

МРНТИ 30.15.27  
УДК 531+539.376

<https://doi.org/10.51889/2021-3.1728-7901.06>

К. Бисембаев<sup>1</sup>, А. Сманов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ө.А. Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты, Алматы қ., Қазақстан

<sup>2</sup> Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

\*e-mail: [kuat\\_06@mail.ru](mailto:kuat_06@mail.ru)

## ДІРІЛТІРЕККЕ ОРНАТЫЛҒАН КӨЛДЕНЕҢ ҚИМАСЫ АЙНЫМАЛЫ СЕРПІМДІ ҚҰРЫЛҒЫНЫҢ ПАРАМЕТРЛІК ИЛУТЕРБЕЛІСІ

*Аңдатпа*

Құрылыс ғимараттарының сейсмөтәзімділігін және массивті денелердің дірілқшаулауын қамтамасыз ету проблемасы бойынша практикалық іске асқан бірқатар техникалық шешімдерді моделдейтін түзетілетін беттермен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғының параметрлік тербелісі зерттеледі. Жоғары дәрежелі айналу беттерімен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғының қозғалыс теңдеуі алынды. Ритц әдісі арқылы дірілтірекке орнатылған көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғының параметрлік тербелмелі қозғалысының резонанстық режимдері зерттелді. Дірілден қорғайтын қондырғының табанының тербелмелі қозғалысының резонанстық зонасында серпімді құрылғы аз ығысу жасайды, ал серпімді құрылғының меншікті жиелігі тербелісті қоздырушының жиелігімен сәйкес келгенде резонанс құбылысы пайда болады. Параметрлік қоздырушының амплитудасы артқан сайын серпімді құрылғының иілімелі тербелісінің резонанстық зонасы кеңейеді. Серпімді құрылғының параметрлік тербелістің амплитуда-жиеліктік сипаттамасы, құрылғының параметрлеріне тәуелді болады. Серпімді құрылғының табанының параметрлерін арттырғанда, резонанстық қисық, тербелісті қоздырушы жиелігінің өсу жағына қарай ығысады.

**Түйін сөздер:** дірілденқорғау, дірілтірек, Ритц әдісі, меншікті форма, көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғы, параметрлік тербеліс.

*Аннотация*

К. Бисембаев<sup>1</sup>, А. Сманов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт механики и машиноведения им. акад. У.А.Джолдасбекова, г. Алматы, Қазақстан

<sup>2</sup> Казахский Национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Қазақстан

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ СЕЧЕНИЯМИ НА ВИБРООПОРАХ

Статья посвящена исследованию колебательного движения упругой конструкции с переменными сечениями на опорах качения со спрямленными поверхностями, моделирующей ряд технических решений, получившей свое практическое воплощение в проблеме обеспечения сейсмостойкости строительных сооружений и виброизоляции массивных тел. Получены уравнения движения упругой конструкции с переменными сечениями на опорах качения ограниченных поверхностями вращения высокого порядка. Резонансных режимов параметрического колебательного движения упругой конструкции с переменными сечениями исследованы по вариационному методу Ритца. В резонансной зоне колебательных движений основания виброзащитных устройств, перемещение упругой конструкции будет малым, а при совпадении собственных частот упругой конструкции с частотой возмущения появится явление резонанса. С возрастанием амплитуда параметрического возмущения резонансных зон изгибных колебаний упругих конструкций расширяется. Амплитудно-частотные характеристики параметрических колебаний зависят от параметров конструкции. Увеличение параметров основания клиновидных упругих конструкций, приводит к смещению резонансных кривых в сторону возрастания частот возмущения.

**Ключевые слова:** виброзащита, виброопора, метод Ритца, собственные формы, упругие конструкции переменного сечения, параметрическая колебания.

*Abstract*

## PARAMETRIC BENDING VIBRATIONS OF ELASTIC STRUCTURES WITH VARIABLE SECTIONS ON VIBRATION MOUNTINGS

Bisembaev K. <sup>1</sup>, Smanov A. <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institute of mechanics and machine science at Academy named after U. A. Dzholdasbekov

<sup>2</sup> Abai Kazakh National Pedagogical University., Almaty, Kazakhstan

The article is devoted to the study of the oscillatory motion of an elastic structure with variable sections on rolling bearings with straightened surfaces, which simulates a number of technical solutions, which has received its practical

embodiment in the problem of ensuring the seismic resistance of building structures and vibration isolation of massive bodies. Equations of motion of an elastic structure with variable sections on rolling bearings bounded by high-order surfaces of revolution are obtained. The resonant modes of parametric vibrational motion of an elastic structure with variable sections are investigated using the Ritz variational method. In the resonant zone of the oscillatory movements of the base, the movement of the elastic structure will be small, and when the natural frequencies of the elastic structure coincide with the frequency of the disturbance, the phenomenon of resonance will appear. The amplitude of the parametric disturbance of the resonant zones of bending vibrations of elastic structures expands with increasing. The amplitude-frequency characteristics of parametric oscillations depend on the parameters of the structure. An increase in the parameters of the base of wedge-shaped elastic structures leads to a shift of the resonance curves towards an increase in the disturbance frequencies

**Keywords:** vibration protection, vibration support, Ritz method, own shapes, elastic structures of variable cross-section, parametric oscillation.

### Кіріспе

Инженерлік көзқарас тұрғысынан ең қолайлы және перспективалы болатын сейсмикалық оқшаулау құрылғыларының ең жаңа класы - бұл тиімділігі мен техникалық шешімінің қарапайымдылығы бойынша сейсмикалық амортизаторлардың басқа түрлерінен ерекшеленетін тіректік кинематикалық фундаменттер класы болып табылады.

Кинематикалық фундаменттің жұмыс істеу принципі мынадай- фундаментке қатысты ғимараттың қозғалысын қамтамасыз ететін қозғалмалы теңселмелі тіректі, ғимараттың төменгі қабаты мен фундаменттің арасына орналастыру болады.

Кинематикалық фундаменттердің жұмыс істеу принципін тұрғызудың жалпы негізі –бұл қозғалмалы элементтерге сүйеніп қозғалыс жасайтын массасы үлкен қатты денеден (ғимараттан) тұратын тербелетін жүйе болады.

[1] жұмыста тұрғын үйлерге түсірілетін сейсмикалық жүктемені азайтуға арналған және фундаменттің құрамды бөлігі болатын қондырғыларға шолу, классификация және салыстырулар берілген. Бұнда дірілоқшаулау принципін ғимараттарға қолдануды тікелей көшірудің мысалы болатын сейсмооқшаулау қондырғысының екі класын бөліп көрсеткен.

Жанасу нүктесінде түзетілетін, жоғары ретті айналу беттері түрінде жасалған және элементері уақыт бойынша реологиялық деформацияланып, шекті жанасу ауданына ие болатын дірілден қорғайтын теңселмелі тіректердің динамикалық қасиеттерін Бисембаев Қ. [2-5] жұмыстарда зерттеген.

Техникалар мен құрылыстарда қолданылатын көптеген арқалықтар, айнымалы геометриялық және физикалық параметрлермен сипатталады. Әдеттегі жағдайда – бұған конустық арқалық жатады. Сонымен қатар, мысалы температурасы біркелкі таралмайтын арқалық айнымалы физикалық қасиетке ие болады. Айнымалы параметрлердің болуы, осындай арқалықтарға динамикалық талдау жасауды едәуір қиындатады.

Құрылғылардың динамикасын зерттеу қазіргі кезде құрылыс инженерлері үшін маңызды бола бастады, өйткені көп қабатты ғимараттар салыстырмалы түрде икемді болады. Құрылыстағы мұндай тенденция, әдетте, ғимараттардың діріл амплитудасының жоғарылауына әкеледі. Сондықтан, кейбір жағдайларда жобалау сатысында тұрған биік құрылғылардың динамикалық сипаттамаларын есептеу қажет. Консольды көп қабатты үйлердің еркін тербелістеріне талдау жасағанда, оларды бірінші жуықтау ретінде, қимасы айнымалы арқалықтар арқылы модельдеуге болады.

