МРНТИ 27.31.21
УДК 517.925

https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.16

Н. Нұғыманова[1], Х. Хомпыш[1], А.Ғ. Шәкір[1]

[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университтеті, Алматы қ., Қазақстан

p,q-ЛАПЛАСИАНДЫ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ЕСЕПТІҢ ЖАЛПЫЛАМА ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ

Аңдатпа

Қазіргі таңдағы ғылым мен техниканың дамуы тұтас ортаның физикалық және гидродинамикалық құбылыстардың математикалық моделін нақты әрі жан-жақты зерттеуді талап етуде. Мәселен, эксперименталды зерттеулер бойынша, тұтқыр сұйықтарда тіптен өте аз мөлшердегі ертінді заттардың болуы ол сұйықтың құзғалысына айтарлықтай әсер беретінін көрсетіп отыр. Тығыздықтары мен тұтқырлықтары бірдей болып келген су мен әлсіз су ертінділерінің физикалық сипаттамаларын салыстырғанда, олардың релаксациялық қасиеттерінің бірден айтарлықтай айырмашылықта болатыны байқалған. Соңғы жылдары псевдопараболалық теңдеулер үшін қойылған есептердің шешімінің ақырлы уақыттағы қирауы мен стабилзациясы, уақыттың үлкен мәніндегі асимптотикалық өзгерісі секілді сапалық қасиеттерін зерттеу қарқынды дамып келеді. Бұған әлемдік рейтингілі журналдарда жарияланған мақалалар дәлел бола алады. Ұсынылып отырған жұмыс сызықты емес p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеумен (Соболев типті теңдеу) сипатталатын күрделі реологиялық қасиеттері есепке алынған бір өлшемді Кельвин-Фойгт сұйығының бір математикалық моделін зерттеуге арналған. Псевдопараболалық теңдеулердің сызықты түрін зеттеу Соболевтен жұмысынан бастау алды.

Бұл жұмыста псевдопарабоолалық теңдеу шешімінің уақыттың үлкен мәніндегі асимптотикалық өзгерісі, дәлірек айтқанда шешімнің экспенциалды және дәрежелік кемуі қарастырылады.

Түйін сөздер: псевдопараболалық теңдеу, жалпылама шешім, энергетикалық қасиеттер, уақыттың үлкен мәніндегі өзгеріс.

Аннотация

Н. Нугманова[1], Х. Хомпыш[1], А.Г. Шакир[1]

[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С p,q-ЛАПЛАСИАН СТРУКТУРОЙ

Развитие современной науки и техники требует точного и всестороннего математического моделирования физических и гидродинамических процессов сплошных сред. Например, экспериментальные исследования показывают, что наличие в вязкой среде даже малых количеств полимерных веществ может значительно повлиять на движение жидкости. Сравнение физических характеристик воды и слабых водных растворов полимеров показало, что при практически одинаковых значениях плотности и вязкости эти жидкости резко отличаются своими релаксационными свойствами.

В последние годы исследования разрешимости а также качественных свойств как разрушения и стабилизаций за конечное время, асимптотического поведение при больших временах решения задачи в различных постановках для псевдопараболических уравнений бурно развивается. Это подтверждается публикациями опубликованными в мировых рейтинговых научных журналах.

Данная работа посвящена исследованию одной математической модели одномерного движения жидкости Кельвина-Фойгта со сложными реологическими свойствами, которая описывается нелинейным псевдопраболическим уравнением (уравнение типа Соболева) с p-Лапласианом. Исследования псевдопараболических уравнений была начата впервые Соболевым для линейной версии.

В работе рассматриваются вопросы асимптотического поведения решений псевдопараболического уравнений при больших временах, в частности доказываются свойства экспоненциалного и степенного спада решения.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, обобщенное решение, энергетические свойства, поведение при больших временах.

Abstract

ASYMTOTIC PROPERTIES OF THE GENERALIZED SOLUTION OF NONLINEAR PROBLEM FOR THE PSEUDOPARABOLIC EQUATION WITH p,q-LAPLACIAN STRUCTURE

Nugmanova N. [1], *Khompysh Kh.* [1], *ShakirA.G.* [1]
[1] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

The development of modern science and technology requires accurate and comprehensive mathematical modeling of physical and hydrodynamic processes of continuous media. For example, experimental studies show that the presence of even small amounts of polymeric substances in a viscous medium can significantly affect to motion of fluid. A comparison of the physical characteristics of water and weak aqueous solutions of polymers showed that at almost the same density and viscosity, these fluids sharply differ in their relaxation properties.

