МРНТИ 27.23.25
УДК 517.588

https://doi.org/10.51889/2020-3.1728-7901.12

А.Р. Рыскан

Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан

ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ С ОПЕРАТОРАМИ *H* ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ГАУССА ОТ ЧЕТЫРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация

В работе получены формулы разложения и операторные тождества для гипергеометрических рядов Гаусса второго порядка четырех переменных по произведениям более простых известных гипергеометрических функций. Используется метод Чои – Хасанова, основанный на взаимообратных парах символических операторов $H(a,c)$ и $\bar{H}(a,c)$, введенных в 2011 году в статье Junesang Choi, Anvar Hasanov, «Applications of the operator $H(a,c)$ to the Humbert double hypergeometric functions». Полученные формулы разложения для гипергеометрических функций четырех переменных позволят изучить свойства этих функций. С помощью данных разложений можно исследовать вопросы разрешимости некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: Гипергеометрическая функция Аппеля, Гипергеометрическая функция Лауричелла, Гипергеометрическая функция Сарана, Гипергеометрический ряд четырех переменных, Формулы разложения, Операторные тождества, Обратные пары символических операторов.

Аңдатпа

А.Р. Рысқан

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университет, Алматы қ., Қазақстан

ЕКІНШІ РЕТТІ ТӨРТ АЙНЫМАЛЫСЫ БАР ГАУСС ГИПЕРГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ҚАТАРЛАРЫНЫҢ *H* ОПЕРАТОРЛАРЫМЕН ЖІКТЕУ ФОРМУЛАЛАРЫ

Бұл жұмыста белгілі карапайымырақ гипергеометриялық функциялардың көбейтінділері бойынша екінші ретті төрт айнымалысы бар Гаусс гипергеометриялық қатарларының жіктеу формулалары және операторлық тепе-теңдіктер алынды. 2011 жылы Junesang Choi, Anvar Hasanov, «Applications of the operator $H(a,c)$ to the Humbert double hypergeometric functions» мақаласында еңгізілген, $H(a,c)$ және $\bar{H}(a,c)$ символикалық операторлардың өзара кері жұптарына негізделген Чон-Хасанов әдісі қолданылады. Алынған төрт айнымалысы бар гипергеометриялық функциялар үшін жіктеу формулалары бұл функциялардың қасиеттерін зерттеуге мүмкіндік береді. Берілген жіктеулердің көмегімен кейбір дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердің шешілімділік мәселелерін зерттеуге болады.

Түйін сөздер: Аппель гипергеометриялық функциясы, Лауричелла гипергеометриялық функциясы, Саран гипергеометриялық функциясы, Төрт айнымалысы бар Гаусс гипергеометриялық қатары, Жіктеу формулалары, Операторлық тепе-теңдіктер, Символикалық операторлардың өзара кері жұптары.

Abstract

DECOMPOSITION FORMULAS WITH OPERATORS H FOR SECOND-ORDER GAUSS HYPERGEOMETRIC SERIES OF FOUR VARIABLES

Ryskan A.R.

Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

In this paper, decomposition formulas and operator identities for second-order Gauss hypergeometric series of four variables in products of simpler known hypergeometric functions were obtained. The Choi - Hasanov method is used, based on inverse pairs of symbolic operators $H(a,c)$ and $\bar{H}(a,c)$ introduced in 2011 in the article of Junesang Choi, Anvar Hasanov «Applications of the operator $H(a,c)$ to the Humbert double hypergeometric functions». The obtained expansion formulas for hypergeometric functions of four variables will allow us to study the properties of these functions. By means of these expansions, we can investigate the solvability of some boundary value problems for partial differential equations.

Keywords: Appel hypergeometric function, Lauricella hypergeometric function, Saran hypergeometric function, Hypergeometric series of four variables, Decomposition formulas, Operator identities, Inverse pairs of symbolic operators.