Қарастырылған мәселелердің көпшілігі жіңішкеретін арқалықтардың көлденең тербелістерін зерттеуге қатысты болады. Бұл нәтижелерді келесідей жүйеге келтіруге болады: дөңгелек көлденең қимасы бар немесе қиылған [6-9], бір шеті ұшталған [10] немесе екі шеті ұшталған; тік бұрышты көлденең қимасы бар және ені тұрақты [6, 10], қалыңдығы тұрақты [11] немесе пирамида тәрізді арқалықтар [6-8].

Хайдебрехт [11] тригонометриялық Фурье қатарларын қолдана отырып, жиілік теңдеуінен біртекті емес қарапайым тіректік арқалықтың шамамен табиғи жиіліктері мен діріл режимдерін тапты. Олхоф пен Парбери [12] көлденең қиманың функциясын екі көршілес табиғи жиіліктердің арасындағы айырмашылықты максимизациялау үшін жобалау параметрі ретінде қолданды. Джитгоанкар мен Чехил [13] көлденең қимасы бар, ұзындығы бойынша үзіліссіз немесе үзіліссіз емес арқалықтарды зерттеді. Гупта [14] шекті элементтер әдісі арқылы үшкірленетін арқалықтың меншікті жиіліктері мен тербеліс формасын сандық түрде тапты.

[15] мақалада релаксацияланатын топырақтардағы дөңгелеу үйкелісін ескере отырып, горизонталь сейсмикалық жүктеме әсерінен жоғары ретті айналу беттерімен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған біртекті серпімді құрылғының дірілін бағалау қарастырылған. Түзетілетін беттермен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғының параметрлік тербелісі туралы есептер қызығушылық тудырады.

Бұл мақалада дірілтірекке орнатылған серпімді құрылғының параметрлік тербелісі зерттеледі және көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғының параметрлерінің дірілден қоғау қондырғысының амплитудалық сипаттамасына ықпалын бағалау нәтижелері көрсетілген.

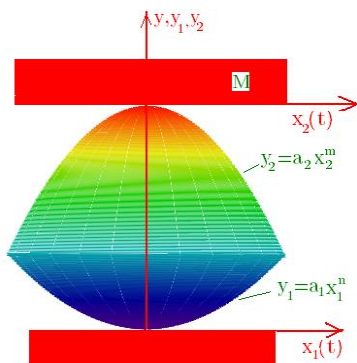
### Мәселенің қойылуы

Кинематикалық іргетастың моделі 1- суретте көрсетілген. Теңселмелі тірек төменнен және жоғарыдан, сәйкес мынадай теңдеулермен сипатталатын беттермен шектелген:

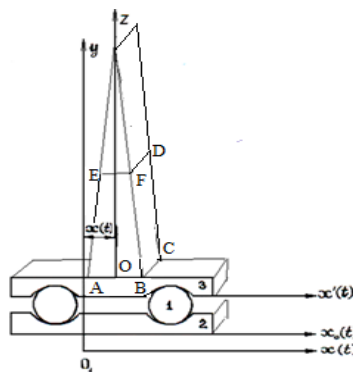
$$y_1 = a_1 x_1^n \text{ и } y_2 = a_2 x_2^m$$

Кинематикалық амортизатордың төменгі және жоғарғы табандарының горизонталь және вертикаль орын ауыстыруын сәйкес  $x_0(t)$  және  $x(t)$  өрнекпен белгілейміз

Теңселмелі тіректен тұратын қозғалмалы табанға орнатылған көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғының жазық тербелісін қарастырамыз (2-сурет),  $H$  – тірек биіктігі.



Сурет 1. Жоғары ретті беттермен шектелген теңселмелі тіректің схемасы



Сурет 2. Қозғалмалы табаны бар сына тәрізді құрылғының схемасы

$xO_1$  у-қозғалмайтын санақ жүйесіне қатысты дірілден қорғайтын дене нүктесінің горизонталь ығысуы  $u(z,t)$  функциясымен, ал жоғарғы табанмен байланысқан қозғалатын санақ жүйесіне қатысты  $u_1(z,t)$  функциясымен сипатталады. Сонда, қозғалмайтын санақ жүйесіне қатысты дірілден қорғалатын дененің әрбір нүктесінің горизонталь ығысуы үшін мына теңдік орындалады

$$u(z,t) = x(t) + u_1(z,t) \quad (1)$$

### Түзетілетін беттермен шектелген дірілтірекке орнатылған көлденең қимасы айнымалы құрылғының параметрлік тербелісі

Төменгі табан вертикаль гармоникалық ығысқан кездегі жоғары ретті айналу беттерімен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғының иілу тербелісін қарастырайық.

$m(z)$  арқылы сырықтың бірлік ұзындығының массасын, через  $EJ$  – арқылы майысу қатандығын,  $E$  – серпімділік модулін,  $J$  – көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғының қиманың тербеліс жазақтығына перпендикуляр инерция моментін белгілейміз.

Жүйенің кинетикалық және потенциалдық энергиясы мынадай түрде болады:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(z) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dz + \frac{1}{2} [M + m(z)l] \dot{x}^2, \quad (2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l m(z) [g + \ddot{y}_0(t)] \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 dz + [M + m(z)l] [g + \ddot{y}_0(t)] \Delta y; \quad (3)$$

мұндағы

$$\Delta y = y(t) - y_0(t) = -\frac{1}{2H} (x - x_0)^2 + \frac{(n-1)}{nH} N_n (x - x_0)^{\frac{n}{n-1}}, \quad N_n = \frac{1}{(nH)^{\frac{1}{n-1}}} \left( \frac{1}{\sqrt[n-1]{a_1}} + \frac{1}{\sqrt[n-1]{a_2}} \right) \quad (4)$$

Көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғы үшін Остроградский-Гамильтон функционалы  $S$  мынадай түрде болады

$$S = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^t \left\{ m(z) \left( \frac{du_1}{dt} \right)^2 + m(z) \dot{x}^2 + \frac{M}{l} \dot{x}^2 - EI \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right)^2 + m(z) [g + \ddot{y}_0(t)] \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2m(z) [g + \ddot{y}_0(t)] \Delta y - \frac{2M}{l} [g + \ddot{y}_0(t)] \Delta y \right\} dz dt \quad (5)$$

Түзетілетін беттермен шектелген діріл тірекке орнатылған көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғының тербелмелі қозғалысын зерттеу үшін Ритц әдісін қолданамыз.

Төменгі табанның гармоникалық вертикаль қозғалған кездегі дененің тербелісін қарастырайық

$$x_0(t) = 0, \quad \ddot{y}_0(t) = B \sin(2pt + \alpha) \quad (6)$$

Гармоникалық тербеліс жағыдайы үшін, периоды  $2\pi/p$  болатын негізгі жиелік құраушысы, бұдан жоғары гармоникалардың үлкен болады деп ұйғарым жасап, жоғарғы табаннан және көлденең қимасы айнымалы құрылғының тербелмелі қозғалысын мынадай қатар түрінде бейнелейміз

$$x(t) = \sum_{k=1}^v A_{2k-1} \sin(2k-1)pt, \quad u_1(z, t) = \sum_{k=1}^v \varphi_{2k-1}(z) \sin(2k-1)pt \quad (7)$$

мұндағы  $\varphi_{2k-1}(z)$  координата функциялары

$$z = 0: \varphi_{2k-1}''(0) = 0, \quad \varphi_{2k-1}'''(0) = 0; \quad z = l: \varphi_{2k-1}(h) = 0, \quad \varphi_{2k-1}'(h) = 0 \quad (8)$$

$A_1 \leq A_3 \leq A_5 \leq \dots \leq A_{2k-1}$  -деп ұйғарымыз.