In recent years, the investigation of solvability and qualitative properties such as blow up and extinction of a solution in a finite time, large time behavior of a solution of the problems in various statements for pseudo-parabolic equations has been rapidly developing. This is confirmed by publications have been publishing in world ranking scientific journals.

This paper is devoted to the study of a mathematical model of the one-dimensional motion of a Kelvin-Voigt fluid with complex rheological properties, which describes by a nonlinear pseudo-parabolic equation (Sobolev type equation) with p-Laplacian. The study of pseudo-parabolic equations was first started by Sobolev in [1] for the linear version. In this work the asymptotic behavior of solutions of pseudo-parabolic equations at large times, in clearly, the properties of exponential and power-law decay of a solution are proved.

Keywords: pseudo-parabolic equation, generalized solution, energy properties, large time behavior.

1. Есептің қойылымы және кіріспе

Айталық, шенелген $Q_T = \Omega \times (0,T),\ \Omega \equiv (0,l)$ облысында келесі

$$u_t - k\left(|u_x|^{q-2}u_{xt}\right)'_x - \mu\left(|u_x{}^{p-2}u_x|\right)'_x + \gamma|u|^{m-2}u = 0 \tag{1}$$

сызықты емес псевдопараболалық теңдеуді,

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,l) \tag{2}$$

бастапқы шартты,

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \in (0,T) \tag{3}$$

шекаралық шартты қанағаттандыратын бастапқы-шеттік есепті қарастырайық. Мұндағы $u_0(x)$ белгілі функция және $p,q,m > 1$ берілген нақты сандар, ал коэффиценттер $k,\mu > 0$ оң, ал $\gamma \geq 0$ теріс емес. Атап айтқанда, k-релаксациялық коэффициент, ал μ- тұтқырлық коэффициент болып табылады. Ал $\gamma|u|^{m-2}u$ мүше абсорбция. Бұл жұмыста есептеулердің ықшамдылығы үшін $k = \mu = 1$ деп алайық.

Соңғы жылдары псевдопараболалық теңдеулер үшін қойылған есептердің шешімінің ақырлы уақыттағы қирауы мен стабилзациясы, уақыттың үлкен мәніндегі асимптотикалық өзгерісі секілді сапалық қасиеттерін зерттеу қарқынды дамып келеді. Бұған әлемдік рейтингілі журналдарда жарияланған мақалалар дәлел бола алады. Ұсынылып отырған жұмыс сызықты емес p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеумен (Соболев типті теңдеу) сипатталатын күрделі реологиялық қасиеттері есепке алынған бір өлшемді Кельвин-Фойгт сұйығының бір математикалық моделін зерттеуге арналған. Псевдопараболалық теңдеулердің сызықты түрін зеттеу Соболевтен [1] жұмысынан бастау алды. Бұл жұмыста псевдопарабоолалық теңдеу шешімінің уақыттың үлкен мәніндегі асимптотикалық өзгерісі, дәлірек айтқанда шешімнің экспенциалды және дәрежелік кемуі қарастырылады.

Жоғарыдағы (1) түрдегі псевдопараболалық теңдеулер ньютондық емес сұйықтардың, дәлірек айтқанда Кельвин-Фойгт сұйығының қозғалысының бір өлшемді жағдайын сипаттайды [2]. Мұндай p-Лапласианды Кельвин-Фойгт теңдеуі үшін әр түрлі қойылымдардағы сызықты есептердің шешімділігі мен шешімнің сапалық қасиеттерін зерттеу Антоцев пен Хомпыштың [3]-[4] жұмыстарында зерттелінген. Атап айтқанда, сызықты емес Кельвин-Фойгт теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептің шешімінің глобалды әрі локальды бар болу және жалғыздығы, сонымен қатар шешімнің ақырлы уақыттағы қирауы сынды сапалық қасиеттері зерттелінген. Жалпы Кельвин-Фойгт теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептер Околковтың бірқатар жұмыстарында, мысалға [5]-[6]

жұмыстарды және Звягин мен Турбиннің [7] жұмысында көптеп зерттеледі. Бұдан басқа да p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшін сызықты емес есептердің шешімділігі мен шешімнің ақырлы уақыттағы қирауы туралы жұмыстар Алшин мен Корпусовтың монографиясынан [8] және ондағы сілтеме әдебиеттерден табуға болады.

Зерттеу жұмысының мақсаты (1)-(3) есебінің жалпылама шешімінің қасиеттерін саралау. Алдымен (1)-(3) есебінің жалпылама шешімінің анықтамасын берелік.

