

МРНТИ 20.23.27
УДК 550.8.05:004.942

<https://doi.org/10.51889/2021-3.1728-7901.02>

Н.М. Темирбеков¹, В.Л. Лось², Е.И. Имангалиев¹, Д.Р. Байгереев³,
Л.Н. Темирбекова⁴, М.Б. Нурмангалиева⁵

¹Национальная инженерная академия Республики Казахстан, г. Алматы, Казахстан

²ОО «Академия минеральных ресурсов Республики Казахстан», г. Алматы, Казахстан

³Восточно-Казахстанский университет им. С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан

⁴Казахский Национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы, Казахстан

⁵Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан

*e-mail: laura-nurlan@mail.ru

МОДУЛЬ ГЕОИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОХИМИИ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИМИ АЛГОРИТМАМИ

Аннотация

В настоящее время в связи с бурным развитием компьютерной технологии в геологии интенсивно развиваются методы и подходы научной визуализации. Общая концепция заключается в том, что на входе задается основное поле данных на дневной поверхности и дополнительные условия. Далее, для их анализа и обработки применяются методы математической геофизики, в результате которого получается новая информация для глубинных изысканий. В настоящей работе представлено описание программного модуля геоинформационной системы, основанного на методах интеллектуального выявления аномалий скрытых месторождений, для глубинного прогнозно-поискового моделирования месторождений. Функционирование программного модуля основано на применении теории обратных задач математической геофизики с элементами искусственного интеллекта с использованием геологических данных на поверхности земли, геофизических измерений и геохимических анализов в качестве входных данных.

Ключевые слова: комплексная прогнозно-минерогенетическая модель, обратная задача о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс, обратная задача магнитотеллурического зондирования, интегральное уравнение Фредгольма первого рода, сопряженное интегральное уравнение, двумерное уравнение Фредгольма первого рода, метод регуляризации для обратных задач, комплекс прикладных программ, модуль геоинформационной системы (ГИС).

Аңдатпа

¹Темирбеков Н., ²Лось В.Л., ¹Имангалиев Е.И., ³Байгереев Д.Р.,

⁴Темирбекова Л.Н., ⁵Нурмангалиева М.Б.

РЕТТЕУШІ АЛГОРИТМДЕРМЕН ГЕОХИМИЯНЫҢ КЕРІ ЕСЕПТЕРІН САНДЫҚ ҮЛГІЛЕУ НЕГІЗІНДЕ ГЕОАҚПАРАТТЫҚ ЖҮЙЕ МОДУЛІН ЖАСАУ

¹ Қазақстан Республикасының Ұлттық Инженерлік академиясы, Алматы қ., Қазақстан

²ҚБ "Қазақстан Республикасының минералдық ресурстар академиясы", Алматы қ., Қазақстан

³ А. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен қ., Қазақстан

⁴Абай атындағы қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

⁵ Д. Серікбаева атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен қ., Қазақстан

Қазіргі уақытта геологияда компьютерлік технологияның қарқынды дамуына байланысты ғылыми визуализацияның әдістері мен тәсілдері қарқынды дамуда. Жалпы тұжырымдаманы сипаттасақ, алғашында Жер бетіндегі негізгі деректер өрісі және қосымша шарттар беріледі. Әрі қарай, оларды талдау және өңдеу үшін математикалық геофизика әдістері қолданылады, нәтижесінде Жер бетінен төмендегі зерттеулер үшін жаңа ақпарат алынады. Осы жұмыста кен орындарын Жер бетінен терендегі ақпаратты болжамдау-іздістеу моделін, жасырын кен орындарының аномалияларын интеллектуалды анықтау әдістеріне негізделген геоақпараттық жүйенің бағдарламалық модулінің сипаттамасы берілген. Бағдарламалық модульдің жұмыс істеуі жасанды интеллект элементтері бар математикалық геофизиканың кері есептер теориясын жер бетіндегі геологиялық деректерді, геофизикалық өлшеулер мен геохимиялық талдауларды кіріс ақпарат ретінде қолдануға негізделген.

Түйінді сөздер: кешенді болжамдық-минерогендік модель, потенциалды өрістерді бұзушы массаларға қарай жалғастыру туралы кері есеп, магнитотеллуриялық зондтаудың кері есебі, бірінші текті Фредгольм интегралдық теңдеуі, біріктірілген интегралдық теңдеу, бірінші текті Фредгольм екі өлшемді теңдеуі, кері есептерге арналған регуляризация әдісі, қолданбалы бағдарламалар кешені, геоақпараттық жүйе модулі (ГАЗ).

Abstract

A MODULE OF GEOINFORMATION SYSTEM BASED ON NUMERICAL MODELING OF INVERSE PROBLEMS OF GEOCHEMISTRY BY REGULARIZING ALGORITHMS

¹Temirbekov N.M., ²Los V.L., ¹Imangaliyev Ye.I., ³Baigereyev D.R.,

⁴Temirbekova L.N., ⁵ Nurmangalieva M. B.

¹National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan

²PA "Academy of Mineral Resources of the Republic of Kazakhstan", Almaty, Kazakhstan

³S. Amanzholov East Kazakhstan University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

⁴Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

⁵ D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

Currently, due to the rapid development of computer technology in geology, methods and approaches of scientific visualization. The general concept is that the main data field on the daily surface and additional conditions are set at the input. Further, methods of mathematical geophysics are used for their analysis and processing, as a result of which new information is obtained for deep surveys. This paper presents a description of the software module of the geoinformation system, based on the methods of intelligent detection of anomalies of hidden deposits, for deep predictive and search modeling of deposits. The functioning of the software module is based on the application of the theory of inverse problems of mathematical geophysics with elements of artificial intelligence using geological data on the earth's surface, geophysical measurements and geochemical analyses as input data.

Key words: complex predictive-mineragenic model, inverse problem of extension of potential fields towards disturbing masses, inverse problem of MTS, I kind Fredholm, conjugate integral equation, two-dimensional I kind Fredholm, RM for inverse problems, complex of applied programs, geoinformation system module (GIS).

Введение

Степень геологической изученности месторождений является важнейшим информационным фундаментом для эффективного принятия управленческих решений по освоению недр. Современное состояние исследований в данной области неизбежно характеризуется фрагментарностью информации о недрах, что, в первую очередь, связано с дискретным характером ее получения. Инженерное прогнозирование на основе интерпретации таких неполных данных может приводить к стратегически неверным и экономически неэффективным решениям, к снижению эффективности геологоразведочных работ и возникновению промышленных аварийных ситуаций.