Осы шарттарды және (6), (7) формуларды ескеріп, (4) өрнектің мынадай түрге түрлендіреміз

$$\Delta y = -\frac{1}{2H} \left[ \sum_{k=1}^v C_{2k-1} \sin(2k-1)pt \right]^2 + \frac{(n-1)}{nH} N_n C_1^{\frac{n}{n-1}} \sin^{\frac{n}{n-1}} pt + \frac{N_n}{H} C_1^{\frac{1}{n-1}} \sin^{\frac{1}{n-1}} pt \sum_{k=3}^v C_{2k-1} \sin(2k-1)pt \quad (9)$$

Мұндағы

$$C_1 = A_1 - Q, C_3 = A_3, C_5 = A_5, \dots, C_{2k-1} = A_{2k-1}$$

(6), (7), (8) және (9) өрнектерін (5) функционалға қойып және оны  $t$  уақыт бойынша  $2\pi/p$  период шегінде интегральдағаннан кейін мынаны аламыз

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{\pi}{2} \int_0^h \left\{ pm(z) \sum_{k=1}^{\nu} (2k-1)^2 \varphi_{2k-1}^2(z) - 2pm(z) \sum_{k=1}^{\nu} (2k-1)^2 \varphi_{2k-1}(z) A_{2k-1} - \frac{1}{p} EJ(z) \sum_{2k-1}^{\nu} (\varphi_{2k-1}'' )^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{p} gm(z) \sum_{2k-1}^{\nu} (\varphi_{2k-1}')^2 + p \left( m(z) + \frac{M}{h} \right) \sum_{2k-1}^{\nu} (2k-1)^2 A_{2k-1}^2 + \frac{1}{p} \omega_0^2 \left( m(z) + \frac{M}{h} \right) \sum_{k=1}^{\nu} A_{2k-1}^2 - \\
 & - 2 \frac{1}{p} \left( m(z) + \frac{M}{h} \right) g \frac{(n-1)}{nH} N_n \sigma_n A_1^{\frac{n}{n-1}} - 2 \frac{1}{p} \left( m(z) + \frac{M}{h} \right) g \frac{1}{H} N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} \sum_{k=1}^{\nu} \delta_{2k-1} A_{2k-1} + \frac{1}{p} 2p^2 B \left[ m(z) (\varphi_1')^2 + \right. \\
 & + 2m(z) \sum_{k=1}^{\nu} \varphi_{2k-1}' \varphi_{2k+1}' + \left. \left( m(z) + \frac{M}{h} \right) \frac{1}{H} \left( A_1^2 - \sum_{k=1}^{\nu} A_{2k-1} A_{2k+1} + 2 \frac{2(n-1)\gamma_n}{n} N_n A_1^{\frac{n}{n-1}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} \sum_{k=1}^{\nu} 2\beta_{n,2k-1} A_{2k-1} \right) \right] \sin \alpha \left. \right\} dz
 \end{aligned} \quad (10)$$

мұндағы

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi/p} \sin^2(2k-1)pt dt &= \frac{\pi}{p}; \int_0^{2\pi/p} \cos^2(2k-1)pt dt = \frac{\pi}{p}; \int_0^{2\pi/p} \sin(2i-1)pt \cdot \sin(2j-1)pt dt = 0, j \neq i \\
 \int_0^{2\pi/p} \cos(2i-1)pt \cdot \cos(2j-1)pt dt &= 0, j \neq i \quad \delta_{2k-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/p} \sin^{\frac{1}{n-1}} pt \cdot \sin(2k-1)pt dt, k = 3, 5, \dots, 2k-1 \\
 \gamma_n &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/p} \cos 2pt \cdot \sin^{\frac{n}{n-1}} pt dt \sin; \beta_{n,2k-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/p} \cos 2pt \cdot \sin^{\frac{1}{n-1}} pt \cdot \sin(2k-1)pt dt, \sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/p} \sin^{\frac{n}{n-1}} pt dt;
 \end{aligned}$$

Ритц бойынша (5) функциональдың мәнін төмендегі өрнектердің мәндер жиынында қарастырады

$$\varphi_{2k-1}(z) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{2k-1,i} \psi_i(z), \quad k = 1, 2, \dots, \nu; i = 1, 2, \dots, \nu \quad (11)$$

мұндағы  $\alpha_{2k-1,i}$  – параметрлер, бұларды вариациялау арқылы қажетті рұқсат етілген функциялар классын аламыз, ал  $\psi_i(z)$  – қарастырылып отырған есептің кем дегенде геометриялық шекаралық шарттарын қанағаттандыратын. арнайы таңдалған немесе белгілі функциялар арқылы берілетін базистік немесе координаталық функция деп аталады. (7) және (8) функциялар жиынында, осыған сәйкес функционал  $\nu(\nu+1)+1$  белгісіз  $A_{2k-1}, \alpha_{2k-1,i}, \alpha, (k, i = 1, 2, 3, \dots, \nu)$  айнымалылардың функциясына айналады

$$S(\varphi) = S(\alpha, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{2k-1,\nu}, A_1, A_3, \dots, A_{2k-1})$$

Және оның бірінші вариациясы мынадай болады

$$\delta S(\varphi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \alpha_{2k-1,i}} \delta \alpha_{2k-1,i}, \quad \delta S(\varphi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial A_{2k-1}} \delta A_{2k-1}, \quad \delta S(\varphi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \alpha} \delta \alpha$$

$\alpha, \alpha_{2k-1,i}$  параметрлерін және  $A_{2k-1}$  төмендегі теңдеулер арқылы анықтаймыз

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_{2k-1,i}} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial A_{2k-1}} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0, \quad (k, i = 1, 2, \dots, \nu) \quad (12)$$

Серпімді құрылғының аз тербелістерінің дифференциалдық теңдеулеріне сәйкес функционалдар  $\psi_i(z)$  қатысты квадраттық болады, онда (12) теңдеулері  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$  қатысты сызықты, ал

$A_1, A_3, \dots, A_{2k-1}, \alpha$  қатысты сызықты емес болады. Олар еркіндік дәрежесі шекті сан болатын жүйенің аз тербелісінің теңдеулерінің түріне ұқсас болады.

(12) жүйелерден біз  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$  және  $A_1, A_3, \dots, A_{2k-1}, \alpha$  жуық мәндерін табатын теңдеулерді аламыз.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$  және  $A_1, A_3, \dots, A_{2k-1}, \alpha$  параметрлерді табу үшін (7) және (8) минимизациялайтын форманы  $S$  қойып, мынаны аламыз

$$\begin{aligned}
 & S(\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \dots, \alpha_{1,\nu}, \alpha_{3,1}, \alpha_{5,1}, \alpha_{7,1}, \dots, \alpha_{2k-1,1}, A_1, A_3, A_5, \dots, A_{2k-1}, \alpha) = \\
 & = \frac{\pi}{2p} \left\{ \sum_{k=1}^{\nu} (2k-1)^2 p^2 \left( \sum_{i,j=1}^{\nu} T_{ij} \alpha_{2k-1,i} \alpha_{2k-1,j} - 2A_{2k-1} \sum_{i=1}^{\nu} E_i \alpha_{2k-1,i} \right) - E \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} U_{ij} \alpha_{2k-1,i} \alpha_{2k-1,j} + \right. \\
 & + g \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} K_{ij} \alpha_{2k-1,i} \alpha_{2k-1,j} + (M_z + M) \left[ \sum_{k=1}^{\nu} \left[ (2k-1)^2 p^2 A_{2k-1}^2 + \omega_0^2 A_{2k-1}^2 \right] - 2\omega_0^2 \frac{(n-1)}{n} N_n \sigma_n A_1^{\frac{n}{n-1}} - \right. \\
 & \left. - 2\omega_0^2 N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} \sum_{k=3}^{\nu} \delta_{2k-1} A_{2k-1} \right] \left. \right\} + \frac{\pi}{2p} \left\{ 2p^2 \lambda \left[ g \sum_{i,j=1}^{\nu} K_{ij} \alpha_{1,i} \alpha_{1,j} - 2g \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i \neq j} K_{ij} \alpha_{2k-1,i} \alpha_{2k-1,j} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (M_z + M) \omega_0^2 \left( A_1^2 - 2 \sum_{k=1}^{\nu} A_{2k-1} A_{2k+1} + 2 \frac{(n-1)}{n} N_n \gamma_n A^{\frac{n}{n-1}} + N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} \sum_{k=1}^{\nu} \beta_{n,2k-1} A_{2k-1} \right) \right] \sin \alpha \right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

