае аналог задачи Дирихле безусловна разрешима. Для нее доказаны теоремы о существования и единственности решения задачи. Найдены явный вид функции Грина, обобщенное ядро Пуассона и интегральное представление решения. Для аналога задачи Неймана найдены точное условие разрешимости в виде связи интегралов от заданных функций. Построено также функция Грина и интегральное представление решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: нелокальное уравнение, уравнение Пуассона, задача Дирихле, задача Неймана, функция Грина.

Аңдатпа

М.Д. Кошанова[1]*, М.А. Муратбекова*[1]*, Б.Х. Турметов*[1]

[1]*Қ.А.Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан*

БЕЙЛОКАЛЬ ПУАССОН ТЕҢДЕУІ ҮШІН КЕЙБІР ИНВОЛЮЦИЯЛЫ ШЕТТІК ЕСЕПТЕР ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста Пуассон теңдеуінің бейлокаль аналогы үшін шекаралық есептердің жаңа кластарын зерттеленеді. Шеттік шарттар, сонымен қатар бейлокаль Пуассон операторы ортогональ матрицалы операторлық түрлендірулерді қолдана отырып анықталады. Жұмыста Дирихле және Нейман түріндегі шеттік есептердің аналогтарының шешімділігі мәселелері зерттелген. Классикалық жағдай сияқты, Дирихле есебінің аналогы шартсыз шешілетіндігі дәлелденді. Бұл есептің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденеді. Грин функциясының айқын түрі, жалпыланған Пуассон ядросы және шешімнің интегралды көрінісі табылған. Нейман есебінің аналогы үшін шешімнің бар болу шарты берілген функциялардың интегралдары арасындағы байланыс түрінде беріледі. Зерттелетін есептің Грин функциясы және шешімнің интегралдық көрінісі де құрылған.

Түйін сөздер: локальды емес теңдеу, Пуассон теңдеуі, Дирихле есебі, Нейман есебі, Грин функциясы.

Abstract

SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH INVOLUTION FOR THE NONLOCAL POISSON EQUATION

Koshanova M. [1]*, Muratbekova M.* [1]*, Turmetov B.* [1]

[1] *A. Yasaui International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan*

In this paper, we study new classes of boundary value problems for a nonlocal analogue of the Poisson equation. The boundary conditions, as well as the nonlocal Poisson operator, are specified using transformation operators with orthogonal matrices. The paper investigates the questions of solvability of analogues of boundary value problems of the Dirichlet and Neumann type. It is proved that, as in the classical case, the analogue of the Dirichlet problem is unconditionally solvable. For it, theorems on the existence and uniqueness of the solution to the problem are proved. An explicit form of the Green's function, a generalized Poisson kernel, and an integral representation of the solution are found. For an analogue of the Neumann problem, an exact solvability condition is found in the form of a connection between integrals of given functions. The Green's function and an integral representation of the solution of the problem under study are also constructed.

Keywords: nonlocal equation, Poisson’s equation, Dirichlet problem, Neumann problem, Green function.

Введение

Пусть $\Omega=\left\{x\in R^n:|x|<1\right\}$ – единичный шар, $n\geq 2$, а $\partial\Omega$ – единичная сфера, P,Q – отображения вида $Px=\left(x_1,...,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},...,x_n\right)$, $Qx=\left(x_1,...,x_{j-1},-x_j,x_{j+1},...,x_n\right)$, $1\leq i,\, j\leq n$. Заметим, что преобразования P,Q являются инволюцией, т.е. $P^2x=Q^2x=x$.

Кроме того, очевидно, что выполняется условие $P\left(Qx\right)=Q\left(Px\right)$. Пусть a,b,α,β - некоторые действительные числа. Рассмотрим в Ω следующие задачи.

Задача D. Найти функцию $u(x)$ из класса $C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую условиям

$$-a\Delta u(x)-b\Delta u(Px)=f(x),\ x\in\Omega, \tag{1}$$

$$\alpha u(x)+\beta u(Qx)=g(x),\ x\in\partial\Omega. \tag{2}$$

Задача N. Найти функцию $u(x)$ из класса $C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) и условию

$$\alpha\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}+\beta\frac{\partial u(Qx)}{\partial\nu}=g(x),\ x\in\partial\Omega, \tag{3}$$

где ν - вектор нормали к границе области Ω, α,β - некоторые действительные числа.