К настоящему времени сформировался ряд научных подходов к изучению структуры недр Земли. Среди них важное прикладное значение имеют методы математической геофизики [1]. Данный подход успешно используется для развития теории и практики геофизических исследований геологической среды. Многие задачи математической геофизики приводят к решению обратных и некорректных задач, применение которых, в основном, связано с науками о Земле: обратной задачи магнитотеллурического зондирования, каротажа, продолжения полей геохимических исследований, сейсмоки, теории потенциала и других.

Следует отметить, что стремительное развитие методов повышения геологической изученности невозможно без развития геоинформационных технологий и микроэлектроники. Исследования в этой области используют современные методы компьютерной обработки больших объемов данных наблюдения Земли, а также методы вычислительной математики [2]. В настоящее время практически отсутствуют препятствия со стороны систем полевых наблюдений, включающие и источники физических полей. Поэтому актуальным является развитие методов численного решения обратных задач геофизики и разработка сервисного программного обеспечения для преобразования цифровых данных в геоинформационные системы для наглядной интерпретации результатов геологических изысканий в удобном картографическом виде.

Кроме того, в последние десятилетия активно развивается новое направление исследований, специализирующееся на применении искусственных нейронных сетей для повышения степени геологической и геофизической изученности. Например, в работе [2] нейросети используются для решения обратных задач электроразведки при проведении магнитотеллурического зондирования. Известно также успешное применение алгоритмов искусственного интеллекта для анализа проб, моделирования и интерпретации геолого-геофизической информации.

Усовершенствованный в работе [3] графические методы (graph-based method) широко применяются в задачах кластеризации. Графические представления характеризующие сходства между точками данных играют важную роль в машинном обучении, обработке изображений, идентификации письменности, визуальном отслеживании и особенно в задачах кластеризации.

Авторами данной работы поставлена цель создать программный модуль геоинформационной системы, основанный на методах интеллектуального выявления аномалий скрытых месторождений, для глубинного прогнозно-поискового моделирования месторождений. Функционирование программного модуля основано на применении теории обратных задач математической геофизики с элементами искусственного интеллекта с использованием геологических данных на поверхности земли, геофизических измерений и геохимических анализов в качестве входных данных. В настоящей работе представлено описание некоторых математических моделей и численных методов модуля геоинформационной системы, комплексной прогнозно-минерагенической модели.

Разрабатываемый программный модуль основан на комплексной прогнозно-минерагенической модели, состоящей из геохимической и геофизической части и цифрового моделирования методами обратных задач геохимии и геофизики (Рисунок 1), которая направлена на региональное геологическое изучение недр, а именно глубинные части земной коры [3].

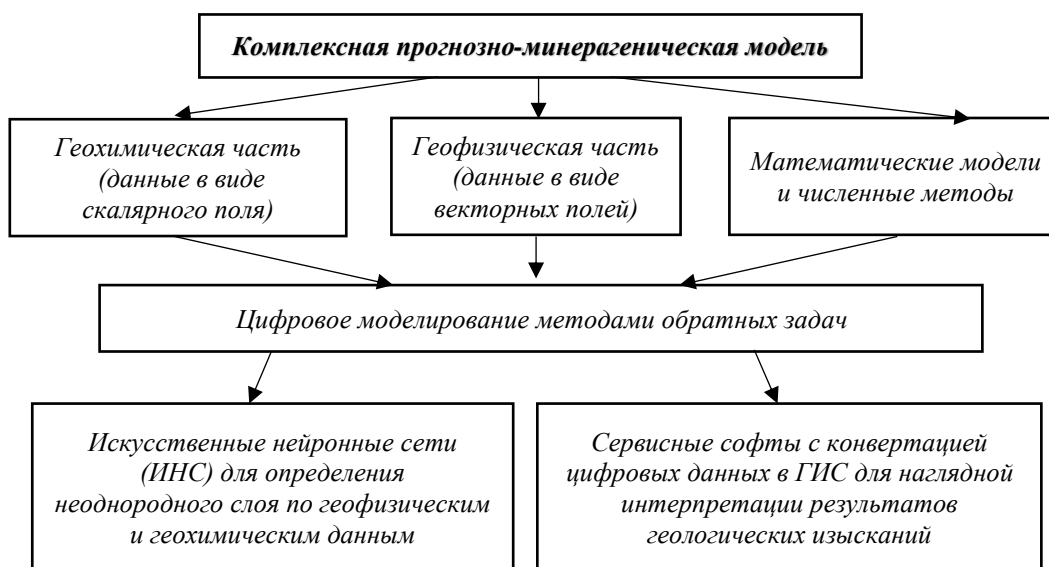


Рисунок 1. Комплексная прогнозно-минерагеническая модель

Результатом геохимического и геофизического исследований являются комплекс исходных данных в виде скалярных и векторных полей. Используя математические модели, численные методы их решения и полученные исходные данные, производится цифровое моделирование методами обратных задач. Для определения неоднородного слоя по геофизическим и геохимическим данным применяются искусственные нейронные сети. Описанный алгоритм является основой сервисного программного обеспечения с конвертацией цифровых данных в геоинформационную систему для наглядной интерпретации результатов геологических изысканий.

Математические модели и численные методы. В работе рассмотрены обратные задачи о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс и магнитотеллурического зондирования. Эти задачи описываются интегральными уравнениями Фредгольма.

Математическая модель геохимической задачи в виде обратной задачи о продолжении потенциальных полей в сторону возмущающих масс исследована с использованием математического аппарата интегральных уравнений. Задача заключается в решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода [4]. Решение интегрального уравнения I рода Фредгольма связано с задачей выявления аномалий при исследовании пространственного распределения химических элементов на редкометальных месторождениях. Известно, что некорректность рассматриваемого уравнения заключается в неустойчивости решения и так же она имеет систему линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей. В данной работе предложен метод позволяющий решить поставленные задачи, и получить численное решение. Идея предлагаемого нового метода решения рассмотренной задачи заключается в преобразовании постановки обратной задачи методом сопряженного оператора [5]. В работе А.Ф.Верлань, В.С.Сизикова [6] изложены методы численного решения широкого класса интегральных уравнений. В этой работе из-за ограниченности вычислительных ресурсов, многомерные матрицы приводятся к одномерным.

В статье Di Yuan, Xinming Zhang [7] сделан обзор численных методов интегрального уравнения Фредгольма I рода которая описывает многие задачи инженерных технологий. В этой статье [7] подробно представлены различные численные методы решения интегральных уравнений. Исследованы вопросы существования, устойчивости и сходимости решения интегрального уравнения. Авторы статьи условно делят все численные методы на три группы такие как, регуляризация, вейвлет-анализа и методы многоуровневых итераций.