Анықтама. (1)-(3) есебінің жалпылама шешімі деп $u \in L^{\infty}(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1 \cap W_q^1(\Omega))$, $u_t \in L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ кеңістікте жататын, (2) бастапқы шартты және $\forall \varphi(x,t) \in L^{\infty}(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1 \cap W_q^1(\Omega))$, $\varphi_t \in L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1)$ функциясы үшін

$$\int_0^t\int_{\Omega}\left(u_t\varphi + |u_x|^{q-2}u_{xt}\cdot\varphi_x + |u_x|^{p-2}u_x\cdot\varphi_x\right)dxdt + \int_0^t\int_{\Omega}\gamma|u|^{m-2}u\cdot\varphi dxdt = 0 \tag{4}$$

тепе-теңдікті қанағаттандыратын $u(x,t)$ функцияны айтамыз. Бұл жұмыстағы қолданылған функционалдық кеңістіктердің анықтамалары мен белгіленулерін және негізгі қасиеттерін [6] табуға болады. Бізге негізгі нәтижелерді дәлелдеу үшін келесі белгілі дифференциалдық теңсіздіктер қолданылатын болады [9].

Лемма 1 [9]. Әрбір $t>0$ үшін оң және туындыланатын $\Phi(t)$ функциясы келесі теңсіздікті қанағаттандырсын

$$\Phi'(t) + C\Phi(0)e^{\alpha t} \le 0, \tag{5}$$

мұндағы α және C оң тұрақтылар. (5) дифференциалдық теңсіздіктің шешімі үшін төмендегі тұжырымдар орынды:

а) Егер $\alpha \in (0,1)$ болса, онда

$$0 \le \Phi(t) \le \left(\Phi(0)^{1-\alpha} - (1-\alpha)Ct\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

яғни, ақырлы $T_{\max} = \dfrac{\Phi(0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)C}$ уақыты табылып $t \ge T_{\max}$ үшін $\Phi(t) \equiv 0$ болады.

б) Егер $\alpha = 1$ болса, онда

$$\Phi(t) \le \Phi(0)e^{-Ct},\ t \ge 0,$$

яғни шешім экспоенциалды кемиді;

в) Егер $\alpha > 1$ болса, онда

$$\Phi(t) \le \Phi(0)\left(1 + tC(\alpha-1)\Phi(0)^{\alpha-1}\right)^{-\frac{1}{\alpha-1}},\ t \ge 0,$$

яғни шешім дәрежелік түрде кемиді $\Phi(t) \to 0,\ \ t \to \infty$.

2. Энергетикалық теңдік және бағалау

Теорема 1. Айталық $u_0(x) \in L^2(\Omega) \cap V_q(\Omega)$ және $\gamma \ge 0$ болсын. Онда (1)-(3) есептің жалпылама шешімі $t \ge 0$ үшін келесі энергетикалық теңдікті қанағаттандырады

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{q}\|u_x\|_q^q\right) + \|u_x\|_p^p + \gamma\|u\|_m^m = 0 \tag{6}$$

және

$$\max_{t\in[0,T]}\left(\frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{q}\|u_x\|_q^q\right) + \int_0^T\left(\|u_x\|_p^p + \gamma\|u\|_m^m\right)d\tau \le C_0, \tag{7}$$

бағалауы орынды, мұнда

$$C_0 = C\left(\frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \frac{1}{q}\|u_{0x}\|_q^q + 1\right).$$

Дәлелдеуі. Жалпылама шешімдегі тест функциясының орнына $u(x,t)$ қойып, бөліктеп интегралдау формуласын қолдансақ, нәтижеде

$$\int_0^t \int_\Omega \left(u_t u + |u_x|^{q-2} u_{xt} \cdot u_x + |u_x|^p \right) dxdt + \gamma \int_0^t \int_\Omega |u|^m dxdt = 0 \tag{8}$$

теңдігін аламыз. Бұдан норма анықтамасын ескеріп, (6) аламыз.

Енді (7) бағалауды алу үшін (6) теңдіктің екі жағын уақыттық айнымалы бойынша интегралдап, бастапқы шартты қолданып, супремум алсақ

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{q}\|u_x\|_q^q \right) + \int_0^t \int_\Omega |u_x|^p dxdt + \gamma \int_0^t \int_\Omega |u|^m dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \frac{1}{q}\|u_{0x}\|_q^q \equiv C_0, \quad t \in [0,T]$$

дәлелдеу керек (7) бағалауды аламыз. Теорема 1 дәлелденді.