Отметим, что основные краевые задачи (Дирихле, Неймана и Робена) для нелокального уравнения Пуассона с матрицей вида P изучены в работе [1]. А краевые задачи с матрицей вида Q для классического уравнения Пуассона рассмотрены в работах [2-4]. Кроме того, в одномерном случае аналогичные задачи для нелокальных аналогов параболических и гиперболических уравнений исследовались в работах [5-12]. Заметим, также, что в работе [13] для уравнения (1) изучена краевая задача с граничным оператором дробного порядка.

2. Вспомогательные утверждения

В этом пункте изложим некоторые вспомогательные утверждения связанные со свойствами отображений P и Q.

Введем операторы $\Lambda u(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}$, $I_Pu(x)=u(Px),\ I_Qu(x)=u(Qx)$.

Лемма 1. *Операторы* $I_Pu(x),I_Qu(x)$ *коммутируют с операторами* Λ *и* Δ.

Следствие 1. *Если функция* $u(x)$ *- гармоническая в* Ω, *то функции* $u(Px)=I_Pu(x)$ $u(Qx)=I_Qu(x)$ *также гармонические в* Ω.

Действительно, в силу леммы 2.1 $\Delta u(x)=0\Rightarrow$ $\Delta I_Pu(x)=I_P\Delta u(x)=0$.

Следствие 2. *Если функция* $u(x)$ *- гармоническая в* Ω, *то она удовлетворяет однородному уравнению (1) в* Ω.

Действительно, в силу леммы 1, при $x\in\Omega$, имеем

$$-a\Delta u\left(x\right)-b\Delta I_Pu\left(x\right)=-a\Delta u\left(x\right)-bI_P\Delta u\left(x\right)=0$$

Верно и обратное утверждение.

Лемма 2. Пусть функция $u \in C^2(\Omega)$ и удовлетворяет однородному уравнению (1). Тогда при выполнении условия $a \neq \pm b$ функция $u(x)$ является гармонической в области Ω.

Доказательство. Пусть функция $u \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет однородному уравнению (1). Обозначим

$$v(x) = a \cdot u(x) + b \cdot I_P u(x). \tag{4}$$

Очевидно, что $v(x) \in C^2(\Omega)$ и $\Delta v(x) = 0, x \in \Omega$, т.е. функция $v(x)$ является гармонической в области Ω. В силу следствия 1 функция $v(Px)$ тоже гармоническая в области Ω. С другой стороны из (4), меня точку x на Px, в силу равенства $P(Px) = x$ получим

$$v(Px) = au(Px) + bu(x). \tag{5}$$

Таким образом, для функций $u(x), u(Px)$ получаем систему алгебраических уравнений (4), (5). По условию леммы определитель этой системы $D = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \neq 0$ не обращается в нуль. Тогда функция $u(x)$ легко находится через функцию $v(x)$ по формуле

$$u(x) = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[av(x) - bv(Px)\right]. \tag{6}$$

Как отмечалось выше функции $v(x)$ и $v(Px)$ - гармонические в Ω, а значит функция $u(x)$ из (6) также является гармонической в области Ω. Лемма доказана.

3. Единственность решения краевых задач

В этом пункте мы исследуем единственность решение задач D и N. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть в задачах D и N справедливы неравенства $a \neq \pm b, \alpha \neq \pm \beta$ и решение этих задач существуют. Тогда

1) решение задачи D единственно;

2) решение задачи N единственно с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство.

1) Докажем, что однородная задача D имеет только нулевое решение, а значит решение неоднородной задачи D единственно. Пусть $u(x)$ - решение однородной задачи D. По определению решения $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Если $a \neq \pm b$, то по лемме 2 функция $u(x)$ является гармонической в области Ω. Рассмотрим функцию $v(x) = l_Q[u](x)$. Тогда $v(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и функция $v(x)$ является гармонической в области Ω. Кроме того, в силу граничного условия задачи D $v(x)\big|_{\partial\Omega} = l_Q[u](x)\big|_{\partial\Omega} = 0$.

