МРНТИ 27.25.19
УДК 517.51

https://doi.org/10.51889/2022-1.1728-7901.05

А.Б. Утесов[1], *Г.И. Утесова*[1]*

[1]*Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан*
ugi_a@mail.ru

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО ЧИСЛОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

Аннотация

Решения многих уравнений в частных производных представляются рядами или интегралами. Поэтому возникает задача приближения (дискретизации) решений вычислительными агрегатами, построенными по числовой информации, полученной от начальных, граничных или краевых условий. В данной работе в рамках постановки под названием «Компьютерный (вычислительный) поперечник» изучена задача дискретизации решений уравнения теплопроводности по числовой информации конечного объема, полученной от начального условия, принадлежащего многомерному периодическому классу Соболева. Именно, когда в качестве числовой информации рассматриваются линейные функционалы, определенные на линейной оболочке класса Соболева, во-первых, установлен точный порядок погрешности оптимальной дискретизации в метрике пространства Лебега; во-вторых, найдена предельная погрешность оптимального вычислительного агрегата; в-третьих, доказано, что с лучшей (по порядку) предельной погрешностью вычислительных агрегатов по тригонометрическим коэффициентам Фурье начального условия не существуют.

Ключевые слова: дискретизация решений, вычислительный агрегат, компьютерный (вычислительный) поперечник, числовые информации, предельная погрешность, тригонометрические коэффициенты Фурье.

Аңдатпа

Ә.Б. Өтесов[1], *Г.І. Өтесова*[1]
[1]*Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан*

ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМДЕРІН САНДЫҚ МӘЛІМЕТТЕР БОЙЫНША ДИСКРЕТТЕУ ТУРАЛЫ

Дербес туындылы теңдеулердің көбінің шешімдері қатарлар немесе интегралдар түрінде болады. Сондықтан шешімдерді бастапқы, шекаралық және шеттік шарттардан алынған сандық мәліметтер арқылы құрылған есептеу агрегаттарымен жуықтау (дискреттеу) есебі қойылады. Бұл жұмыста «Компьютерлік (есептеуіш) диаметр» деген атауға ие қойылым аясында жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімдерін көпөлшемді периодты Соболев класына тиесілі бастапқы шарттардан алынған ақырлы көлемдегі сандық мәліметтер бойынша дискреттеу есебі қарастырылған. Дәл айтқанда, сандық мәлімет ретінде Соболев класының сызықтық қабықшасында анықталған сызықтық функционалдар қарастырылғанда, біріншіден, Лебег кеңістігі метрикасында оптималды дискреттеу қателігінің дәл реті анықталған; екіншіден, оптималды есептеу агрегатының шектік қателігі табылған; үшіншіден, бастапқы шарттың тригонометриялық Фурье коэффициентері бойынша құрылған кез келген есептеу агрегатының шектік қателігін (реті бойынша) жақсартуға болмайтыны дәлелденген.

Түйін сөздер: шешімдерді дискреттеу, есептеу агрегаты, компьютерлік (есептеуіш) диаметр, сандық мәліметтер, шектік қателік, тригонометриялық Фурье коэффициентері.

Abstract

ON DISCRETIZATION OF SOLUTIONS OF THE HEAT EQUATION BY NUMERICAL INFORMATION

Utessov A.B.[1], *Utessova G.I.*[1]
[1]*Aktobe regional university named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan*

Solutions to many partial differential equations are represented by series or integrals. Therefore, theproblemarises of approximating (discretizing) solutions by computational units constructed from numerical information obtained from the initial, boundary or boundary conditions. In this paper, within the framework of a statement titled "Computational (numerical) diameter", we study the discretization problem for solutions of the heat equation from numerical information of a finite volume obtained from an initial condition belonging to the multidimensional periodic Sobolev class. Namely, when linear functionals defined on the linear hull of the Sobolev class are considered as numerical information, first, the exact order of the error of optimal discretization in the metric of the Lebesgue space is established; secondly, the limiting error of the optimal computing unit is found; thirdly, it is provided that there is no initial condition with the best (in order) limiting error of computational aggregates in terms of trigonometric Fourier coefficients.

Keywords: discretization of solutions, computing unit, computational (numerical) diameter, numerical informations, limiting error, trigonometric Fourier coefficients.

§1. Постановка задачи и формулировка теоремы

В К(В)П – постановке исходным является величина

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N; T; F)_Y = \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N\left(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N); T; F\right)_Y,$$

где $\delta_N\left(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N); T; F\right)_Y =$

$$= \sup_{f \in F} \sup_{\left|\gamma_N^{(1)}\right| \le 1, \ldots, \left|\gamma_N^{(N)}\right| \le 1} \left\| Tf(\cdot) - \varphi_N\left(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N, \ldots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N; \cdot\right)\right\|_Y.$$

Здесь ε_N – неотрицательная последовательность, F – класс функций, заданных на Ω_F, а Y – нормированное пространство функций, заданных на Ω_Y.