мұндағы

$$\begin{aligned}
 T_{ik} &= \int_0^h m(z) \psi_i \psi_k dz, \quad U_{ik} = \int_0^h I(z) \psi_i'' \psi_k'' dz, \quad K_{ik} = \int_0^h m(z) \psi_i' \psi_k' dz, \quad E_i = \int_0^h m(z) \psi_i dz, \\
 M_z &= \int_0^h m(z) dz, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{H}, \quad \lambda = \frac{B}{g} \quad (14)
 \end{aligned}$$

(12) теңдеулер жүйелері мынадай түрде болады

$$\sum_{i=1}^{\nu} \left[ p^2 T_{ji} - E U_{ji} + g(1 + 2\lambda p^2 \sin \alpha) K_{ji} \right] \alpha_{1,i} + 2p^2 \lambda g \sin \alpha \sum_{i=1}^{\nu} K_{ji} \alpha_{3i} = p^2 E_j A_1, \quad (j=1, 2, 3, \dots, \nu) \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{\nu} \left[ (2k-1)^2 p^2 T_{ji} - E U_{ji} + g K_{ji} \right] \alpha_{2k-1,i} - 2p^2 \lambda g \sin \alpha \sum_{i=1}^{\nu} K_{ji} \alpha_{2k+1,i} = (2k-1)^2 p^2 E_j A_{2k-1} \\
 & (k=2, 3, \dots, \nu) \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ p^2 + \omega_0^2 \right] A_1 = \omega_0^2 N_n \sigma_n A_1^{\frac{1}{n-1}} \left[ 1 + \frac{1}{(n-1) \sigma_n A_1} \sum_{k=3}^{\nu} \delta_{2k-1} A_{2k-1} \right] - 2p^2 \lambda \omega_0^2 \left( A_1 + \gamma_n N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} - A_3 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{n-1} \frac{N_n}{A_1^{\frac{n-2}{n-1}}} \sum_{k=2}^{\nu} 2\beta_{n,2k-1} A_{2k-1} \right) \sin \alpha + \frac{p^2}{M_z + M} \sum_{i=1}^{\nu} E_i \alpha_{1,i} \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$A_{2k-1} = \frac{\delta_{2k-1}}{(2k-1)^2 p^2 + \omega_0^2} \omega_0^2 N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} - \frac{2p^2 \lambda \omega_0^2}{(2k-1)^2 p^2 + \omega_0^2} \left( 2\beta_{n,2k-1} A_1^{\frac{1}{n-1}} - A_{2k+1} \right) \sin \alpha +$$

$$+ \frac{1}{(M_z + M)} \frac{(2k-1)^2 p^2}{[(2k-1)^2 p^2 + \omega_0^2]} \sum_{i=1}^{\nu} E_i \alpha_{2k-1,i}$$

( $k = 2, 3, \dots, \nu$ )

$$2p^2 \lambda (M_z + M) \omega_0^2 \frac{1}{p} \cos \alpha \left\{ A_1^2 - \sum_{k=1}^{\nu} A_{2k-1} A_{2k+1} + \frac{2(n-1)}{n} N_n \gamma_n A_1^{\frac{n}{n-1}} + 2N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} \sum_{k=1}^{\nu} \beta_{n,2k-1} A_{2k-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(M_z + M)} \left( \sum_{i,j=1}^{\nu} K_{ij} \alpha_{1,i} \alpha_{1,j} - \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} K_{ij} \alpha_{2k-1,i} \alpha_{2k+1,j} \right) \right\} = 0$$

(19) теңдеуінен  $\cos \alpha = 0$  екенін көреміз, демек  $\alpha = \pi/2$ . Үш мүшемен ( $k, i, j = 1, 2, 3$ ) шектелеміз және (15)-(18) теңдеулер жүйесін  $\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{5,1}, \alpha_{5,2}, \alpha_{5,3}, A_1, A_3, A_5$  қатысты мынадай түрде жазамыз

$$\begin{aligned} & (p^2 T_{11} - EU_{11} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{11}) \alpha_{1,1} + (p^2 T_{12} - EU_{12} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{12}) \alpha_{1,2} + \\ & + (p^2 T_{13} - EU_{13} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{13}) \alpha_{1,3} - 2p^2 \lambda g (K_{11} \alpha_{3,1} + K_{12} \alpha_{3,2} + K_{13} \alpha_{3,3}) = p^2 E_1 A_1 \\ & (p^2 T_{21} - EU_{21} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{21}) \alpha_{1,1} + (p^2 T_{22} - EU_{22} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{22}) \alpha_{1,2} + \\ & + (p^2 T_{23} - EU_{23} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{23}) \alpha_{1,3} - 2p^2 \lambda g (K_{21} \alpha_{3,1} + K_{22} \alpha_{3,2} + K_{23} \alpha_{3,3}) = p^2 E_2 A_1 \\ & (p^2 T_{31} - EU_{31} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{31}) \alpha_{1,1} + (p^2 T_{32} - EU_{32} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{32}) \alpha_{1,2} + \\ & + (p^2 T_{33} - EU_{33} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{33}) \alpha_{1,3} - 2p^2 \lambda g (K_{31} \alpha_{3,1} + K_{32} \alpha_{3,2} + K_{33} \alpha_{3,3}) = p^2 E_3 A_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (9p^2 T_{11} - EU_{11} + gK_{11}) \alpha_{3,1} + (9p^2 T_{12} - EU_{12} + gK_{12}) \alpha_{3,2} + (9p^2 T_{13} - EU_{13} + gK_{13}) \alpha_{3,3} - \\ & = 2p^2 \lambda g (K_{11} \alpha_{5,1} + K_{12} \alpha_{5,2} + K_{13} \alpha_{5,3}) + 9p^2 E_1 A_3 \\ & (9p^2 T_{21} - EU_{21} + gK_{21}) \alpha_{3,1} + (9p^2 T_{22} - EU_{22} + gK_{22}) \alpha_{3,2} + (9p^2 T_{23} - EU_{23} + gK_{23}) \alpha_{3,3} - \\ & = 2p^2 \lambda g (K_{21} \alpha_{5,1} + K_{22} \alpha_{5,2} + K_{23} \alpha_{5,3}) + 9p^2 E_2 A_3 \\ & (9p^2 T_{31} - EU_{31} + gK_{31}) \alpha_{3,1} + (9p^2 T_{32} - EU_{32} + gK_{32}) \alpha_{3,2} + (9p^2 T_{33} - EU_{33} + gK_{33}) \alpha_{3,3} - \\ & = 2p^2 \lambda g (K_{31} \alpha_{5,1} + K_{32} \alpha_{5,2} + K_{33} \alpha_{5,3}) + 9p^2 E_3 A_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (25p^2 T_{11} - EU_{11} + gK_{11}) \alpha_{5,1} + (25p^2 T_{12} - EU_{12} + gK_{12}) \alpha_{5,2} + (25p^2 T_{13} - EU_{13} + gK_{13}) \alpha_{5,3} = 25p^2 E_1 A_5 \\ & (25p^2 T_{21} - EU_{21} + gK_{21}) \alpha_{5,1} + (25p^2 T_{22} - EU_{22} + gK_{22}) \alpha_{5,2} + (25p^2 T_{23} - EU_{23} + gK_{23}) \alpha_{5,3} = 25p^2 E_2 A_5 \\ & (25p^2 T_{31} - EU_{31} + gK_{31}) \alpha_{5,1} + (25p^2 T_{32} - EU_{32} + gK_{32}) \alpha_{5,2} + (25p^2 T_{33} - EU_{33} + gK_{33}) \alpha_{5,3} = 25p^2 E_3 A_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [p^2 + \omega_0^2]A_1 = \omega_0^2 N_n \sigma_n A_1^{\frac{1}{n-1}} \left[ 1 + \frac{1}{(n-1)\sigma_n A_1} (\delta_3 A_3 + \delta_5 A_5) \right] - 2p^2 \lambda \omega_0^2 (A_1 + \gamma_n N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} - A_3 + \\ + \frac{2}{n-1} \frac{N_n}{A_1^{\frac{n-2}{n-1}}} (\beta_{n,3} A_3 + \beta_{n,5} A_5)) \Bigg) + \frac{p^2}{M_z + M} (E_1 \alpha_{1,1} + E_2 \alpha_{1,2} + E_3 \alpha_{1,3}) \end{aligned} \quad (23)$$

$$A_3 = \frac{\delta_3}{9p^2 + \omega_0^2} \omega_0^2 N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} - \frac{2p^2 \lambda \omega_0^2}{9p^2 + \omega_0^2} (2\beta_{n,3} A_1^{\frac{1}{n-1}} - A_5) + \frac{1}{(M_z + M)} \frac{9p^2}{[9p^2 + \omega_0^2]} (E_1 \alpha_{3,1} + E_2 \alpha_{3,2} + E_3 \alpha_{3,3}) \quad (24)$$

$$A_5 = \frac{\delta_5}{25p^2 + \omega_0^2} \omega_0^2 N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} - \frac{2p^2 \lambda \omega_0^2}{25p^2 + \omega_0^2} (2\beta_{n,5} A_1^{\frac{1}{n-1}}) + \frac{1}{(M_z + M)} \frac{25p^2}{[25p^2 + \omega_0^2]} (E_1 \alpha_{5,1} + E_2 \alpha_{5,2} + E_3 \alpha_{5,3}) \quad (25)$$