3. Шешімнің экспоненциалды және дәрежелік кемуі

Бұл бөлімде (1)-(3) есебінің әлді және әлсіз шешімінің $t \to \infty$ ұмтылғандағы асимтотикалық қасиетін зерттейміз. Келесі энергетикалық функцияны енгізейік

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{q}\|u_x\|_q^q. \tag{9}$$

Теорема 2 (дәрежелік кемуі). Айталық $\gamma \geq 0$ және $u_0(x) \in L^2(\Omega) \cap V_q(\Omega)$ болсын. Егер $\max\{2,q\} < p$ болса, онда барлық $t \geq 0$ үшін

$$\Phi(t) \leq \Phi(0)\left(1 + tC_1(\alpha - 1)\Phi(0)^{\alpha-1}\right)^{-\frac{1}{\alpha-1}} \tag{10}$$

теңсіздігі орынды, яғни $t \to \infty$ ұмтылғанда $\Phi(t)$ энергетикалық функциясы дәрежелік функциядан аспай кемитін болады, мұндағы $\alpha = \dfrac{p}{\beta} > 1$ және $\beta = \min\{2,q\}$, ал C_1- (1)-(3) есептің берілгенінен тәуелді тұрақты.

Дәлелдеуі. Алдымен $\Phi(t)$ энергетикалық функция үшін

$$\|u\|_{q,\Omega} \leq C(\Omega)\|u_x\|_{q,\Omega}, \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \tag{11}$$

теңсіздігін және (7) бағалауды қолданып келесі теңсіздіктерді алайық:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{q}\|u_x\|_q^q \leq \frac{C^2}{2}\|u_x\|_2^2 + \frac{1}{q}\|u_x\|_\sigma^q \leq$$

$$\frac{C^2}{2}\|u_x\|_\sigma^2 + \frac{1}{q}\|u_x\|_\sigma^q \leq$$

$$\left(\frac{C^2}{2}\|u_x\|_\sigma^{2-\beta} + \frac{1}{q}\|u_x\|_q^{q-\beta} \right)\|u_x\|_\sigma^\beta \leq C_2\|u_x\|_p^\beta \leq C_2\left(\|u_x\|_p^p + \gamma\|u\|_m^m\right)^{\frac{\beta}{p}},$$

мұнда $\sigma = \max\{2,q\}$, $C_2 = C(\Omega, C_0, q)$. Бұдан

$$C_3\Phi^\alpha(t) \leq \|u_x\|_p^p + \gamma\|u\|_m^m$$

теңсіздігін аламыз және оны (7) теңсіздікке қойсақ, нәтижеде

$$\Phi'(t) + C_3\Phi^\alpha(t) \leq 0 \tag{12}$$

жәй дифференциалдық теңсіздікке келеміз. Бұған лемма 1 қолдансақ, (10) теңсіздіктің орынды екенін көреміз. Теорема дәлелденді.

Теорема 3 (экспоненциалды кемуі)**.** Айталық $\gamma > 0$ және $u_0(x) \in L^2(\Omega) \cap V_q(\Omega)$ болсын. Егер $p = q,\ m = 2$ немесе $q = p = 2$ болса, онда барлық $t \geq 0$ үшін

$$\Phi(t) \leq \Phi(0) e^{-C_4 t} \tag{13}$$

теңсіздігі орынды, мұнда C_4 (1)-(3) есептің берілгенінен тәуелді тұрақты.

Дәлелдеуі. Теорема шарттарын ескеріп, жоғарыдағыдай энергетикалық функцияға қатысты теңсіздіктер алайық.

Айталық, $p = q,\ m = 2$ болсын. Онда $\gamma > 0$

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{q}\|u_x\|_q^q \leq \max\left\{\frac{1}{2\gamma}, \frac{1}{q}\right\}\left(\|u_x\|_p^p + \gamma\|u\|_m^m\right). \tag{14}$$

Ал $q = p = 2$ болса, онда

$$\Phi(t) \equiv \frac{1}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{q}\|u_x\|_q^q \leq \frac{C(\Omega)}{2}\|u_x\|_2^2 + \frac{1}{q}\|u_x\|_q^q \leq$$
$$\left(\frac{C(\Omega)}{2} + \frac{1}{q}\right)\|u_x\|_p^p \leq C_5\left(\|u_x\|_p^p + \gamma\|u\|_m^m\right). \tag{15}$$

теңсіздіктерін аламыз. Бұл алынған (14) және (15) теңсіздіктерін жоғарыдағы (6) теңдікке қойсақ, нәтижеде

$$\Phi'(t) + C_6\Phi(t) \leq 0 \tag{16}$$

жәй дифференциалдық теңсіздікке келеміз, мұндағы $C_6 = \left(\max\left\{\frac{1}{2|\gamma|}, \frac{1}{q}\right\}\right)^{-1}$, $p = q,\ m = 2$ жағдайда, ал $C_6 = C_5^{-1}$, $q = p = 2$ жағдайда. Бұған лемма 1 қолдансақ, нәтижеде (13) теңсіздіктің орынды екенін көреміз.