В работе H.Hosseinzadeh, M.Deaghan, Z.Sedaghatjoo [8] рассмотрены вопросы устойчивости численного решения интегрального уравнения Фредгольма I рода с радиальными ядрами. Подробный интерполяцией математически доказано, что интегральные операторы имеющие радиальные ядра с положительным преобразованием Фурье строго положительно определены. Явно определена нижняя оценка собственных значений этого интегрального оператора.

В статье K.Maleknejad, E.Saediroom [9] предлагается прямой метод численного решения уравнения Фредгольма первого рода основанный на гибридных блочно-импульсных функциях и полиномах Лежандра. Эти гибридные базисные функции являются ортогональными и имеет компактный носитель. Получена оценка погрешности и показана сходимость предложенного метода в L_2 .

В работе M.Bahmanpour, M.T.Kajani, M.Maleki [10] предложен многоуровневый итерационный метод с использованием полинома Müntz-Лежандра.

Подход Mohsen Didgar и других авторов [11] основан на использовании разложения неизвестной функций в ряд Тейлора ν -ой степени в произвольной точке и интегрирования. При этом интегральные уравнение I рода преобразуется в систему линейных дифференциальных уравнений размерности $(\nu+1)$. Приведены результаты сравнительного анализа между различными вейвлет методами

Следующим математическим методом, используемым при создании модуля геоинформационной системы является известный метод разведочной геофизики и физики Земли МТЗ [12].

Далее разработан метод численного решения и комплекс прикладных программ для двумерного уравнения Фредгольма первого рода [13,14]. Научных работ посвященных численному решению двумерных уравнений Фредгольма первого рода не так много, а интегральные уравнения второго рода изучаются довольно успешно.

Из приведенных математических моделей более подробно рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$A[x, y] = \int_a^b K(x, s)u(s)ds = f(x), \quad x \in [c, d], \quad (1)$$

Пусть $K(x, s)$ есть вещественная непрерывная функция в области $D = \{a \leq s \leq b; c \leq x \leq d\}$, $f(x) \in L_2[c, d]$, $y(s) \in W_2^1[a, b]$.

1⁰. Рассмотрим интегральное уравнение (1) при $a = c, b = d$ и $K(x, s) = K(s, x)$. В этом случае интегральные уравнения

$$A^*[x, v_k] = \int_a^b K(s, x)v_k(s)ds = \alpha_k(x), \quad x \in [a, b], k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

с заданными правыми частями являются сопряженными к уравнению (1).

Уравнение (1) умножим скалярно на $v_k(x)$, а уравнение (2) на $y(x)$ и отнимем из первого уравнение второе [4]

$$\int_a^b v_k(s) \left[\int_a^b K(x, s)y(s)ds \right] dx - \int_a^b y(x) \left[\int_a^b K(s, x)v_k(s)ds \right] = \int_a^b f(x)v_k(x)dx - \int_a^b \alpha_k(x)y(x)dx. \quad (3)$$

Согласно тождеству Лагранжа левая часть (3) равна нулю, поэтому имеем

$$\int_a^b f(x)v_k(x)dx - \int_a^b \alpha_k(x)y(x)dx = 0. \quad (4)$$

Пусть $\alpha_k(x)$ - базисные функции на отрезке $[a, b]$ и

$$(\alpha_i(x), \alpha_j(x)) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Решение уравнения (1) можно представить в виде

$$y(x) = \sum_{k=1}^N y_k \alpha_k(x) \quad (5)$$

Тогда подставляя (5) в (4) имеем

$$y_k = \int_a^b f(x) \alpha_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

Таким образом, решение задачи (1) разбивается на два этапа:

1. решение уравнений (2) и нахождения $\alpha_k(x)$ методом, предложенным и реализованном в [14];
2. вычисление коэффициентов Фурье по формуле (6) и вычисление суммы (5).

Тестирование предлагаемого подхода проведено при следующих входных данных. Ядро интегрального уравнения выбиралось равным

$$K(x, s) = \frac{1}{x^2 + s^2}, \quad (7)$$

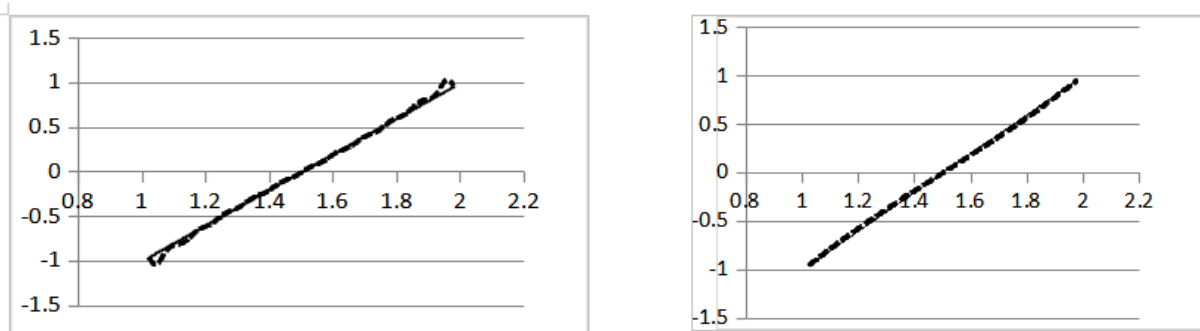
а правая часть

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \ln \frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} - \frac{b+a}{b-a} \frac{1}{x} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{x} - \operatorname{arctg} \frac{a}{x} \right). \quad (8)$$

При этом точное решение имеет вид

$$u(x) = \frac{2x - (b+a)}{b-a}. \quad (9)$$

и $a = -1, b = 1$. Пример взят из [1]. Видно, что функция не удовлетворяет условию $u(a) = u(b) = 0$, и разлагается в ряд по функциям $\alpha_k(x)$. Результаты численных расчетов для (1)-(3) приведены на рисунке 2.



а) $M = 60$

б) $M = 1000$

Рисунок 2. Точное (непрерывная линия) и приближенное решение (прерывистая линия) для $M = 60, M = 1000$

Для численного решения задач (2) используется регуляризирующий метод Лаврентьева [14]. При тестировании предлагаемого подхода регуляризирующий параметр выбирался равным $\mu = 0.004$,

$\alpha_k(x) = \sin \frac{\pi k(2x - (b+a))}{b-a}$, $k = 1, 2, \dots, n$, максимальное количество узлов сетки равнялось 1000,

количество базисных функции $n = 50$, решение вычислялось с точностью до 10^{-4} , для чего требовалось от 90 до 100 тыс. итераций. Абсолютная ошибка между точным и посчитанным решениями не превышала 0.03, относительная – 3%.