1. Введение

Разнообразные задачи, относящиеся практически ко всем важнейшим разделам математической физики, и отвечающих на актуальные технические вопросы, связано с применением специальных функций, таких как, функции Бесселя, Эрмита, гипергеометрическая функция Гаусса и т.д. Так, например, функции Бесселя активно применяются в решении задач гидродинамики, радиофизики, акустики, задач атомной и ядерной физики. Имеют место приложения бесселевых функций в задачах теорий упругости и теплопроводности (определение концентрации напряжения вблизи разломов, колебание пластинок). Множество функций, используемых в астрономии, раскладываются в ряды гипергеометрических функций. Также гипергеометрические функции многих комплексных переменных применимы к исследованию задач аналитического продолжения интегралов типа Меллина-Барнса, в теории суперструн, в теоретических аспектах алгебраической геометрии.

Гипергеометрические функции второго порядка от четырех переменных были введены в работах [1, 2]. Для одного класса гипергеометрических функций четырех переменных в работе [3] были получены формулы разложения и интегральные представления. Однако следует отметить, что разложения по произведениям более простых гипергеометрических функций можно получить не для всех введенных гипергеометрических функций второго порядка от четырех переменных.

В данной статье мы получаем формулы разложения, используя операторные тождества для следующих гипергеометрических функций от четырех переменных:

$$F_{17}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+n}\left(b_2\right)_{p+q}}{\left(c_1\right)_{m+p}\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!},\tag{1.1}$$

$$F_{19}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+n}\left(b_2\right)_{p+q}}{\left(c_1\right)_{m}\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_{p+q}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!},\tag{1.2}$$

$$F_{20}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+n}\left(b_2\right)_{p}\left(b_3\right)_q}{\left(c_1\right)_{m+q}\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_{p}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!},\tag{1.3}$$

$$F_{22}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+q}\left(b_2\right)_{n}\left(b_3\right)_p}{\left(c_1\right)_{m+n}\left(c_2\right)_p\left(c_3\right)_{q}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!},\tag{1.4}$$

$$F_{23}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+q}\left(b_2\right)_{n}\left(b_3\right)_p}{\left(c_1\right)_{m}\left(c_2\right)_{n+p}\left(c_3\right)_{q}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!},\tag{1.5}$$

2. Операторные тождества

С помощью взаимообратных символических операторов Берчнелла - Ченди [4, 5, 6] были получены формулы разложения для гипергеометрических функций Аппеля двух переменных по произведениям гипергеометрических функций одной переменной [7].

$$\nabla_{x,y}\left(h\right)=\frac{\Gamma\left(h\right)\Gamma\left(\delta_x+\delta_y+h\right)}{\Gamma\left(h+\delta_x\right)\Gamma\left(h+\delta_y\right)}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-\delta_x\right)_i\left(-\delta_y\right)_i}{\left(h\right)_i i!},\tag{2.1}$$

$$\Delta_{x,y}\left(h\right)=\frac{\Gamma\left(h+\delta_x\right)\Gamma\left(h+\delta_y\right)}{\Gamma\left(h\right)\Gamma\left(h+\delta_x+\delta_y\right)}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-\delta_x\right)_i\left(-\delta_y\right)_i}{\left(1-h-\delta_x-\delta_y\right)_i i!},\tag{2.2}$$

$$\Delta_{x,y}\left(h\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(h\right)_{2i}\left(-\delta_x\right)_i\left(-\delta_y\right)_i}{\left(h+i-1\right)_i\left(\delta_x+h\right)_i\left(\delta_y+h\right)_i i!},\tag{2.3}$$

$$\nabla_{x,y}(h)\Delta_{x,y}(g)=\frac{\Gamma(h)\Gamma(\delta_x+\delta_y+h)}{\Gamma(h+\delta_x)\Gamma(h+\delta_y)}\frac{\Gamma(g+\delta_x)\Gamma(g+\delta_y)}{\Gamma(g)\Gamma(g+\delta_x+\delta_y)}, \tag{2.4}$$

$$\nabla_{x,y}(h)\Delta_{x,y}(g)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(g-h)_i(g)_{2i}(-\delta_x)_i(-\delta_y)_i}{(h)_i(g+i-1)_i(\delta_x+g)_i(\delta_y+g)_i\,i!}, \tag{2.5}$$

$$\nabla_{x,y}(h)\Delta_{x,y}(g)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(h-g)_i(-\delta_x)_i(-\delta_y)_i}{(h)_i(1-g-\delta_x-\delta_y)_i\,i!}, \tag{2.6}$$