(20-25) өрнектері  $\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{5,1}, \alpha_{5,2}, \alpha_{5,3}, A_1, A_3, A_5$  параметрлерін анықтайтын теңдеулер жүйесін береді (8) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын базалық функциялардан құрылған минимизациялайтын форма мынадай түрде болады

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) = (\alpha_{1,1}\psi_1 + \alpha_{1,2}\psi_2 + \alpha_{1,3}\psi_3), \varphi_3(z) = (\alpha_{3,1}\psi_1 + \alpha_{3,2}\psi_2 + \alpha_{3,3}\psi_3), \\ \varphi_5(z) = (\alpha_{5,1}\psi_1 + \alpha_{5,2}\psi_2 + \alpha_{5,3}\psi_3), \end{aligned} \quad (26)$$

ал  $T_{ij}, U_{ij}, K_{ij}$  и  $E_i$  шамалары (14) формуласымен анықталады

**Түзетілетін беттермен шектелген дірілтірекке орнатылған көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғының параметрлік қозу кзіндегі динамикалық қасиеттеріне талдау**

Енді (16-18) алгебралық теңдеулер жүйесін Г. Крамер әдісімен шешуге көшейік.

Бірінші жуықтау үшін,  $A_1 \neq 0, A_3 = 0, A_5 = 0$  ұйғарым жасап, (20) және (23) теңдеулерді мынадай түрге түрлендірейік

$$\begin{aligned} (p^2 T_{11} - EU_{11} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{11}) \alpha_{1,1} + (p^2 T_{12} - EU_{12} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{12}) \alpha_{1,2} + \\ + (p^2 T_{13} - EU_{13} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{13}) \alpha_{1,3} = p^2 E_1 A_1 \\ (p^2 T_{21} - EU_{21} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{21}) \alpha_{1,1} + (p^2 T_{22} - EU_{22} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{22}) \alpha_{1,2} + \\ + (p^2 T_{23} - EU_{23} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{23}) \alpha_{1,3} = p^2 E_2 A_1 \\ (p^2 T_{31} - EU_{31} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{31}) \alpha_{1,1} + (p^2 T_{32} - EU_{32} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{32}) \alpha_{1,2} + \\ + (p^2 T_{33} - EU_{33} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{33}) \alpha_{1,3} = p^2 E_3 A_1 \end{aligned} \quad (27)$$

$$[p^2 + \omega_0^2]A_1 = \omega_0^2 N_n \sigma_n A_1^{\frac{1}{n-1}} - 2p^2 \lambda \omega_0^2 (A_1 + \gamma_n N_n A_1^{\frac{1}{n-1}}) + \frac{p^2}{M_z + M} (E_1 \alpha_{1,1} + E_2 \alpha_{1,2} + E_3 \alpha_{1,3}) \quad (28)$$

Бірінші жуықтауда бойынша есептің шешімі мынадай түрде болады:

$$\alpha_{1,1} = \frac{\Delta_{1,1}}{\Delta_1} p^2 A_1, \alpha_{1,2} = \frac{\Delta_{1,2}}{\Delta_1} p^2 A_1, \alpha_{1,3} = \frac{\Delta_{1,3}}{\Delta_1} p^2 A_1 \quad (29)$$

$$\varphi_1(z) = \left( \frac{\Delta_{1,1}}{\Delta_1} + \frac{\Delta_{1,2}}{\Delta_1} \frac{z}{h} + \frac{\Delta_{1,3}}{\Delta_1} \frac{z^2}{h^2} \right) \left( 1 - \frac{z}{h} \right)^2 p^2 A_1 \quad (30)$$



$$u_1(z,t) = \left( \frac{\Delta_{1,1}}{\Delta_1} + \frac{\Delta_{1,2}}{\Delta_1} \frac{z}{h} + \frac{\Delta_{1,3}}{\Delta_1} \frac{z^2}{h^2} \right) \left( 1 - \frac{z}{h} \right)^2 p^2 A_1 \sin pt \quad (31)$$

мұндағы  $\Delta_1, \Delta_{1,1}, \Delta_{1,2}, \Delta_{1,3}$

$$\Delta_1 = \left\| \begin{pmatrix} p^2 T_{11} - EU_{11} + g(1+2p^2\lambda)K_{11} \\ p^2 T_{21} - EU_{21} + g(1+2p^2\lambda)K_{21} \\ p^2 T_{31} - EU_{31} + g(1+2p^2\lambda)K_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 T_{12} - EU_{12} + g(1+2p^2\lambda)K_{12} \\ p^2 T_{22} - EU_{22} + g(1+2p^2\lambda)K_{22} \\ p^2 T_{32} - EU_{32} + g(1+2p^2\lambda)K_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 T_{13} - EU_{13} + g(1+2p^2\lambda)K_{13} \\ p^2 T_{23} - EU_{23} + g(1+2p^2\lambda)K_{23} \\ p^2 T_{33} - EU_{33} + g(1+2p^2\lambda)K_{33} \end{pmatrix} \right\|$$

$$\Delta_{1,1} = \left\| \begin{pmatrix} E_1 (p^2 T_{12} - EU_{12} + g(1+2p^2\lambda)K_{12}) \\ E_2 (p^2 T_{22} - EU_{22} + g(1+2p^2\lambda)K_{22}) \\ E_3 (p^2 T_{32} - EU_{32} + g(1+2p^2\lambda)K_{32}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 T_{13} - EU_{13} + g(1+2p^2\lambda)K_{13} \\ p^2 T_{23} - EU_{23} + g(1+2p^2\lambda)K_{23} \\ p^2 T_{33} - EU_{33} + g(1+2p^2\lambda)K_{33} \end{pmatrix} \right\|,$$

$$\Delta_{1,2} = \left\| \begin{pmatrix} (p^2 T_{11} - EU_{11} + g(1+2p^2\lambda)K_{11}) E_1 \\ (p^2 T_{21} - EU_{21} + g(1+2p^2\lambda)K_{21}) E_2 \\ (p^2 T_{31} - EU_{31} + g(1+2p^2\lambda)K_{31}) E_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 T_{13} - EU_{13} + g(1+2p^2\lambda)K_{13} \\ p^2 T_{23} - EU_{23} + g(1+2p^2\lambda)K_{23} \\ p^2 T_{33} - EU_{33} + g(1+2p^2\lambda)K_{33} \end{pmatrix} \right\|,$$

$$\Delta_{1,3} = \left\| \begin{pmatrix} (p^2 T_{11} - EU_{11} + g(1+2p^2\lambda)K_{11}) \\ (p^2 T_{21} - EU_{21} + g(1+2p^2\lambda)K_{21}) \\ (p^2 T_{31} - EU_{31} + g(1+2p^2\lambda)K_{31}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 T_{12} - EU_{12} + g(1+2p^2\lambda)K_{12} \\ p^2 T_{22} - EU_{22} + g(1+2p^2\lambda)K_{22} \\ p^2 T_{32} - EU_{32} + g(1+2p^2\lambda)K_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \right\|,$$