Следовательно, функция $v(x)$ является решением однородной задачи Дирихле

$$\Delta v(x) = 0, x \in \Omega;\ v(x)\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле имеем $v(x) \equiv 0$. Далее, если выполняется неравенство $\alpha \neq \pm\beta$, то существует обратный оператор l_Q^{-1} и справедливо равенство $0 \equiv l_Q^{-1}[v](x)\big|_{\partial\Omega} = l_Q^{-1}\left[l_Q[u]\right](x) = u(x)$, т.е. $u(x) \equiv 0$.

2) Если $u(x)$ - решение однородной задачи N, то по лемме 2 функция $u(x)$ является гармонической в области Ω. Тогда для функции $v(x) = l_Q[u](x)$ получаем

$$\left.\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \Lambda[v](x)\big|_{\partial\Omega} = \Lambda\left[l_Q[u]\right](x)\big|_{\partial\Omega} = l_Q\left[\Lambda[u]\right](x)\big|_{\partial\Omega} = l_Q\left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right](x)\bigg|_{\partial\Omega} = 0 .$$

Значит, функция $v(x) = l_Q[u](x)$ удовлетворяет условиям следующей задачи Неймана

$$\Delta v(x) = 0, x \in \Omega;\ \left.\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0 .$$

Решением этой задачи является функция $v(x) \equiv C$. Тогда,

$$u(x) = l_Q^{-1}\left[v\right](x) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2}\left[\alpha C - \beta C\right] = \frac{C}{\alpha + \beta} \equiv const .$$

3) Пусть $u(x)$ - решение однородной задачи R. Тогда по лемме 2 функция $u(x)$ является гармонической в области Ω .

Обозначим $v(x) = l_Q[(\Lambda + c)u](x)$.
Тогда

$$\Delta v(x) = l_Q[(\Lambda + c + 2)\Delta u](x) = 0, x \in \Omega,\ \alpha v(x) + \beta v(Qx) = 0, x \in \partial\Omega .$$

Теорема доказана.

4. Исследование существование решения задачи D и N.
В этом разделе исследуем существование решения основных задач.

Пусть $K(x,y) = \dfrac{1}{\omega_n}\dfrac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$ - ядро Пуассона, ω_n - площадь единичной сферы, $G(x,y)$ - функция Грина задачи Дирихле, которая представляется в виде

$$G(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\left[E(x,y) - E\left(x|y|, \frac{y}{|y|}\right)\right], E(x,y) = \begin{cases} -\ln|x-y|, n = 2 \\ \dfrac{1}{n-2}|x-y|^{2-n}, n \ge 3 \end{cases} .$$

В работе [14] доказано следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $f(x) \in C(\bar{\Omega}), g(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда справедливы равенства

$$\int_\Omega f(Px)dx = \int_\Omega g(x)dx ,\ \int_{\partial\Omega} g(Qx)ds_x = \int_{\partial\Omega} g(x)ds_x$$

$$\int_{\partial\Omega} K(x,y)g(Qx)ds_x = \int_{\partial\Omega} K(x,Q^T y)g(x)ds_x .$$

Относительно задачи D справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполняются условия $a \ne \pm b, \alpha \ne \pm\beta$, $f \in C^1(\bar{\Omega}), g \in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи D существует, единственно и представляется в виде

$$u(x) = \int_\Omega G_P(x,y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} K_Q(x,y)g(y)ds_y , \quad (7)$$

где

$$G_P(x,y)=l_{P,x}^{-1}\left[G\right](x,y)\equiv\frac{1}{a^2-b^2}\left[aG(x,y)-bG(Px,y)\right], \qquad (8)$$

$$K_Q(x,y)=l_{Q,x}^{-1}\left[K\right](x,y)\equiv\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[\alpha K(x,y)-\beta K(Qx,y)\right]. \qquad (9)$$

Здесь обозначения $l_{P,x}^{-1}$, $l_{Q^T,y}^{-1}$, $l_{P^T,y}$ означают, что эти операторы действуют по переменным x и y соответственно.