где

$$\delta_x=x\frac{\partial}{\partial x},\ \ \delta_y=y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.7}$$

Для разложения многомерных гипергеометрических функций была введена следующая взаимообратная пара символических операторов [8]:

$$\tilde{\nabla}_{x_1;x_2,\dots,x_r}(h)=\frac{\Gamma(h)\Gamma(h+\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_r)}{\Gamma(h+\delta_1)\Gamma(h+\delta_2+\dots+\delta_r)}=\sum_{k_2,k_3,\dots,k_r=0}^{\infty}\frac{(-\delta_1)_{k_2+\dots+k_r}(-\delta_2)_{k_2}\cdots(-\delta_r)_{k_r}}{(h)_{k_2+\dots+k_r}k_2!k_3!\cdots k_r!}, \tag{2.8}$$

$$\tilde{\Delta}_{x_1;x_2,\dots,x_r}(h)=\frac{\Gamma(h+\delta_1)\Gamma(h+\delta_2+\dots+\delta_r)}{\Gamma(h)\Gamma(h+\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_r)}=\sum_{k_2,k_3,\dots,k_r=0}^{\infty}\frac{(-\delta_1)_{k_2+\dots+k_r}(-\delta_2)_{k_2}\cdots(-\delta_r)_{k_r}}{(1-h-\delta_2-\dots-\delta_r)_{k_2+\dots+k_r}k_2!k_3!\cdots k_r!}, \tag{2.9}$$

$$\text{где}\ \ \delta_{x_j}=x_j\frac{\partial}{\partial x_j},\ j=1,\dots,r,\ r\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}, \tag{2.10}$$

как многомерный аналог вышеуказанных операторов (2.1) – (2.6).

В работах [9, 10] были введены взаимно обратные операторы

$$H_{x_1,\dots x_r}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\delta_1+\dots+\delta_r)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+\delta_1+\dots+\delta_r)}=\sum_{k_1,\dots,k_r=0}^{\infty}\frac{(\beta-\alpha)_{k_1+\dots+k_r}(-\delta_1)_{k_1}\cdots(-\delta_r)_{k_r}}{(\beta)_{k_1+\dots+k_r}k_1!\cdots k_r!}, \tag{2.11}$$

$$\bar{H}_{x_1,\dots x_r}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+\delta_1+\dots+\delta_r)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\delta_1+\dots+\delta_r)}=\sum_{k_1,\dots k_r=0}^{\infty}\frac{(\beta-\alpha)_{k_1+\dots+k_r}(-\delta_1)_{k_1}\cdots(-\delta_r)_{k_r}}{(1-\alpha-\delta_1-\dots-\delta_r)_{i+j}\,i!\,j!}, \tag{2.12}$$

$$\text{где}\ \delta_{x_j}=x_j\frac{\partial}{\partial x_j},\ j=1,\dots,r,\ r\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}. \tag{2.13}$$

и получены формулы разложения для гипергеометрических функций от двух переменных.

Для гипергеометрических функций четырех переменных (1.1) – (1.5) имеют место следующие операторные тождества:

$$F_{17}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)=H_t(a_2,c_3)(1-t)^{-b_2}F_F\left(a_1;b_1,b_2;c_2,c_1;y,\frac{z}{1-t},x\right), \tag{2.14}$$

$$(1-t)^{-b_2}F_F\left(a_1;b_1,b_2;c_2,c_1;y,\frac{z}{1-t},x\right)=\bar{H}_t(a_2,c_3)F_{17}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t), \tag{2.15}$$

$$F_{19}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)=H_{z.t}(b_2,c_3)(1-t)^{-a_2}(1-z)^{-a_1}F_4\left(a_1,b_1;c_1,c_2;\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right), \tag{2.16}$$