2⁰. Рассмотрим более общий случай численного решения уравнения (1). В этом случае отрезок $[a, b]$ не обязательно совпадает с $[c, d]$, ядро $K(x, s)$ - не симметричная функция. Пусть вместо точных $f(x)$ и $K(x, s)$ известны их приближенные значения $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{K}(x, s)$ такие, что [1]

$$\|\tilde{f}(x) - f(x)\|_{L_2} \leq \delta \quad (10)$$

$$\|\tilde{K}(x, s) - K(x, s)\| \leq \xi \quad (11)$$

Введем в рассмотрение сглаживающий функционал А.Н. Тихонова [1].

$$\Phi_\alpha[y, \tilde{f}] = \int_c^d \{\tilde{A}[x, y] - \tilde{f}\}^2 dx + \alpha \Omega[y] \quad (12)$$

Где стабилизирующий функционал имеет вид [1]

$$\Omega[y] = \int_a^b \{y^2(s) + q[y'(s)]\}^2 ds \quad (13)$$

а $\alpha > 0$ - параметр регуляризации, причем в (12) в

$$\tilde{A}[x, y] = \int_a^b \tilde{K}(x, s)y(s)ds, \quad c \leq x < d \quad (14)$$

Будем искать элемент y_α , на котором функционал (12) имеет минимальное значение

$$\Phi_\alpha[y_\alpha, \tilde{f}] = \inf_{y \in Y} \Phi_\alpha[y, \tilde{f}]. \quad (15)$$

Задача минимизации (12) решается численно, используя численные методы минимизации. Как известно это приводит к следующему уравнению Эйлера

$$\alpha[y_\alpha(t) - qy_\alpha''(t)] + \int_a^b T(t, s)y_\alpha(s)ds = F(t), \quad a \leq t \leq b. \quad (16)$$

где

$$T(t, s) = T(s, t) = \int_c^d \tilde{K}(x, t)\tilde{K}(x, s)dx, \quad (17)$$

$$F(t) = \int_c^d \tilde{K}(x, t)\tilde{f}(x)dx. \quad (18)$$

Краевые условия при $s = a - h_s$ и $s = b + h_s$

$$y_\alpha(a - h_s) = y_0 \text{ и } y_\alpha(b + h_s) = y_{n+1} \quad (19)$$

считаем заданными, где h_s - шаг сетки по s .

Наиболее эффективным способом решения уравнения (16) является метод конечных сумм и конечных разностей.

Введем неравномерные x, s - сетки

$$c = x_1 < x_2 \dots < x_l = d, \quad (20)$$

$$a = s_1 < s_2 \dots < s_n = b, \quad (21)$$

$$t = s.$$

Получим следующий дискретный аналог (16) (опускаем временно индекс α, y)

$$\begin{aligned} \alpha \left\{ y_1 - \frac{q}{h_1 h_2} y_2 + \frac{q}{h_1} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) y_1 \right\} + \sum_{j=1}^n r_j \sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}_{il} \tilde{K}_{ij} y_j = \sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}_{il} \tilde{f}_i + \frac{\alpha q y_0}{h_1 h_1}, k=1, \\ \alpha \left\{ y_k - \frac{q}{r_k} \left[\frac{y_{k-1}}{h_k} - \left(\frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}} \right) y_k + \frac{y_{k+1}}{h_{k+1}} \right] \right\} + \\ + \sum_{j=1}^n r_j \sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}_{ik} \tilde{K}_{ij} y_j = \sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}_{ik} \tilde{f}_i, k = \overline{2, n-1} \\ \alpha \left\{ y_n - \frac{q}{h_n} \left[\frac{y_{n-1}}{h_n} - \left(\frac{1}{h_n} + \frac{1}{h_{n+1}} \right) y_n + \frac{y_{n+1}}{h_{n+1}} \right] \right\} + \sum_{j=1}^n r_j \sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}_{in} \tilde{K}_{ij} y_j = \sum_{i=1}^l p_i \tilde{K}_{in} \tilde{f}_i + \frac{\alpha q y_{n+1}}{h_n h_{n+1}}, k = n, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} h_j = s_j - s_{j-1} = t_j - t_{j-1}, j = \overline{1, n+1}, \\ \tilde{h}_1 = \frac{s_2 - s_1}{2} = \frac{h_2}{2}, \tilde{h}_j = \frac{s_{j+1} - s_{j-1}}{2} = \frac{h_j + h_{j+1}}{2}, j = \overline{2, n-1}, \tilde{h}_n = \frac{s_n - s_{n-1}}{2} = \frac{h_n}{2}, \\ p_1 = \frac{x_2 - x_1}{2}, p_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}, i = \overline{2, l-1}, p_l = \frac{x_l - x_{l-1}}{2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для сохранения свойств симметричности и положительной определенности системы линейных уравнений относительно $y_j, j = \overline{1, n}$ умножим k -ое уравнение (22) на \tilde{h}_k / ρ , где

$$\rho = \frac{2\tilde{h}_1 + \sum_{j=2}^{n-1} \tilde{h}_j + 2\tilde{h}_n}{n} \quad (24)$$

Получим

$$A_\alpha y_\alpha = F \quad (25)$$

где

$$A_\alpha = \alpha C + G, A_\alpha = A_\alpha^* > 0, \quad (26)$$

где

$$G_{kj} = G_{jk} = \sum_{i=1}^l \frac{p_i}{\rho} z_{ik} z_{ij}, k, j = \overline{1, n}, \quad (27)$$

$$F_k = \sum_{i=1}^l \frac{p_i}{\rho} z_{ik} \tilde{f}_i, k = \overline{2, n-1}, \quad (28)$$

$$F_1 = \sum_{i=1}^l \frac{p_i}{\rho} z_{i1} \tilde{f}_i + \frac{\alpha q y_0}{h_1 \rho}, F_n = \sum_{i=1}^l \frac{p_i}{\rho} z_{in} \tilde{f}_i + \frac{\alpha q y_{n+1}}{h_{n+1} \rho}, \quad (29)$$

$$z_{ij} = \hbar_j \tilde{K}_{ij}, i = \overline{1, l}, j = \overline{1, n}, \quad (30)$$

$$C_{11} = \left(1 + \frac{q}{\hbar_1} \left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_2}\right)\right) \frac{\hbar_1}{\rho}, \quad C_{kk} = \left[1 + \frac{q}{\hbar_k} \left(\frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}}\right)\right] \frac{\hbar_k}{\rho}, k = \overline{2, n-1}, \quad (31)$$

$$C_{nn} = \left(1 + \frac{q}{\hbar_n} \left(\frac{1}{h_n} + \frac{1}{h_{n+1}}\right)\right) \frac{\hbar_n}{\rho},$$

$$C_{k,k+1} = -\frac{q}{h_{k+1}\rho}, k = \overline{1, n-1}, \quad C_{k,k-1} = -\frac{q}{h_k\rho}, k = \overline{2, n}, \quad (32)$$

остальные элементы $C_{kj} = 0$ (C - трехдиагональная квадратная матрица).