Бұдан да дәлірек шешімдерін табу үшін  $A_1 \neq 0, A_3 \neq 0, A_5 = 0$ , ұйғарым жасаймыз, сондықтан (20),(21),(23) және (24) теңдеулер мынадай түрге ие болады.

$$\begin{aligned} & (p^2 T_{11} - EU_{11} + g(1+2p^2\lambda)K_{11})\alpha_{1,1} + (p^2 T_{12} - EU_{12} + g(1+2p^2\lambda)K_{12})\alpha_{1,2} + \\ & + (p^2 T_{13} - EU_{13} + g(1+2p^2\lambda)K_{13})\alpha_{1,3} = 2p^2\lambda g (K_{11}\alpha_{3,1} + K_{12}\alpha_{3,2} + K_{13}\alpha_{3,3}) + p^2 E_1 A_1 \\ & (p^2 T_{21} - EU_{21} + g(1+2p^2\lambda)K_{21})\alpha_{1,1} + (p^2 T_{22} - EU_{22} + g(1+2p^2\lambda)K_{22})\alpha_{1,2} + \\ & + (p^2 T_{23} - EU_{23} + g(1+2p^2\lambda)K_{23})\alpha_{1,3} = 2p^2\lambda g (K_{21}\alpha_{3,1} + K_{22}\alpha_{3,2} + K_{23}\alpha_{3,3}) + p^2 E_2 A_1 \\ & (p^2 T_{31} - EU_{31} + g(1+2p^2\lambda)K_{31})\alpha_{1,1} + (p^2 T_{32} - EU_{32} + g(1+2p^2\lambda)K_{32})\alpha_{1,2} + \\ & + (p^2 T_{33} - EU_{33} + g(1+2p^2\lambda)K_{33})\alpha_{1,3} = 2p^2\lambda g (K_{31}\alpha_{3,1} + K_{32}\alpha_{3,2} + K_{33}\alpha_{3,3}) + p^2 E_3 A_1 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & (9p^2 T_{11} - EU_{11} + gK_{11})\alpha_{3,1} + (9p^2 T_{12} - EU_{12} + gK_{12})\alpha_{3,2} + (9p^2 T_{13} - EU_{13} + gK_{13})\alpha_{3,3} = 9p^2 E_1 A_3 \\ & (9p^2 T_{21} - EU_{21} + gK_{21})\alpha_{3,1} + (9p^2 T_{22} - EU_{22} + gK_{22})\alpha_{3,2} + (9p^2 T_{23} - EU_{23} + gK_{23})\alpha_{3,3} = 9p^2 E_2 A_3 \\ & (9p^2 T_{31} - EU_{31} + gK_{31})\alpha_{3,1} + (9p^2 T_{32} - EU_{32} + gK_{32})\alpha_{3,2} + (9p^2 T_{33} - EU_{33} + gK_{33})\alpha_{3,3} = 9p^2 E_3 A_3 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \left[ p^2 + \omega_0^2 \right] A_1 = \omega_0^2 N_n \sigma_n A_1^{\frac{1}{n-1}} \left[ 1 + \frac{1}{(n-1)\sigma_n A_1} \delta_3 A_3 \right] - 2p^2 \lambda \omega_0^2 \left( A_1 + \gamma_n N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} - A_3 + \frac{2}{n-1} \frac{N_n}{A_1^{\frac{n-2}{n-1}}} \beta_{n,3} A_3 \right) + \\ & + \frac{p^2}{M_z + M} (E_1 \alpha_{1,1} + E_2 \alpha_{1,2} + E_3 \alpha_{1,3}) \end{aligned} \quad (34)$$

$$A_3 = \frac{\delta_3}{9p^2 + \omega_0^2} \omega_0^2 N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} - \frac{2p^2 \lambda \omega_0^2}{9p^2 + \omega_0^2} 2\beta_{n,3} A_1^{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{(M_z + M)} \frac{9p^2}{[9p^2 + \omega_0^2]} (E_1 \alpha_{3,1} + E_2 \alpha_{3,2} + E_3 \alpha_{3,3}) \quad (35)$$

Есептің шешімен екінші жуықтауда мынадай түрде жазамыз:

$$\alpha_{1,1} = \frac{\tilde{\Delta}_{1,1}}{\tilde{\Delta}_1}, \alpha_{1,2} = \frac{\tilde{\Delta}_{1,2}}{\tilde{\Delta}_1}, \alpha_{1,3} = \frac{\tilde{\Delta}_{1,3}}{\tilde{\Delta}_1} \quad (36)$$

$$\alpha_{3,1} = \frac{\Delta_{3,1}}{\Delta_3} 9p^2 A_3, \alpha_{3,2} = \frac{\Delta_{3,2}}{\Delta_3} 9p^2 A_3, \alpha_{3,3} = \frac{\Delta_{3,3}}{\Delta_3} 9p^2 A_3 \quad (37)$$

$$\begin{aligned} [p^2 + \omega_0^2] A_1 = & \omega_0^2 N_n \sigma_n A_1^{\frac{1}{n-1}} \left[ 1 + \frac{1}{(n-1)\sigma_n A_1} \delta_3 A_3 \right] - \\ & - 2p^2 \lambda \omega_0^2 \left( A_1 + \gamma_n N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} - A_3 + \frac{2}{n-1} \frac{N_n}{A_1^{\frac{n-2}{n-1}}} \beta_{n,3} A_3 \right) + \frac{p^2}{M_z + M} \left( E_1 \frac{\tilde{\Delta}_{1,1}}{\tilde{\Delta}_1} + E_2 \frac{\tilde{\Delta}_{1,2}}{\tilde{\Delta}_1} + E_3 \frac{\tilde{\Delta}_{1,3}}{\tilde{\Delta}_1} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

$$A_3 = \left( 1 - \frac{1}{(M_z + M)} \frac{81p^4}{[9p^2 + \omega_0^2] \Delta_3} (E_1 \Delta_{3,1} + E_2 \Delta_{3,2} + E_3 \Delta_{3,3}) \right)^{-1} \frac{\delta_3}{9p^2 + \omega_0^2} \omega_0^2 N_n A_1^{\frac{1}{n-1}} - \frac{2p^2 \lambda \omega_0^2}{9p^2 + \omega_0^2} 2\beta_{n,3} A_1^{\frac{1}{n-1}} \quad (39)$$

$$\varphi_3(z) = \left( \frac{\Delta_{3,1}}{\Delta_3} + \frac{\Delta_{3,2}}{\Delta_3} \frac{z}{h} + \frac{\Delta_{3,3}}{\Delta_3} \frac{z^2}{h^2} \right) \left( 1 - \frac{z}{h} \right)^2 9p^2 A_3 \quad (40)$$

$$u_1(z, t) = \left( \frac{\tilde{\Delta}_{1,1}}{\tilde{\Delta}_1} + \frac{\tilde{\Delta}_{1,2}}{\tilde{\Delta}_1} \frac{z}{h} + \frac{\tilde{\Delta}_{1,3}}{\tilde{\Delta}_1} \frac{z^2}{h^2} \right) \left( 1 - \frac{z}{h} \right)^2 \sin pt + \left( \frac{\Delta_{3,1}}{\Delta_3} + \frac{\Delta_{3,2}}{\Delta_3} \frac{z}{h} + \frac{\Delta_{3,3}}{\Delta_3} \frac{z^2}{h^2} \right) \left( 1 - \frac{z}{h} \right)^2 9p^2 A_3 \sin 3pt \quad (41)$$