$$(1-t)^{-a_2}(1-z)^{-a_1}F_4\left(a_1,b_1;c_1,c_2;\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)=\bar{H}_{z.t}(b_2,c_3)F_{19}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t), \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}&F_{20}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)\\&=H_z(b_2,c_3)(1-z)^{-a_1}F_R\left(a_1,a_2,b_1,b_3;c_2,c_1;\frac{y}{1-z},t,\frac{x}{1-z}\right),\end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}&(1-z)^{-a_1}F_R\left(a_1,a_2,b_1,b_3;c_2,c_1;\frac{y}{1-z},t,\frac{x}{1-z}\right)\\&=\bar{H}_z(b_2,c_3)F_{20}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t),\end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}&F_{22}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)\\&=H_z(b_3,c_2)H_t(a_2,c_3)(1-z)^{-a_1}(1-t)^{-b_1}F_1\left(a_1;b_1,b_2;c_1;\frac{x}{(1-z)(1-t)},\frac{y}{1-z}\right),\end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}&(1-z)^{-a_1}(1-t)^{-b_1}F_1\left(a_1;b_1,b_2;c_1;\frac{x}{(1-z)(1-t)},\frac{y}{1-z}\right)\\&=\bar{H}_z(b_3,c_2)\bar{H}_t(a_2,c_3)F_{22}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t),\end{aligned} \quad (2.21)$$

$$F_{23}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)=H_t(a_2,c_3)(1-t)^{-b_1}F_G\left(a_1;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2;\frac{x}{1-t},y,z\right), \quad (2.22)$$

$$(1-t)^{-b_1}F_G\left(a_1;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2;\frac{x}{1-t},y,z\right)=\bar{H}_t(a_2,c_3)F_{23}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t), \quad (2.23)$$

где F_1, F_4 - гипергеометрические функции Аппеля) [7, 11], а F_F, F_G, F_R - функции Сарана [12, 13]:

$$F_F(\alpha;\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y,z)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n+p}(\beta_1)_{m+p}(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_{n+p}\,m!n!p!}x^my^nz^p,$$

$$F_G(\alpha;\beta_1,\beta_2,\beta_3;\gamma_1,\gamma_2;x,y,z)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n+p}(\beta_1)_m(\beta_2)_n(\beta_3)_p}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_{n+p}\,m!n!p!}x^my^nz^p,$$

$$F_R(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y,z)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+p}(\alpha_2)_n(\beta_1)_{m+p}(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_{n+p}\,m!n!p!}x^my^nz^p.$$

Справедливость операторных тождеств (2.14) – (2.23) доказывается с помощью преобразования Меллина-Барнса [14].

3. Формулы разложения

Целью настоящей работы является получение следующих формул разложения для функций Гаусса четырех переменных (1.1) – (1.5):

$$\begin{aligned}&F_{17}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)\\&=(1-t)^{-b_2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(b_2)_i(c_3-a_2)_i}{(c_3)_i\,i!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^iF_F\left(a_1;b_1,b_2+i;c_2,c_1;y,\frac{z}{1-t},x\right),\end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(1-t)^{-b_2} F_F\left(a_1;b_1,b_2;c_2,c_1;y,\frac{z}{1-t},x\right) \\ =\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(b_2)_i (c_3-a_2)_i}{(c_3)_i\, i!} t^i F_{17}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2+i;c_1,c_2,c_3+i;x,y,z,t\right), \tag{3.2}$$

$$F_{19}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=(1-z)^{-a_1}(1-t)^{-a_2} \\ \times\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j}(a_1)_i (a_2)_j (c_3-b_2)_{i+j}}{(c_3)_{i+j}\, i!\, j!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^i\left(\frac{t}{1-t}\right)^j F_4\left(a_1+i,b_1;c_1,c_2;\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right), \tag{3.3}$$

$$(1-t)^{-a_2}(1-z)^{-a_1} F_4\left(a_1,b_1;c_1,c_2;\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right) \\ =\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_i (a_2)_j (c_3-b_2)_{i+j}}{(c_3)_{i+j}\, i!\, j!} z^i t^j F_{19}^{(4)}\left(a_1+i,a_2+j,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3+i+j;x,y,z,t\right), \tag{3.4}$$