Систему линейных алгебраических уравнений (25) с матрицей и правой частью (27) – (32) можно решать прямым и итерационными методами. В данной работе используется метод Холецкого. Была составлена программа для численного решения с применением обобщенного принципа невязки выбора α . Программа выполняется в два этапа [6]. На первом этапе для последовательности значений α изменяющимся как убывающая геометрическая прогрессия [6]

$$\alpha_1 > 0, \alpha_i = \theta\alpha_{i-1}, i = 2, 3, \dots, m, 0 < \theta < 1 \quad (33)$$

$$\beta(\alpha_i) = \sum_{k=1}^l p_k \left[\sum_{j=1}^n z_{kj}(y_{\alpha_i})_j - \tilde{f}_k \right]^2 \quad (34)$$

$$\|y_{\alpha_i}\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \hbar_j (y_{\alpha_i})_j^2}. \quad (35)$$

На первом этапе определяется α_F как минимальное значение α_i из условий [6]

$$\alpha_F = \min\{\alpha_i : \beta(\alpha_i) \leq \beta(\alpha_{i-1}), \|y_{\alpha_i}\| \geq \|y_{\alpha_{i-1}}\|_{L_2}, \forall \xi \neq 0\}. \quad (36)$$

и находится $\mu = \beta(\alpha_F)$.

При этом

$$\alpha_1 \geq \alpha_F \geq \alpha_p \geq \alpha_m \quad (37)$$

где α_p - минимальное значение α_i , при котором еще находится решение СЛАУ (25) [6].

На втором этапе, из последовательности параметров α определенные по закону (33) находится значение α_d из условия [6]

$$|\aleph(\alpha_d)| = \min_{\alpha_i \in \{\alpha_F, \alpha_1\}} |\aleph(\alpha_i)|, \quad (38)$$

где

$$\aleph(\alpha_i) = \beta(\alpha_i) - \left(\delta + \xi \|y_{\alpha_i}\|\right)^2 - \mu. \quad (39)$$

Затем решается система (25) с параметром α_d и находится решение $y_{\alpha_d}(s)$.

Для тестирования программы выбран пример с ядром

$$K(x, s) = x^2 + s$$

правой частью $f(x) = 2 + 3x^2$, точное решение

$$y(s) = 1 + 6s^2.$$

Для численного расчета были выбраны следующие параметры

$$n = 50, l = 50, a = 0, b = 1, c = 0, d = 1, \xi = 0 \div 10^{-6}, \delta_f = 0 \cdot 10^{-6}, \alpha_1 = 4, \alpha_m = 4 \cdot 10^{-4}, \theta = 10^{-\frac{4}{9}}.$$

При этом $m = 10, \alpha_m = 4 \cdot 10^{-4}$. Параметр $\aleph(\alpha_i)$ меняется от $\aleph(\alpha_1) = 0.429208$ до $\aleph(\alpha_8) = 0.004837$ и $\aleph(\alpha_9) = -0.29 \cdot 10^{-10}$. Поэтому $\alpha_d = 0.00111302, \sqrt{\beta_{\alpha_d}} = 0.02208, \sqrt{\beta_{\alpha_d}} / \|\tilde{f}\|_{L_2} = 0.00705, \mu = 0.00048774, \|y_{\alpha_d}\|_{L_2} = 3.56539, \Phi_{\alpha_d}[y_{\alpha_d}, \tilde{f}] = 0.01464$.

Результаты приближенного и точного решения показаны в виде графика на рисунке 3. Приведены результаты многочисленных методических расчетов для различных функции α в диапазоне от 0.0008 до 0.01. Из рисунка 3 видно, что при увеличении параметра регуляризации α , то есть при $\alpha = 0.05$ численное решение наилучшим образом приближается к точному.

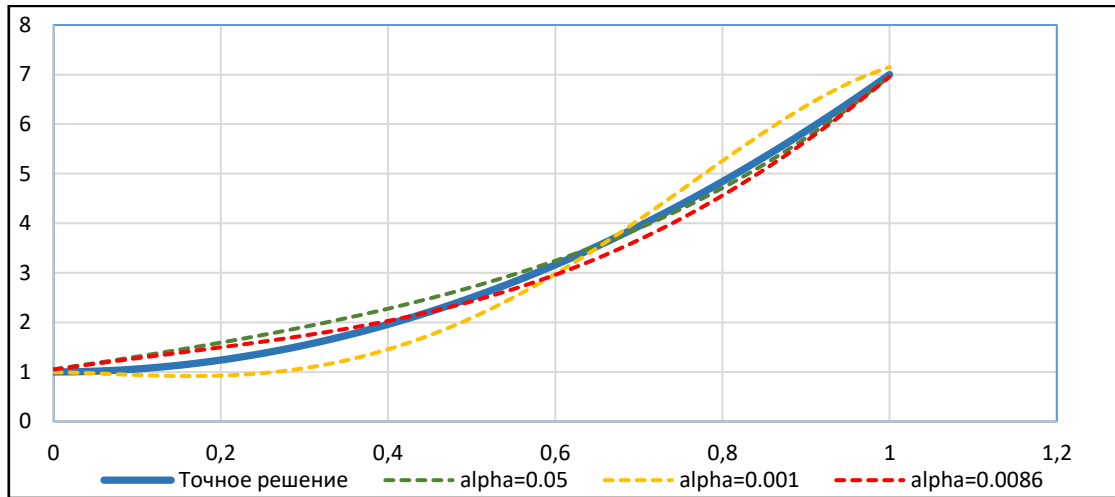


Рисунок 3. Точное и приближенные решения задачи при различных параметрах регуляризации

3⁰. Алгоритм решения двумерных уравнений Фредгольма первого рода. Рассмотрим двумерное интегральное уравнение

$$A(x, y, V) = \int_a^b \int_c^d K_z(x, y, \xi, t) V(\xi, t) d\eta = U(x, y), \quad (40)$$

$$\bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \bar{c} \leq y \leq \bar{d}.$$

Предположим, что в место точных $U(x, y)$ и $K(x, y, s, t)$ известны их приближенные значения $\tilde{U}(x, y)$ и $\tilde{K}(x, y, s, t)$ такие, что [6]

$$\|\tilde{U}(x, y) - U(x, y)\|_{L_2} \leq \delta, \quad (41)$$

$$\|\tilde{K}(x, y, s, t) - K(x, y, s, t)\| \leq \xi. \quad (42)$$

Введем сглаживающий функционал [6]

$$\Phi_{\alpha}[V, \tilde{U}] = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \int_{\bar{c}}^{\bar{d}} [\tilde{A}(x, y, V) - \tilde{U}(x, y)]^2 dx dy + \alpha \int_a^b \int_c^d \left[\left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)^2 + p(s, t) \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right] ds dt, \quad p(s, t) \geq 0 \quad (43)$$