Доказательство. Для функции $v(x)$ рассмотрим в области Ω следующую задачу Дирихле

$$-\Delta v(x)=f(x), x\in\Omega;\ v(x)\big|_{\partial\Omega}=l_P\left[l_Q^{-1}[g]\right](x)\equiv h(x) \qquad (10)$$

Ясно, что $g\in C(\partial\Omega)\Rightarrow h\in C(\partial\Omega)$ и значит решение задачи Дирихле (10) существует и единственно. Известно (см. например [15], стр.35), что при заданных функциях $f(x)$ и $h(x)=l_P\left[l_Q[g]\right](x)$ решение задачи (10) представляется в виде

$$v(x)=\int_\Omega G(x,y)f(y)\,dy+\int_{\partial\Omega}K(x,y)h(y)ds_y. \qquad (11)$$

Пусть

$$u(x)=l_P^{-1}[v](x). \qquad (12)$$

Покажем, что функция $u(x)$, определяемая из (12), является решением задачи D. Действительно, $f\in C^1(\bar\Omega), g\in C(\partial\Omega)\Rightarrow v\in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)\ \Rightarrow u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$. Поэтому, согласно лемме 1

$$-\Delta u(x)=-\Delta l_P^{-1}[v](x)=l_P^{-1}[-\Delta v](x)=l_P^{-1}[f](x),$$

$$-\Delta u(Px)=-\Delta l_P^{-1}[v](Px)=l_P^{-1}[-\Delta v](Px)=l_P^{-1}[f](Px).$$

Отсюда,

$$-a\Delta u(x)-b\Delta u(Px)=-l_p[\Delta u](x)=l_p\left[l_P^{-1}[-\Delta v]\right](x)=l_p\left[l_P^{-1}[f]\right](x)=f(x), x\in\Omega.$$

и значит уравнение (1) удовлетворяется

$$-a\Delta u(x)-b\Delta u(Px)=f(x), x\in\Omega.$$

Проверим граничные условия задачи (2). Для всех $x\in\partial\Omega$ имеем

$$\alpha u(x)+\beta u(Qx)|_{\partial\Omega}\equiv l_Q[u](x)|_{\partial\Omega}=l_Q[l_P^{-1}[v]](x)|_{\partial\Omega}=l_Q[l_P^{-1}[h]](x)|_{\partial\Omega}=$$

$$=l_Q\left[l_Q^{-1}[g]\right](x)|_{\partial\Omega}=g(x).$$

Значит граничные условия (2) для функции $u(x)$ выполнены.
Далее, из (11) следует

$$v(Px)=\int_\Omega G(Px,y)f(y)\,dy+\int_{\partial\Omega}K(Px,y)h(y)ds_y.$$

Подставляя это значение $v(Px)$ в равенство (12), получим

$$u(x)=l_P^{-1}[v](x)=\int\limits_{\Omega} l_{P,x}^{-1}\left[G\right](x,y)f(y)\,dy+\int\limits_{\partial\Omega} l_{P,x}^{-1}\left[K\right](x,y)h(y)ds_y=$$

$$=\int\limits_{\Omega} l_{P,x}^{-1}\left[G\right](x,y)f(y)dy+\int\limits_{\partial\Omega} l_{P,x}^{-1}\left[K\right](x,y)l_{P,y}\left[l_{Q,y}^{-1}[g]\right](y)ds_y$$

Далее**,** учитывая формулу из леммы 3, а также коммутативность операторов l_P и l_Q

$$\int\limits_{\partial\Omega} l_{P,x}^{-1}\left[K\right](x,y)l_{P,y}\left[l_{Q,y}^{-1}[g]\right](y)ds_y=\int\limits_{\partial\Omega} l_{P,x}^{-1}\left[l_{Q^T,y}^{-1}\left[\left[l_{P^T,y}\left[K\right]\right]\right]\right](x,y)g(y)ds_y=$$

$$=\int\limits_{\partial\Omega} l_{Q^T,y}^{-1}\left[l_{P,x}^{-1}\left[l_{P^T,y}\left[K\right]\right]\right](x,y)g(y)ds_y=\int\limits_{\partial\Omega} l_{Q^T,y}^{-1}\left[K\right](x,y)g(y)ds_y.$$

Так как, $K(x,Q^Ty)=K(Qx,y)$, то $l_{Q^T,y}^{-1}\left[K\right](x,y)=l_{Q,x}^{-1}\left[K\right](x,y)$. Теперь, если обозначим

$$G_P(x,y)=l_{P,x}^{-1}\left[G\right](x,y),K_Q(x,y)=l_{Q,x}^{-1}\left[K\right](x,y),$$

то получим представление (7). Теорема доказана.