$$F_{20}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=(1-z)^{-a_1} \\ \times\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (a_1)_i (c_3-b_2)_i}{(c_3)_i\, i!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^i F_R\left(a_1+i,a_2,b_1,b_3;c_2,c_1;\frac{y}{1-z},t,\frac{x}{1-z}\right), \tag{3.5}$$

$$(1-z)^{-a_1} F_R\left(a_1,a_2,b_1,b_3;c_2,c_1;\frac{y}{1-z},t,\frac{x}{1-z}\right) \\ =\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_1)_i (c_3-b_2)_i}{(c_3)_i\, i!} z^i F_{20}^{(4)}\left(a_1+\mathrm{i},a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3+\mathrm{i};x,y,z,t\right), \tag{3.6}$$

$$F_{22}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=(1-z)^{-a_1}(1-t)^{-b_1} \\ \times\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j}(a_1)_i (b_1)_j (c_2-b_3)_i (c_3-a_2)_j}{(c_2)_i (c_3)_j\, i!\, j!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^i\left(\frac{t}{1-t}\right)^j \\ \times F_1\left(a_1+i;b_1+j,b_2;c_1;\frac{x}{(1-z)(1-t)},\frac{y}{1-z}\right), \tag{3.7}$$

$$(1-z)^{-a_1}(1-t)^{-b_1} F_1\left(a_1;b_1,b_2;c_1;\frac{x}{(1-z)(1-t)},\frac{y}{1-z}\right) \\ =\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_i (b_1)_j (c_2-b_3)_i (c_3-a_2)_j}{(c_2)_i (c_3)_j\, i!\, j!} z^i t^j F_{22}^{(4)}\left(a_1+i,a_2,b_1+j,b_2,b_3;c_1,c_2+i,c_3+j;x,y,z,t\right), \tag{3.8}$$

$$F_{23}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right) \\ =(1-t)^{-b_1}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (b_1)_i (c_3-a_2)_i}{(c_3)_i\, i!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^i F_G\left(a_1;b_1+\mathrm{i},b_2,b_3;c_1,c_2;\frac{x}{1-t},y,z\right), \tag{3.9}$$

$$(1-t)^{-b_1} F_G\left(a_1;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2;\frac{x}{1-t},y,z\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(b_1)_i(c_3-a_2)_i}{(c_3)_i\, i!}t^i F_{23}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1+i,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3+i;x,y,z,t\right). \tag{3.10}$$

Формулы разложения (3.1) – (3.10) доказываются с помощью операторных тождеств (2.14) – (2.23). В доказательстве помимо символических операторов (2.1) – (2.9), используются следующие операторные тождества [15, p. 93]:

$$(\delta+\alpha)_n\left\{f(\xi)\right\}=\xi^{1-\alpha}\frac{d^n}{d\xi^n}\left\{\xi^{\alpha+n-1}f(\xi)\right\},$$

$$(-\delta)_n\left\{f(\xi)\right\}=(-\xi)^n\frac{d^n}{d\xi^n}\left\{f(\xi)\right\},\left(\delta=\xi\frac{d}{d\xi};\alpha\in\mathbb{C};n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\};\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}\right),$$

где $f(\xi)$ - аналитическая функция.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта № AP05131026 МОН РК

Список использованной литературы:

1 Exton H. Certain hypergeometric functions of four variables // Bull. Soc. Math. Grece (N.S.). – 1972. – V. 13. – P. 104-113

2 Sharma C., Parihar C. L. Hypergeometric functions of four variables (I) // J. Indian Acad. Math. – 1989. – V. 11. No 2. – P. 99-115

3 Exton H. Multiple hypergeometric functions and applications / New York: John Wiley and Sons, 1976. – книга

4 Burchnall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell's double hypergeometric functions // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1940. No 11. – P. 249-270

5 Burchnall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell's double hypergeometric functions. II // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1941. No 12. – P. 112-128

6 Chaundy T.W. Expansions of hypergeometric functions // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1942. No 13. – P. 159-171

7 Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. Higher Transcendental Functions. V. I / New York, Toronto and London: McGraw–Hill, 1953. – 302 p.