причем

$$\tilde{A}(x, y, V) = \int_a^b \int_c^d \tilde{K}(x, y, s, t) V(s, t) dt, \quad (x, y) \in D_2.$$

$$\Phi_{\alpha}[V_{\alpha}, \tilde{U}] = \inf_{V \in W_2^1(D_1)} \Phi_{\alpha}[V, \tilde{U}]. \quad (44)$$

(43), (44) имеет вид

$$-\alpha \left(\frac{\partial^2 V(s, t)}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(p(s, t) \frac{\partial V(s, t)}{\partial t} \right) \right) + \int_a^b \int_c^d T(\xi, \eta, s, t) V(\xi, \eta) d\xi d\eta = b(s, t). \quad (45)$$

где

$$T(\xi, \eta, s, t) = \iint_{D_2} K(x, y, \xi, \eta) K(x, y, s, t) dx dy, \quad (46)$$

$$b(s, t) = \iint_{D_2} U(x, y) K(x, y, s, t) dx dy, \quad (47)$$

Производные от решения заменяются конечными разностями.

Для построения дискретного аналога (45) введем неравномерную сетку

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n \leq b, \quad (48)$$

$$c \leq y_1 < y_2 < \dots < y_i < \dots < y_n \leq d. \quad (49)$$

Сетки узлов по s и t сделаем совпадающими с сетками (48) и (49) соответственно, т.е.

$$s_i = x_i, t_j = y_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$$

где n - число узлов по x (или s), а m - число узлов по y (или t).

В результате метод кубатур сведется к решению следующей СЛАУ с четырехмерной матрицей и двухмерной правой частью [6]

$$\alpha \left(V_{\overline{s}, \overline{i}, \overline{j}} + \left(p_{ij} V_{t, ij} \right)_{\overline{i}} \right) - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m T_{ijkl} V_{kl} \hbar_{x,k} \hbar_{y,l} = -b_{ij}, i = \overline{2, n-1}, j = \overline{2, m-1} \quad (50)$$

где

$$T_{ijkl} = \sum_{i_v=1}^n \sum_{j_v=1}^m K(x_{i_v}, y_{j_v}, \xi_k, \eta_l) K(x_{i_v}, y_{j_v}, s_i, t_j) \hbar_{x, i_v} \hbar_{y, j_v}, \quad (51)$$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m U(x_k, y_l) K(x_k, y_l, s_i, t_j) \hbar_{x,k} \hbar_{y,l}, \quad (52)$$

$$V_{ij} = V(s_i, t_j), \quad (53)$$

$$\hbar_{x,i} = (x_{i+1} - x_{i-1})/2 \quad \text{при } 2 < i < n, \hbar_{y,j} = (y_{j+1} - y_{j-1})/2 \quad \text{при } 2 < j < m. \quad (54)$$

Далее группируя коэффициенты решения в узлах $(i-1, j)$, (i, j) , $(i+1, j)$, $(i, j-1)$, $(i, j+1)$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{t_{x,i}^2} V_{i+1,j} - \left(\frac{2\alpha}{\hbar_{x,i}^2} + \frac{\alpha p_{ij+1/2}}{\hbar_{y,j}^2} + \frac{\alpha p_{ij-1/2}}{\hbar_{y,j}^2} \right) V_{ij} + \frac{\alpha}{\hbar_{x,i}^2} V_{i-1,j} + \\ & + \frac{\alpha p_{ij+1/2}}{\hbar_{y,j}^2} V_{ij+1} + \frac{\alpha p_{ij-1/2}}{\hbar_{y,j}^2} V_{ij-1} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m T_{ijkl} V_{kl} \hbar_{x,k} \hbar_{y,l} = -b_{ij}, \quad (55) \\ & i = \overline{2, n-1}, \quad j = \overline{2, m-1}. \end{aligned}$$

Система уравнений (55) решается итерационными методами.

Для проведения методических расчетов по предложенному алгоритму решения двумерных уравнений Фредгольма первого рода рассмотрим следующий пример [13]

$$K(x, y, s, t) = \frac{x}{(8+y)(1+s+t)}, \quad f(x, y) = \frac{x}{6(8+y)}, \quad a = 0, b = 1, c = 0, d = 1. \quad (56)$$

Двумерное интегральное уравнение с ядром и правой частью определенной в виде (56) имеет точное решение $V(s, t) = \frac{1}{(1+s+t)^2}$.

Для численного расчета двумерного уравнения Фредгольма первого рода были выбраны следующие параметры $\alpha = 0.000001$, $\varepsilon = 0.0000001$, $\delta = 10^{-7}$, $\xi = 10^{-7}$. В результате численного решения предложенным алгоритмом, получены следующие параметры $\beta = 0.000112$, $\mu = 0.000112$, $\gamma = 0.1159332$, $\zeta = 0.0001112$, $\varkappa = 0.000112$.

Количество итерации равна 943.

Результаты расчетов предложенного выше примера приведены в виде графиков (рисунок 4).

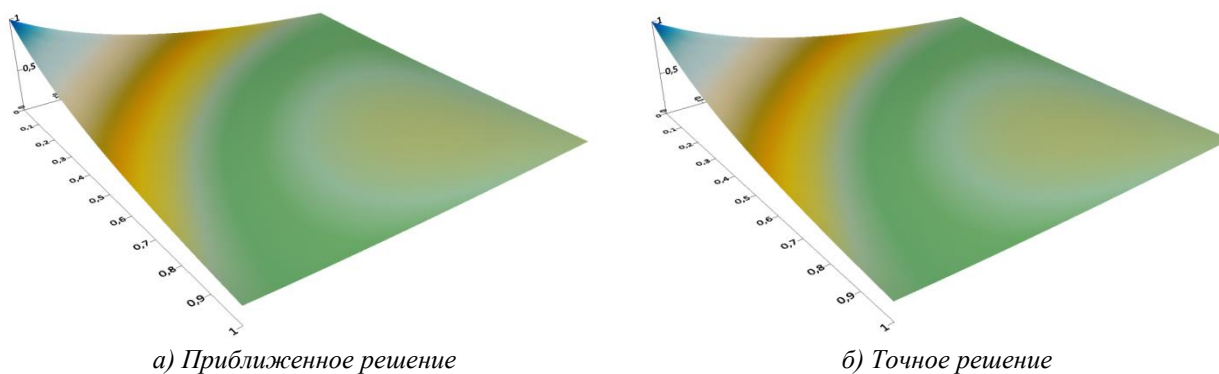


Рисунок 4. Приближенное и точное решения при $n = 20$, $m = 20$.