Алғыс. *Бұл мақала авторлардың Қазақстан Республикасы Білім және Ғылым Министрлігінің Ғылым комитетінің ЖТН № AP08052425 "Изотропты және анизотропты орталардағы біртекті емес сұйықтар үшін сызықты емес жалпыланған Кельвин-Фойгт теңдеулерін зерттеудің математикалық әдістерін жасау" 2020-2022 жж. ғылыми гранты мен екінші автордың «2019 ЖОО үздік отытушы» гранты аясында іске асырылды.*

Пайдаланған әдебиеттер тізімі:

1 *Соболев С.Л., Об одной задаче математической физики// Изд. Акад. Наук СССР Сер. Мат. 1954, Т.18, С. 3-50.*

2 *Павловский В.А. К теоретическому описанию слабых водных растворов полимеров// Докл. Акад. Наук СССР, –1971, –Т. 200, – С. 809-812.*

3 *Antontsev S.N., Khompysh Kh., Kelvin-Voight equation with p-Laplacian and damping term: existence, unigueness and blow-up// J. Math. Anal. Appl. -2017, – 466, –P. 1255-1273.*

4 *Antontsev S.N., Khompysh Kh., Generalized Kelvin–Voigt equations with p-Laplacian and source/absorption terms// J.Math. Anal. Appl. –2017, –456(1), –P. 99–116.*

5 *Oskolkov A.P. The uniqueness and global solvability of boundary-value problems for the equations of motion for aqueous solutions of polymers// J. Math. Sci. –1977, –T. 8, –C. 427--455.*

6 *Oskolkov A.P. Nonlocal problems for equations of Kelvin-Voigt fluids and their approximations// J. Math. Sci. –1997, –T. 87, –C. 3393-3408.*

7 *Звягин В.Г., Турбин М.В., Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта, Гидродинамика, СМФН, 31, РУДН, М., –2009, – С. 3–144.*

8 Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G., Blow-Up in Nonlinear Sobolev Type Equations// De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, De Gruyter, –2011, –T. 15, –P. 62–77.

9 Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S., Energy methods for free boundary problems, in: Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics / Birkhäuser Boston, Inc., Boston: MA, 2002.

References:

1. *Sobolev S.L., (1954) Ob odnoj zadache matematicheskoj fiziki[About one problem of mathematical physics]/ Izd. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. T.18, 3-50 (In Russian)*
2. *Pavlovskij V.A. K (1971) teoreticheskomu opisaniju slabyh vodnyh rastvorov polimerov[theoretical description of weak aqueous solutions of polymer]. Dokl. Akad. Nauk SSSR,T. 200, 809-812. (In Russian)*
3. *Antontsev S.N., Khompysh Kh., (2017) Kelvin-Voightequation with p-Laplacian and damping term: existence, unigueness and blow-up. J. Math. Anal. Appl. 466, 1255-1273.*
4. *Antontsev S.N., Khompysh Kh., (2017) Generalized Kelvin–Voigt equations with p-Laplacian and source/absorption terms. J.Math. Anal. Appl., 456(1), 99–116.*
5. *Oskolkov A.P. (1977) The uniqueness and global solvability of boundary-value problems for the equations of motion for aqueous solutions of polymers. J. Math. Sci. T. 8, C. 427-455.*
6. *Oskolkov A.P. (1997) Nonlocal problems for equations of Kelvin-Voigt fluids and their approximations. J. Math. Sci., T. 87, C. 3393-3408.*
7. *Zvjagin V.G., Turbin M.V. (2009) Issledovanie nachal'no-kraevyh zadach dlja matematicheskih modelej dvizhenija zhidkostej Kel'vina–Fojgta, Gidrodinamika [*Investigation of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin – Voigt fluids, Hydrodynamics*]. SMFN, 31, RUDN, M., 3–144. (In Russian)*
8. *Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G., (2011) Blow-Up in Nonlinear Sobolev Type Equations. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, De Gruyter, T. 15, 62–77.*
9. *Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S.,(2002) Energy methods for free boundary problems, in: Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston: MA.*