8 Hasanov A., Srivastava H.M. Decomposition Formulas Associated with the Lauricella Multivariable Hypergeometric Functions // Computers and Mathematics with Applications. – 2007. – V. 53. No 7. – P. 1119-1128

9 Choi J., Hasanov A. Applications of the operator $H(\alpha,\beta)$ to the Humbert double hypergeometric functions // Computers and Mathematics with Applications. – 2011. No 61. – P. 663–671

10 Hasanov A., Turaev M., Choi J. Decomposition formulas for the generalized hypergeometric ${}_4F_3$ function // Honam Mathematical journal. – 2010. – V. 32. No 1. – P. 1-16

11 Appell P., Kampe de Feriet J. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite / Paris: Gauthier - Villars, 1926. – 440 p.

12 Saran S. Relations between functions contiguous to certain hypergeometric functions of three variables // Ganita. – 1954. No 5. – P. 69-76

13 Saran S. Transformations of certain hypergeometric functions of three variables // Acta Math. – 1955. – V. 93, No 3-4. – P. 292-312

14 Marichev O.I., Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendental Functions: Theory and Algorithmic Tables / Wiley, New York, Brisbane, Chichester and Toronto: Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), 1982.

15 Poole E. G. Introduction to the Theory of Linear Differential Equations / Oxford: Clarendon (Oxford University) Press, 1936. – 208 p.

References

1 Exton H. (1972) Certain hypergeometric functions of four variables. Bull. Soc. Math. Grece (N.S.). V. 13. 104-113. (In English)

2 Sharma C., Parihar C. L. (1989) Hypergeometric functions of four variables (I). J. Indian Acad. Math. V. 11. No 2. 99-115. (In English)

3 Exton H. (1976) Multiple hypergeometric functions and applications. New York: John Wiley and Sons. (In English)

4 Burchnall J.L., Chaundy T.W. (1940) Expansions of Appell's double hypergeometric functions/ Quart. J. Math. Oxford Ser. No 11. 249-270. (In English)

5 Burchnall J.L., Chaundy T.W. (1941) Expansions of Appell's double hypergeometric functions. II. Quart. J. Math. Oxford Ser. No 12. 112-128. (In English)

6 Chaundy T.W. (1942) Expansions of hypergeometric functions. Quart. J. Math. Oxford Ser. No 13. 159-171

7 Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. (1953) Higher Transcendental Functions. V. I. New York, Toronto and London: McGraw–Hill. 302. (In English)

8 Hasanov A. Srivastava H.M. (2007) Decomposition Formulas Associated with the Lauricella Multivariable Hypergeometric Functions. Computers and Mathematics with Applications. V. 53. No 7. 1119-1128. (In English)

9 Choi J., Hasanov A. (2011) Applications of the operator $H(\alpha,\beta)$ *to the Humbert double hypergeometric functions. Computers and Mathematics with Applications. No 61. 663–671. (In English)*

10 Hasanov A., Turaev M., Choi J. (2010) Decomposition formulas for the generalized hypergeometric ${}_4F_3$ *function. Honam Mathematical journal. V. 32. No 1. 1-16. (In English)*

11 Appell P., Kampe de Feriet J. (1926) Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite. Paris: Gauthier - Villars. 440. (In English)

12 Saran S. (1954) Relations between functions contiguous to certain hypergeometric functions of three variables. Ganita. No 5. 69-76. (In English)

13 Saran S. (1955) Transformations of certain hypergeometric functions of three variables. Acta Math. V. 93, No 3-4. 292-312. (In English)

14 Marichev O.I., (1982) Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendental Functions: Theory and Algorithmic Tables. Wiley, New York, Brisbane, Chichester and Toronto: Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester). (In English)

15 Poole E. G. (1936) Introduction to the Theory of Linear Differential Equations. Oxford: Clarendon (Oxford University) Press. 208. (In English)