Была проведена обработка и анализ числовых данных вышеизложенными математическими методами и комплексом прикладных программ.

Данные получены в инженерной лаборатории при проведении аналитических исследований ИСР-MS спектроскопии, 777 отобранных проб на 70 химических элементах месторождений полезных ископаемых Рудного Алтая и Калбы [4,15]. Цифровая поверхность, построенная графическим редактором Surfer, показывает характер распределения аномалий Li на поверхности по данным, которые были собраны на рисунке 5 [4].

На рисунке 6 построена цифровая поверхность графическим редактором Surfer характера распределения аномалий Li на глубине по данным, которые были получены предложенными выше численными методами и комплексом прикладных программ [4,15].

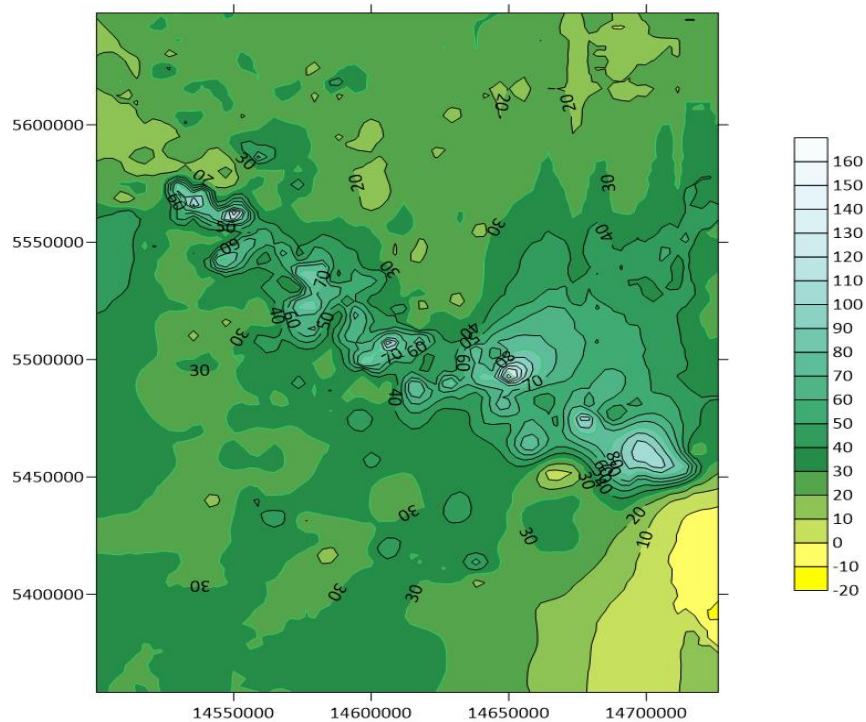


Рисунок 5. Характер распределения аномалий Li на дневной поверхности, полученный с помощью графического редактора Surfer

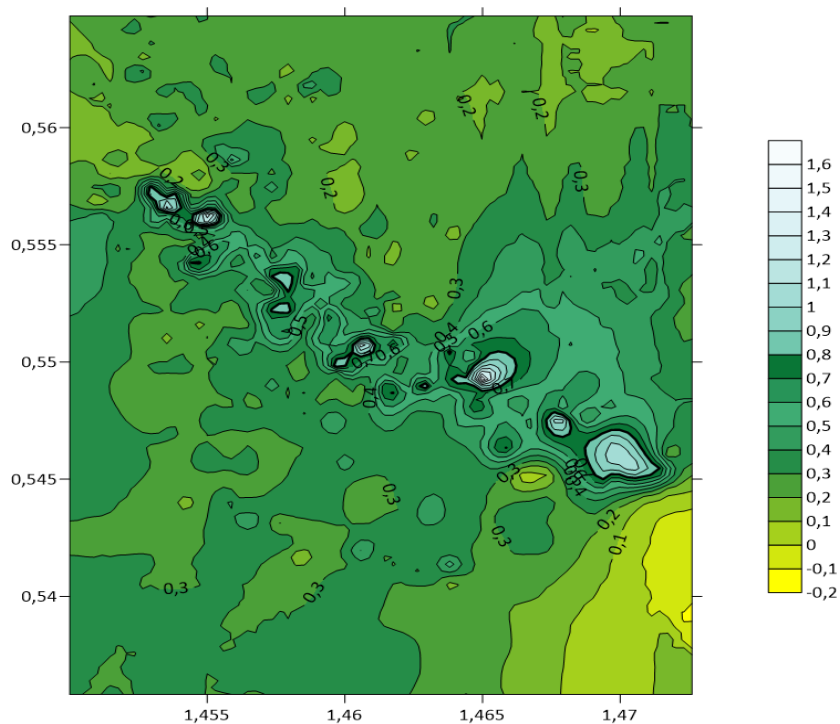


Рисунок 6. Характер распределения аномалий Li на глубине численно реализованный предложенными методами, полученный с помощью графического редактора Surfer

Были использованы реальные данные бурения Калбы-Нарымской зоны [15] для сравнения результатов численных расчетов. В таблице 1 приведены результаты аномальных точек распределения Li на поверхности и на глубине 300 метров [4,15].

Таблица 1. Концентрация Li

№	Проба	Концентрация на поверхности	Концентрация на глубине 300 метров	Результат численных расчетов для глубины 300 метров
1	G-71	105.8	107.7	110.2
2	G-115	132.7	128.4	130.3
3	G-169	126.6	127.8	130.4
4	G-181	133	131.5	130.8
5	G-185	141	142.3	140.7
6	G-498	104.1	107.6	110.3
7	Q-498	156.975	158.5	160.1
8	G-173	122.2	119.3	120.4

Результаты сравнений концентраций показали следующий результат: расхождение рассчитанных данных с данными проб из скважин составило 2 - 4 %.

Заклучение

Разработанные методы численной реализации обратных задач математической геофизики и геохимии показали удовлетворительную точность на тестовых примерах.

При численных расчетах используется повышение точности приближенных решений на последовательности сеток. Применение такого подхода позволяет использовать в расчетах только известные квадратурные и кубатурные формулы. Такой статистический анализ количества узлов сетки позволяет получить приближенное решение с требуемой точностью.

Разработанный модуль в виде комплекса прикладных программ был использован для цифрового моделирования конкретного месторождения для выявления скрытых рудных объектов. Все численные расчеты проводились на 2х – процессорном стоечном сервере 1U 2xS 8xDDR4 4x3.5/CPU 2xCLX 4214R/DDR4 2x16GB 2933MHZ/Net 2xSFP 10Gb, который удаленно обслуживается в дата центре ТОО «Академсет».