Далее, исследуем необходимые и достаточные условия разрешимости задачи N.

Теорема 3. Пусть выполняются условия $a\neq\pm b,\alpha\neq\pm\beta$, $f\in C^1(\bar{\Omega}),\,g\in C(\partial\Omega)$. Тогда для разрешимости задачи N необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx+\frac{a+b}{\alpha+\beta}\int\limits_{\partial\Omega} g(x)\,dS_x=0. \qquad (13)$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(x)=\int\limits_{\Omega} G_{N,P}(x,y)f(y)dy+\int\limits_{\partial\Omega} G_{N,Q}(x,y)g(y)dS_y, \qquad (14)$$

где

$$G_{N,P}(x,y)=l_{P,x}^{-1}\left[G_N\right](x,y)\equiv\frac{a}{a^2-b^2}G_N(x,y)-\frac{b}{a^2-b^2}G_N(Px,y),$$
$$G_{N,Q}(x,y)=l_{Q,x}^{-1}\left[G_N\right](x,y)\equiv\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}G_N(x,y)-\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}G_N(Qx,y). \qquad (15)$$

Доказательство. Предположим, что $u(x)$ - решение задачи N существует. Для удобства изложения будем считать, что функция $u(x)$ принадлежит классу $C^3(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ (для этого достаточно потребовать чтобы $f(x)\in C^{\lambda}(\bar{\Omega}),g(x)\in C^{\lambda+1}(\partial\Omega),$ $\lambda>1$). Применим, оператор Λ к функции $u(x)$ и обозначим $w(x)=\Lambda u(x)$. Тогда, учитывая равенство $\Delta\Lambda u(x)=\left(\Lambda+2\right)\Delta u(x)$, где $x\in\Omega$ и коммутируемость операторов Λ и l_P будем иметь

$$-a\Delta w(x)-b\Delta w(Px)=\left(\Lambda+2\right)\left[-a\Delta u\left(x\right)-b\Delta u\left(Px\right)\right]=\left(\Lambda+2\right)f(x)$$

Из граничного условия (3) с помощью свойства оператора Λ следует,

$$l_Q[w](x)\Big|_{\partial\Omega} = l_Q\left[\Lambda u\right](x)\Big|_{\partial\Omega} = l_Q\left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right](x)\Bigg|_{\partial\Omega} = g(x).$$

Таким образом, если $u(x)$ - решение задачи N, то для функции $w(x) = \Lambda u(x)$ мы получаем краевую задачу типа D

$$-a\Delta w(x) - b\Delta w(Px) = \left(\Lambda + 2\right) f(x),\ x \in \Omega;\ l_Q[w](x)\Big|_{\partial\Omega} = g(x). \tag{16}$$

Кроме того, из равенства $w(x) = \Lambda u(x)$ следует необходимость выполнения условия $w(0) = 0$. Далее, если функции $F(x) = \left(\Lambda + 2\right) f(x)$, $g(x)$ достаточно гладкие, то по утверждению теоремы 2 решение задачи (16) существует, единственно и представляется в виде (7), т.е.

$$w(x) = \int\limits_{\Omega} G_P(x,y)F(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega} P_Q(x,y)g(y)ds_y, \tag{17}$$

где функции $G_S(x,y)$ и $P_S(x,y)$ определяются из (8) и (9) соответственно.

Найдем условия, при которых выполняется равенство $w(0) = 0$. Из представления (17) получаем

$$w(0) = \int\limits_{\Omega} G_P(0,y)F(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega} P_Q(0,y)g(y)ds_y.$$

Далее, при $n > 2$ имеем

$$G_S(0,y) = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[aG(0,y) - bG(0,y)\right] = \frac{1}{a+b}G(0,y) = C_1\left[|y|^{2-n} - 1\right],$$

$$P_Q(0,y) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2}\left[\alpha K(0,y) - \beta K(0,y)\right] = \frac{1}{\alpha+\beta}K(0,y) = C_2,$$

где $C_1 = \dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\dfrac{1}{a+b}$, $C_2 = \dfrac{1}{\omega_n}\dfrac{1}{\alpha+\beta}$.