мұндағы  $\Delta_1, \tilde{\Delta}_{1,1}, \tilde{\Delta}_{1,2}, \tilde{\Delta}_{1,3}$

$$\tilde{\Delta}_1 = \left\| \begin{aligned} & (p^2 T_{11} - EU_{11} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{11}) (p^2 T_{12} - EU_{12} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{12}) (p^2 T_{13} - EU_{13} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{13}) \\ & (p^2 T_{21} - EU_{21} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{21}) (p^2 T_{22} - EU_{22} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{22}) (p^2 T_{23} - EU_{23} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{23}) \\ & (p^2 T_{31} - EU_{31} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{31}) (p^2 T_{32} - EU_{32} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{32}) (p^2 T_{33} - EU_{33} + g(1 + 2p^2 \lambda) K_{33}) \end{aligned} \right\|$$

$$\tilde{\Delta}_{1,1} = \left\| \begin{aligned} & [2p^2 \lambda g (K_{11} \alpha_{3,1} + K_{12} \alpha_{3,2} + K_{13} \alpha_{3,3}) + p^2 E_1 A_1] [p^2 T_{12} - EU_{12} + gK_{12}] [p^2 T_{13} - EU_{13} + gK_{13}] \\ & [2p^2 \lambda g (K_{21} \alpha_{3,1} + K_{22} \alpha_{3,2} + K_{23} \alpha_{3,3}) + p^2 E_2 A_1] [p^2 T_{22} - EU_{22} + gK_{22}] [p^2 T_{23} - EU_{23} + gK_{23}] \\ & [2p^2 \lambda g (K_{31} \alpha_{3,1} + K_{32} \alpha_{3,2} + K_{33} \alpha_{3,3}) + p^2 E_3 A_1] [p^2 T_{32} - EU_{32} + gK_{32}] [p^2 T_{33} - EU_{33} + gK_{33}] \end{aligned} \right\|$$

$$\tilde{\Delta}_{1,2} = \left\| \begin{aligned} & [p^2 T_{11} - EU_{11} + gK_{11}] [2p^2 \lambda g (K_{11} \alpha_{3,1} + K_{12} \alpha_{3,2} + K_{13} \alpha_{3,3}) + p^2 E_1 A_1] [p^2 T_{13} - EU_{13} + gK_{13}] \\ & [p^2 T_{21} - EU_{21} + gK_{21}] [2p^2 \lambda g (K_{21} \alpha_{3,1} + K_{22} \alpha_{3,2} + K_{23} \alpha_{3,3}) + p^2 E_2 A_1] [p^2 T_{23} - EU_{23} + gK_{23}] \\ & [p^2 T_{31} - EU_{31} + gK_{31}] [2p^2 \lambda g (K_{31} \alpha_{3,1} + K_{32} \alpha_{3,2} + K_{33} \alpha_{3,3}) + p^2 E_3 A_1] [p^2 T_{33} - EU_{33} + gK_{33}] \end{aligned} \right\|$$

$$\tilde{\Delta}_{1,3} = \left\| \begin{array}{l} \left[ p^2 T_{11} - EU_{11} + gK_{11} \right] \left[ p^2 T_{12} - EU_{12} + gK_{12} \right] \left[ 2p^2 \lambda g (K_{11} \alpha_{3,1} + K_{12} \alpha_{3,2} + K_{13} \alpha_{3,3}) + p^2 E_1 A_1 \right] \\ \left[ p^2 T_{21} - EU_{21} + gK_{21} \right] \left[ p^2 T_{22} - EU_{22} + gK_{22} \right] \left[ 2p^2 \lambda g (K_{21} \alpha_{3,1} + K_{22} \alpha_{3,2} + K_{23} \alpha_{3,3}) + p^2 E_2 A_1 \right] \\ \left[ p^2 T_{31} - EU_{31} + gK_{31} \right] \left[ p^2 T_{32} - EU_{32} + gK_{32} \right] \left[ 2p^2 \lambda g (K_{31} \alpha_{3,1} + K_{32} \alpha_{3,2} + K_{33} \alpha_{3,3}) + p^2 E_3 A_1 \right] \end{array} \right\|$$

### Нәтижелер және талдау

(8) геометриялық шарттарды қанағаттандыратын базистік функциялар мынадай түрде болады

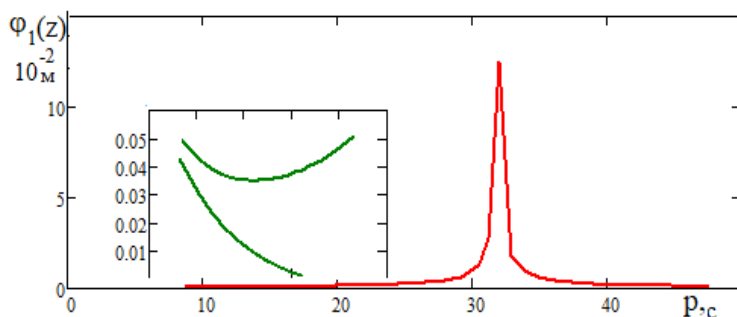
$$\psi_1(z) = \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2, \quad \psi_2(z) = \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 \frac{z}{l}, \quad \psi_3(z) = \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 \frac{z^2}{l^2}. \quad (42)$$

Жүйе параметрлерінің келесі  $a = 10\text{м}, b = 10\text{м}, h = 60\text{м}$   $E = 21.6 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \rho = 7.7 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$  мәндері үшін (29) және (30) формула бойынша сырық, сына, пирамида және конус тәрізді серпімді құрылымдардың тербелмелі қозғалысының резонанстық қисықтарын құру үшін есептеу жүргізілді.

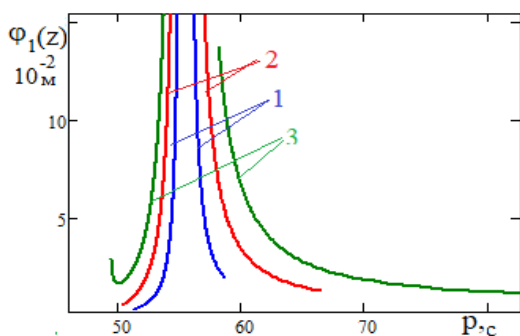
3-суретте ауыр табаны бар сына тәрізді серпімді құрылымның резонанстық қисықтары көрсетілген. Суреттен көрініп тұрғандай, табанның тербелмелі қозғалыстарының резонанстық аймағында серпімді құрылғының қозғалысы аз болады, ал серпімді құрылғының меншікті жиіліктері қоздыру жиілігімен сәйкес келсе, резонанс құбылысы пайда болады.

Параметрлік қозудың амплитудасы өскен сайын серпімді құрылғының иілмелі тербелісінің резонанстық зонасы кеңиді (4 сурет,  $1 - \lambda = 0,003; 2 - \lambda = 0,006; 3 - \lambda = 0,009$ ).

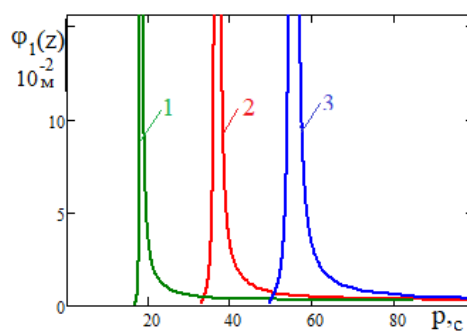
Параметрлік тербелістердің амплитудалық-жиіліктік сипаттамалары құрылғының параметрлеріне байланысты. Сына тәрізді серпімді құрылғының табанының параметрлерінің артуы резонанстық қисықтардың қозу жиіліктерінің өсуіне қарай ығысуына әкеледі (5 сурет,  $1 - a = 5\text{м}, b = 5\text{м}; 2 - a = 10\text{м}, b = 10\text{м}; 3 - a = 15\text{м}, b = 15\text{м}$ ).



3 сурет. Көлденең қимасы айнымалы ауыр табаны серпімді құрылғының резонанстық қисықтары



4 сурет. Параметрлік қозудың  $\lambda$  амплитудасының әртүрлі мәндері кезіндегі сына тәрізді серпімді құрылғының  $\Phi_1(z)$  ығысуының  $p$  жиілікке тәуелділігі



5 сурет. Табанның  $a, b$  параметрлерінің әртүрлі мәндері кезіндегі сына тәрізді серпімді құрылғының  $\Phi_1(z)$  ығысуының  $p$  жиілікке тәуелділігі

### Қорытынды

Жоғары дәрежелі беттермен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғының параметрлік тербелісінің стационар режимін зерттеудің аналитикалық әдістемесі жасалды. Гармоникалық вертикаль қозу болған жағыдайда түзетілетін беттермен шектелген теңселмелі тірекке орнатылған көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғының тербелмелі қозғалысы Ритцтің вариациялық әдісі бойынша зерттелген. Қозғалыс теңдеуінің шешімдері базистік функциялардың қатарларына жіктеу ретінде ұсынылған.