Благодарности. Работа выполнена при поддержке грантового финансирования Министерства образования и науки Республики Казахстан (ИРН AP08856012 «Разработка модуля геоинформационной системы, основанного на методах интеллектуального выявления аномалий, для глубинных изысканий месторождений», 2020-2022 гг.).

Список использованной литературы:

- 1 Тихонов А.Н. Математическая геофизика. /А.Н.Тихонов. - Москва: ОИФЗ РАН, 1999.- 476 с.
- 2 Шокин Ю.И., Потапов В.П. ГИС сегодня: состояние, перспективы, решения // Вычислительные технологии, 2015, Т.20, №5, с. 175-213.
- 3 Di Yuan, Shuwei Lu, Donghoo, Xinming Zhang. Graph refining via iterative regularization framework.// SN Applied Sciences.2019. A springer nature journal. 1:387. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-0412-9>
- 4 Temirbekova L.N. Processing of big data in the detection of geochemical anomalies of rare-earth metal deposits// AIP Conference Proceeding. – 2018. – Vol. 1997, № 020072.
- 5 Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и их применения//Тр. ИММ УрО РАН, 2006, Т.12, №1, с. 184-195.
- 6 Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие/ А.Ф. Верлань, В.С.Сизиков. -. Киев. Наукова Думка, 1986. - 537 с.
- 7 Di Yuan, Xinming Zhang. An overview of numerical methods for the first kind Fredholm integral equation. // SN Applied Sciences (2019), 1:1178. A Springer nature journal. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1228-3>
- 8 Hossein Hosseinzadeh, Mehdi Dehghan, Zeynab Sedaghatjoo. The stability study of numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind with emphasis on its application in boundary elements method. // Applied Numerical Mathematics 158 (2020), P.134-151. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.07.011>
- 9 Maleknejad K., Saeedipoor E. An efficient based on hybrid functions for Fredholm integral equation of the first kind with convergence analysis. // Applied Mathematics and Computation 304 (2017), P. 93-102. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2017.01.013>
- 10 Bahmanpour M., Kajani M.T., Maleki M. Solving Fredholm integral equations of the first kind using Muntz wavelets. // Applied Numerical Mathematics 143 (2019), P.159-171. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.04.007>
- 11 Mohsen Didgar, Alireza Vahidi, Jafar Biazar. Application of Taylor Expansion for Fredholm Integral Equations

of the First Kind// *Journal of Mathematics*, Vol.51(5), 2019, P.1-14.

12 Дмитриев В.И. О двумерной обратной задаче магнитотеллурического зондирования неоднородной среды// *Прикладная математика и информатика*, 2017. Т. 56, с.5-17.

13 Yanying Ma, Jin Huang, and Hu Li. A novel numerical method of two-dimensional Fredholm integral equations of the second kind// *Mathematical problems in engineering*, Volume 2015, ID 624013, 9 p.

14 Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Theory and numerical methods for solving inverse and ill-posed problems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. Vol. 27, No. 3. 2019. P. 453-456. <https://doi.org/10.1515/jiip-2019-5001>

15 Дьячков Б.А., Гавриленко О.Д., Бубняк А.Н. Современное состояние и проблемы регионального геологического изучения территории Восточного Казахстана // *Геология и охрана недр*. – 2017.- №3(64). - с. 31- 37. ISSN-2414-4282.

References:

1 Tihonov A.N. (1999) *Matematicheskaja geofizika [Mathematical Geophysics]*. Moskva: OIFZ RAN, 476. (In Russian)

2 Shokin Ju.I., Potapov V.P. (2015) *GIS segodnja: sostojanie, perspektivy, reshenija [GIS today: state, prospects, solutions]*. *Vychislitel'nye tehnologii*, T.20, №5, 175-213. (In Russian)

3 Di Yuan, Shuwei Lu, Donghoo, Xinming Zhang. (2019) Graph refining via iterative regularization framework. *SN Applied Sciences*. A springer nature journal. 1:387. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-0412-9>

4 Temirbekova L.N. (2018) Processing of big data in the detection of geochemical anomalies of rare-earth metal deposits// *AIP Conference Proceeding*. Vol. 1997, № 020072.

5 Marchuk G.I. (2006) *Sopryazhennye uravnenija i ih primenenija [Conjugate Equations and Their Applications]*. Tr. IMM UrO RAN, T.12, №1, 184-195. (In Russian)

6 Verlan' A.F., Sizikov V.S. (1986) *Integral'nye uravnenija: metody, algoritmy, programmy [Integral equations: methods, algorithms, programs]*. *Spravochnoe posobie*. Kiev. Naukova Dumka, 537. (In Russian)

7 Di Yuan, Xinming Zhang. An overview of numerical methods for the first kind Fredholm integral equation. *SN Applied Sciences* (2019), 1:1178. A Springer nature journal. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1228-3>

8 Hossein Hosseinzadeh, Mehdi Dehghan, Zeynab Sedaghatjoo. The stability study of numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind with emphasis on its application in boundary elements method. *Applied Numerical Mathematics* 158 (2020), P.134-151. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.07.011>

9 Maleknejad K., Saeedipoor E. (2017) An efficient based on hybrid functions for Fredholm integral equation of the first kind with convergence analysis. *Applied Mathematics and Computation* 304. 93-102. <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2017.01.013>

10 Bahmanpour M., Kajani M.T., Maleki M. (2019) Solving Fredholm integral equations of the first kind using Muntz wavelets. // *Applied Numerical Mathematics* 143. 159-171. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.04.007>

11 Mohsen Didgar, Alireza Vahidi, Jafar Biazar (2019) Application of Taylor Expansion for Fredholm Integral Equations of the First Kind// *Journal of Mathematics*, Vol.51(5), 1-14.

12 Dmitriev V.I. (2017) О двумерной обратной задаче магнитотеллурического зондирования неоднородной среды [On a two-dimensional inverse problem of magnetotelluric sounding of an inhomogeneous medium]. *Prikladnaja matematika i informatika*, T. 56, 5-17. (In Russian)

13 Yanying Ma, Jin Huang, and Hu Li. (2015) A novel numerical method of two-dimensional Fredholm integral equations of the second kind// *Mathematical problems in engineering*, Volume, ID 624013, 9.

14 Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. (2019) Theory and numerical methods for solving inverse and ill-posed problems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. Vol. 27, No. 3. 453-456. <https://doi.org/10.1515/jiip-2019-5001>

15 Д'ячков Б.А., Гавриленко О.Д., Бубняк А.Н. (2017) Современное состояние и проблемы регионального геологического изучения территории Восточного Казахстана [Current state and problems of regional geological study of the territory of East Kazakhstan]. *Геология и охрана недр*. №3(64), 31- 37. ISSN-2414-4282.