Далее, поскольку $F(y) = (\Lambda + 2)f(y) = \left(2 + \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \dfrac{\partial}{\partial y_j}\right) f(y)$, то легко показать, что

$$\int\limits_{\Omega} G_P(0,y)F(y)\,dy = \int\limits_{\Omega} G_P(0,y)\left(2 + \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right) f(y)dy = \frac{1}{\omega_n}\frac{1}{a+b}\int\limits_{\Omega} f(y)dy.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\partial\Omega} K_Q(0,y)g(y)ds_y = C_2\int\limits_{\partial\Omega} g(y)ds_y = \frac{1}{\omega_n}\frac{1}{\alpha+\beta}\int\limits_{\partial\Omega} g(y)ds_y.$$

Тогда для выполнения условия $w(0) = 0$ необходимо и достаточно выполнения равенства

$$w(0) = \frac{1}{\omega_n}\frac{1}{a+b}\int\limits_{\Omega} f(y)dy + \frac{1}{\omega_n}\frac{1}{\alpha+\beta}\int\limits_{\partial\Omega} g(y)ds_y = 0.$$

Это условие можно переписать в виде

$$\int_{\Omega} f(y)dy + \frac{a+b}{\alpha+\beta}\int_{\partial\Omega} g(y)ds_y = 0.$$

Таким образом, необходимость выполнения условия (13) для существования решения задачи N доказана. Покажем, что выполнение условия (13) является и достаточным для существования решения задачи N.

Для этого рассмотрим в области Ω следующую задачу Неймана относительно функции $v(x)$

$$-\Delta v(x) = f(x), x\in\Omega; \frac{\partial}{\partial\nu}v(x)\Big|_{\partial\Omega} = l_P\left[l_Q^{-1}[g]\right](x). \tag{18}$$

Известно, что условие разрешимости этой задачи имеет вид

$$\int_{\Omega} f(x)dx + \int_{\partial\Omega} l_P\left[l_Q^{-1}[g]\right](x)ds_x = 0. \tag{19}$$

Далее, в силу леммы 4.1

$$\int_{\partial\Omega} g(Qx)ds_x = \int_{\partial\Omega} g(Px)ds_x = \int_{\partial\Omega} g(QPx)ds_x = \int_{\partial\Omega} g(x)ds_x.$$

Поэтому для функции $l_P\left[l_Q^{-1}[g]\right](x)$ имеем

$$\int_{\partial\Omega} l_P\left[l_Q^{-1}[g]\right](x)ds_x = \frac{a+b}{\alpha+\beta}\int_{\partial\Omega} g(x)ds_x.$$

Следовательно, условие (19) можно переписать в виде (13). Если это условие выполняется, то решение задачи (18) существует, единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде (см.например, [16])

$$v(x) = \int_{\Omega} G_N(x,y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} G_N(x,y)l_P\left[l_Q^{-1}[g]\right](y)ds_y, \tag{20}$$

где $G_N(x,y)$ - функция Грина задачи (18). Явный вид функции Грина $G_N(x,y)$ в случаях $n=2, n=3$ приведены в учебниках по уравнениям в частных производных, а в случае $n\geq 4$ построены в работах [16].

Далее, как и в случае задачи Дирихле решение задачи Неймана можно найти по формуле

$$u(x) = l_P^{-1}[v](x). \tag{21}$$

Далее, подставляя функцию $v(x)$ из (20) в правую часть равенства (21) будем иметь

$$u(x) = l_P^{-1}[v](x) = \int_{\Omega} l_{P,x}^{-1}\left[G_N\right](x,y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} l_{P,x}^{-1}\left[G_N\right](x,y)l_P\left[l_Q^{-1}[g]\right](y)ds_y.$$

Как и в случае задачи D для второго интеграла в последнем выражении имеем,

$$\int_{\partial\Omega} l_{P,x}^{-1}\left[G_N\right](x,y)l_P\left[l_Q^{-1}[g]\right](y)ds_y = \int_{\partial\Omega} l_{Q^T,y}^{-1}\left[l_{P^T,y}\left[l_{P,x}^{-1}[G_N]\right]\right](x,y)g(y)ds_y.$$