Жүргізілген зерттеу нәтижесінде анықталды: көлденең қимасы айнымалы серпімді құрылғының иілу тербелісі кезінде резонанс құбылысы байқалады; серпімділік коэффициентінің мәндеріне байланысты табанның резонанстық жиіліктер аймағында серпімді құрылымның бірнеше формаларының резонанстық тербелістері пайда болады.

Дірілден қорғайтын қондырғының табанының тербелмелі қозғалысының резонанстық зонасында серпімді құрылғы аз ығысу жасайды, ал серпімді құрылғының меншікті жиелігі тербелісті қоздырушының жиелігімен сәйкес келгенде резонанс құбылысы пайда болады. Параметрлік қоздырушының амплитудасы артқан сайын серпімді құрылғының иілмелі тербелісінің резонанстық зонасы кеңейеді. Серпімді құрылғының параметрлік тербелістің амплитуда-жиеліктік сипаттамасы, құрылғының параметрлеріне тәуелді болады. Серпімді құрылғының табанының параметрлерін арттырғанда, резонанстық қисық, тербелісті қоздырушы жиелігінің өсу жағына қарай ығысады.

**Алғыс хаттар.** Бұл жұмыс Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігінің гранттық қаржыландыруымен орындалды (ИРН АР08856744 «Түзетілетін беттері бар теңселмелі дірілтіректерден тұратын дірілден қорғайтын қондырғының стохастикалық моделін жасау», 2020-2022 жж.)

### Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Зелинский Г.А., Шевляков Ю.А. Сейсмоизоляция зданий // Основания, фундаменты и механика грунтов, - 1976. - №4. - С.19-21.

2 Бисембаев К., Сманов А. Исследование вынужденных колебаний упругих конструкций переменного сечения с тяжелым основанием на виброопорах // Вестник КазНПУ им. Абая, «серия физ.-мат. науки.- Алматы, 2019.- №4(68).- С.126-137.

3 Бисембаев К., Сманов А. Математическое моделирование колебательных движений упругих конструкций с переменными сечениями на виброопорах // Вестник КазНПУ им. Абая, Сер. физ.- мат. науки.- Алматы, 2019.- №3(67).- С.156-164.

4 Бисембаев К., Sultanova K., Study of forced vibrations transition processes of vibration protection devices with rolling-contact bearings // Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science Al-Farabi Kazakh National University, 2020.- №1(105).- p.129-144.

5 Bissembayev, K., Jomartov, A., Tuleshov, A., Dikambay, T., Analysis of the oscillating motion of a solid body on vibrating bearers // Machines, 2019, p.1-21.

6 Goel R.P. Transverse vibration of tapered beams // Journal of Sound and Vibration. 1976. - V. 47. - № 1. P. 1-7.

7 Conway H.D., Becker E.C.H., Dobil J.F. Vibration frequencies of tapered bars and circular plates // Journal of Applied Mechanics. - 1964. - P. 329-331.

8 Rosa M.A. De, Auciello N.M. Free vibrations of tapered beams with flexible ends // Computers & Structures. 1996. - V. 60. - № 2. - P. 197-202.

9 Naguleswaran S. Vibration in the two principal planes of a nonuniform beam of rectangular cross-section, one side of which varies as the square root of the axial co- ordinate // Journal of Sound and Vibration. 1994. V. 172, № 3. pp. 305-319.

10 Naguleswaran S. A direct solution for the transverse vibration of Euler- Bernoulli wedge and cone beams // Journal of Sound and Vibration. - 1994. - V. 172. - № 3. - P. 289-304.

11 Chaudhari T.D., Maiti S.K. Modelling of transverse vibration of beam of linearly variable depth with edge crack // Engineering Fracture Mechanics. - 1999. - V. 63. - P. 425-445.

12 Olhoff N., Parbery R. Designing vibrating beams and rotating shafts for maximum difference between adjacent natural frequencies // International Journal of Solids and Structures. - 1984. - V. 20. - P. 63-75.

13 Jategaonkar R., Chehil D.S. Natural frequencies of a beam with varying section properties // Journal of Sound and Vibration. - 1989. - V. 133. - P. 303-322.

14 Gupta A. Vibration of tapered beams // Journal of Structural Engineering. -1985. -V. 111. -№ 1. - P. 19-36.

15 Bissembayev K., Omyrzhanova O., Sultanova K., *Oscillations specific for the homogeneous rod like elastic structure on the kinematic absorber basis with rolling bearers having straightened surfaces*, *Mechanisms and Machine Science*, 2019, 68, pp.187-195.

#### References

- 1 Zelinsky Zelinskij G.A., Shevljakov Ju.A. (1976.) *Sejsmoizoljacija zdanij [Seismic isolation of buildings]. Osnovaniya, fundamente i mehanika gruntov*, №4. 19-21. (In Russian)
- 2 Bissembaev K., Smanov A. (2019) *Issledovanie vynuzhdennyh kolebanij uprugih konstrukcij peremennogo sechenija s tjazhelym osnovaniem na vibrooporah [Investigation of forced vibrations of elastic structures of variable cross-section with a heavy foundation on vibration supports]. Vestnik KazNPU im. Abaja, «serija fiz.-mat. nauki.-Almaty, 2019. №4(68).126-137. (In Kazakh)*
- 3 Bissembaev K., Smanov A. (2019) *Matematicheskoe modelirovanie kolebatel'nyh dvizhenij uprugih konstrukcij s peremennymi sechenijami na vibrooporah [Mathematical modeling of oscillatory motions of elastic structures with variable sections on vibration supports]. Vestnik KazNPU im. Abaja, Ser. fiz.- mat. nauki. Almaty, №3(67).156-164. (In Kazakh)*
- 4 Бисембаев К., Sultanova K., (2020) *Study of forced vibrations transition processes of vibration protection devices with rolling-contact bearings*//*Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science Al-Farabi Kazakh National University*, №1(105), 129-144.
- 5 Bissembayev, K., Jomartov, A., Tuleshov, A., (2019) *Dikambay, T., Analysis of the oscillating motion of a solid body on vibrating bearers*. *Machines*, 1-21.
- 6 Goel R.P. (1976) *Transverse vibration of tapered beams*. *Journal of Sound and Vibration*. V. 47. № 1. 1-7.
- 7 Conway H.D., Becker E.C.H., Dubil J.F. (1964) *Vibration frequencies of tapered bars and circular plates*. *Journal of Applied Mechanics*. 329-331.
- 8 Rosa M.A. De, Auciello N.M. *Free vibrations of tapered beams with flexible ends // Computers & Structures*. 1996. - V. 60. - № 2. - P. 197-202.
- 9 Naguleswaran S. (1994) *Vibration in the two principal planes of a nonuniform beam of rectangular cross-section, one side of which varies as the square root of the axial co- ordinate*. *Journal of Sound and Vibration*. V. 172, № 3. pp. 305-319.
- 10 Naguleswaran S. (1994) *A direct solution for the transverse vibration of Euler- Bernoulli wedge and cone beams* // *Journal of Sound and Vibration*. V. 172. № 3. 289-304.
- 11 Chaudhari T.D., Maiti S.K. (1999) *Modelling of transverse vibration of beam of linearly variable depth with edge crack* // *Engineering Fracture Mechanics*. V. 63. 425-445.
- 12 Olhoff N., Parbery R. (1984) *Designing vibrating beams and rotating shafts for maximum difference between adjacent natural frequencies*. *International Journal of Solids and Structures*. V. 20. 63-75.
- 13 Jategaonkar R., Chehil D.S. (1989) *Natural frequencies of a beam with varying section properties*. *Journal of Sound and Vibration*. V. 133. 303-322.
- 14 Gupta A. (1985) *Vibration of tapered beams* // *Journal of Structural Engineering*. V. 111. № 1. 19-36.
- 15 Bissembayev K., Omyrzhanova O., Sultanova K., (2019) *Oscillations specific for the homogeneous rod like elastic structure on the kinematic absorber basis with rolling bearers having straightened surfaces*, *Mechanisms and Machine Science*, 68, pp.187-195.