Далее**,** учитывая формулу из леммы 3, а также коммутативность операторов l_P и l_Q легко находим

$$l_{P^T,y}\left[l_{P,x}^{-1}[G_N]\right](x,y)=al_{P,x}^{-1}[G_N](x,y)+bl_{P,x}^{-1}[G_N](x,P^Ty)=G_N(x,y).$$

Отсюда

$$l_{Q^T,y}^{-1}\left[l_{P^T,y}\left[l_{P,x}^{-1}[G_N]\right]\right](x,y)=l_{Q^T,y}^{-1}\left[G_N\right](x,y)=\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}G_N(x,y)-\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}G_N(x,Q^Ty)=$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}G_N(x,y)-\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}G_N(Qx,y)\equiv l_{Q,x}^{-1}\left[G_N\right](x,y).$$

Если обозначим

$$G_{N,P}(x,y)=l_{P,x}^{-1}\left[G_N\right](x,y);G_{N,Q}(x,y)=l_{Q,x}^{-1}\left[G_N\right](x,y),$$

то для решения задачи N мы получим представление (14). Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования КН МОН Республики Казахстан, грант № AP08855810.

Список использованной литературы:

1 Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B.Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation // Turkish journal of mathematics. – 2019. – V.43, № 3. – P. 1604 – 1625. doi:10.3906/mat-1901-71

2 Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument // Commentationes Mathematicae. – 1974. – V.17, No. 2 . – P. 451 – 457. DOI:10.14708/cm.v17i2.5790.

3 Karachik V.V., Turmetov B.Kh. Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation // Novi Sad Journal of Mathematics. – 2020. – V. 50, No. 1. – P. 67 – 88. https://doi.org/10.30755/NSJOM.08942

4 Назарова К. Ж., Турметов Б. Х., Усманов К. И. Об одной нелокальной краевой задаче с наклонной производной // Журнал СВМО. – 2020. – Т. 22, № 1. – С.81-93

5 Andreev A. A. Analogs of classical boundary value problems for a second-order differential equation with deviating argument // Differential Equation. – 2004. – V.40, No.8. – P. 1192 – 1194. doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000049836.04104.6f.

6 Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M., Tapdigoglu R. G. An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation // Quaestiones Mathematicae. – 2017. – V.40, No. 2, – P.151-160. DOI: 10.2989/16073606.2017.1283370.

7 Kirane M., Al-Salti N. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation // Journal of Nonlinear Sciences and Applications. – 2016. – V. 9. – P. 1243 – 1251. http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.03.49.

8 Kirane M., Sadybekov M. A., Sarsenbi A.A. On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2019.– V.42, No.6. – P.2043-2052. doi.org/10.1002/mma.5498

9 Kopzhassarova A., Sarsenbi A. Basis Properties of Eigenfunctions of Second-Order Differential Operators with Involution// Abstract and Applied Analysis. – 2012. Article ID 576843. 6 p. doi.org/10.1155/2012/576843.

10 Sadybekov M. A., Dildabek G., Ivanova M.B. Advances in Mathematical Physics // – 2018. – V. 2018, Article ID 8301656. 8 p. doi.org/10.1155/2018/8301656.

11 Sarsenbi A.A. On a class of inverse problems for a parabolic equation with involution // AIP Conference Proceedings. – 2017. – V.1880, No. 040021 – P.1 – 6. https: //doi.org /10. 1063 /1.5000637

12 Сарсенби А.А. Условия разрешимости смешанных задач для уравнений параболического вида с инволюцией// Математический журнал. – 2018. – Т. 18, № 2. – С.142 – 153.

13 Кошанова М.Д., Муратбекова М.А., Турметов Б.Х. О разрешимости одной краевой задаче для нелокального уравнения Пуассона // Вестник КазНПУ имени Абая. Серия физико-математических наук. – 2019. – № 4(68). – С. 65 – 71.

14 Karachik V.V., Turmetov B. Kh. On solvability of some nonlocal boundary value problems for polyharmonic equation // Kazakh Mathematical Journal. – 2019. – V. 19, № 1. – P. 39–49.

15 Бицадзе А.В. Уравнения математической физики, Москва: Наука. 1982. – 336 с

16 Sadybekov M. A., Torebek B. T., Turmetov B.Ph. Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal, - 2016. – V. 61. – №. 1. – P.104 – 123.

References

1 Karachik V.V., Sarsenbi A., Turmetov B.Kh. (2019) On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation. Turkish journal of mathematics. V.43, № 3. 1604 – 1625. doi:10.3906/mat-1901-71. (In English)

2 Przeworska-Rolewicz D. (1974) Some boundary value problems with transformed argument. Commentationes Mathematicae. V.17, No. 2 . 451 – 457. DOI:10.14708/cm.v17i2.5790. (In English)

3 Karachik V.V., Turmetov B.Kh. (2020) Solvability of one nonlocal Dirichlet problem for the Poisson equation. Novi Sad Journal of Mathematics. V. 50, No. 1. 67 – 88. https://doi.org/10.30755/NSJOM.08942 (In English)

4 Nazarova K. Zh., Turmetov B. H., Usmanov K. I. (2020) Ob odnoj nelokal'noj kraevoj zadache s naklonnoj proizvodnoj[On a non-local boundary value problem with an inclined derivative]. Zhurnal SVMO. T. 22, № 1. 81-93. (In Russian)

5 Andreev A. A. (2004) Analogs of classical boundary value problems for a second-order differential equation with deviating argument. Differential Equation. V.40, No.8. 1192 – 1194. doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000049836.04104.6f. (In English)

6 Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M., Tapdigoglu R. G. (2017) An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation. Quaestiones Mathematicae. V.40, No. 2, 151-160. DOI: 10.2989/16073606.2017.1283370. (In English)

7 Kirane M., Al-Salti N. (2016) Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation // Journal of Nonlinear Sciences and Applications. V. 9. 1243 – 1251. http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.03.49. (In English)

8 Kirane M., Sadybekov M. A., Sarsenbi A.A. (2019) On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data. Mathematical Methods in the Applied Sciences. V.42, No.6. 2043-2052. doi.org/10.1002/mma.5498. (In English)

9 Kopzhassarova A., Sarsenbi A. (2012) Basis Properties of Eigenfunctions of Second-Order Differential Operators with Involution. Abstract and Applied Analysis. Article ID 576843. 6. doi.org/10.1155/2012/576843. (In English)

10 Sadybekov M. A., Dildabek G., Ivanova M.B. (2018) Advances in Mathematical Physics. V. 2018, Article ID 8301656. 8. doi.org/10.1155/2018/8301656. (In English)

11 Sarsenbi A.A. (2017) On a class of inverse problems for a parabolic equation with involution. AIP Conference Proceedings. V.1880, No. 040021. 1 – 6. https: //doi.org /10. 1063 /1.5000637. (In English)

12 Sarsenbi A.A. (2018) Uslovija razreshimosti smeshannyh zadach dlja uravnenij parabolicheskogo vida s involjuciej [Conditions of solvability of mixed problems for parabolic equations with involution]. Matematicheskij zhurnal. T. 18, № 2. 142 – 153. (In Russian)

13 Koshanova M.D., Muratbekova M.A., Turmetov B.H. (2019) O razreshimosti odnoj kraevoj zadache dlja nelokal'nogo uravnenija Puassona [On the solvability of a boundary value problem for a non-local Poisson equation]. Vestnik KazNPU imeni Abaja. Serija fiziko-matematicheskih nauk. № 4(68). 65 – 71. (In Russian)

14 Karachik V.V., Turmetov B. Kh. (2019) On solvability of some nonlocal boundary value problems for polyharmonic equation [On solvability of some nonlocal boundary value problems for polyharmonic equation]. Kazakh Mathematical Journal. V. 19, № 1. 39–49. (In ENglish)

15 Bicadze A.V. (1982) Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of Mathematical Physics], Moskva: Nauka. 336. (In Russian)

16 Sadybekov M. A., Torebek B. T., Turmetov B.Ph. (2016) Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball. Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal. V. 61. №. 1. 104 – 123. (In English)