Далее, через T обозначим оператор, действующий из F в Y, D_N есть множество вычислительных агрегатов $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$, где $l^{(N)} = \left(l_N^{(1)}, \ldots, l_N^{(N)}\right)$ набор функционалов $l_N^{(1)}: F \mapsto C, \ldots, l_N^{(N)}: F \mapsto C$, а φ_N есть функция $\varphi_N(z_1, \ldots, z_N; y): C^N \times \Omega_Y \mapsto C$, которая при всяком фиксированном $(z_1, \ldots, z_N) \in C^N$ как функция от переменной y принадлежит пространству Y.

Задача восстановления оператора $T: F \mapsto Y$ по неточной числовой информации $l^{(N)}$, оформленная под названием «Компьютерный (вычислительный) поперечник», заключается в последовательном решении трех задач: К(В)П – 1, К(В)П -2 и К(В)П - 3.(более подробно см., напр. [1]).

В работах [2 - 6] полностью решены К(В)П - задачи при различных конкретизациях T, D_N, F и Y.

Пусть $u(t, x; f)$ есть классическое решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \quad (0 \le t < +\infty, x = (x_1, \ldots, x_s) \in R^s)$$

с начальным условием $u(0, x; f) = f(x)$.

В этой работе в рамках К(В)П – постановки решена задача дискретизации решений $(Tf)(\cdot) = u(\cdot; f)$ уравнения теплопроводности с начальным условием из многомерного периодического класса Соболева $W_2^r \equiv W_2^r(0,1)^s$ при $D_N = L^{(N)} \times \{\varphi_N\}$, $Y = L^{q,\infty} \equiv L^{q,\infty}\left((0,1)^s \times [0;+\infty)\right)$, где $r > 0,\ 2 \le q \le \infty$, $L^{(N)}$ есть множество линейных функционалов $l_N^{(1)} : W_2^r \mapsto C, \ldots, l_N^{(N)} : W_2^r \mapsto C$, определенных на линейной оболочке класса W_2^r (определения класса Соболева W_2^r, пространства $L^{q,\infty}$, а также рассматриваемого ниже класса Никольского – Бесова $B_{2,\theta}^r(0,1)^s$ см., напр. в [7]).

Далее, для краткости, положим $\delta_N\left(\varepsilon_N;(l^{(N)},\varphi_N)\right)_Y \equiv \delta_N\left(\varepsilon_N;(l^{(N)},\varphi_N);T;F\right)_Y$, $\delta_N(\varepsilon_N;D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N;D_N;T;F)_Y$.

Теорема. Пусть даны действительные числа $s(s=1,2,3,\ldots), r>s/2, q\geq 2$ и пусть $N=(2n+1)^s, n=1,2,\ldots$ Тогда справедливы следующие утверждения:

К(В)П – 1. $\delta_N\left(0;L^{(N)}\times\{\varphi_N\}\right)_{L^{q,\infty}} \underset{s,r,q}{\succ\prec} \delta_N\left(0;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_{L^{q,\infty}} \underset{s,r,q}{\succ\prec} \dfrac{N^{1/2-1/q}}{N^{r/s}}$,

где пара $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ состоит из функционалов $\bar{l}_N^{(\tau)}(f)=\hat{f}\left(\overline{m}^{(\tau)}\right), \tau=1,\ldots,N$ и функции

$\overline{\varphi}_N(z_1,\ldots,z_N;t,x)=\sum\limits_{\tau=1}^{N} z_\tau e^{-4\pi^2\left(\overline{m}^{(\tau)},\overline{m}^{(\tau)}\right)t} e^{2\pi i(\overline{m}^{(\tau)},x)}$, а s – мерные целочисленные векторы $\overline{m}^{(1)},\ldots,\overline{m}^{(N)}$ такие, что $\overline{m}^{(i)}\neq\overline{m}^{(j)}$ при $i\neq j$ и $\bigcup\limits_{\tau=1}^{N}\left\{\overline{m}^{(\tau)}\right\}=A_n$,

$A_n=\{m\in Z^s : |m_1|\leq n,\ldots,|m_s|\leq n\}$.

К(В)П – 2. Для вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ величина $\bar{\varepsilon}_N=\dfrac{1}{N^{r/s}\sqrt{N}}$ является предельной погрешностью:

во-первых,

$$\delta_N\left(\bar{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_{L^{q,\infty}} \underset{s,r,q}{\succ\prec} \delta_N\left(0;L^{(N)}\right)_{L^{q,\infty}};$$

во-вторых, для любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\delta_N\left(\eta_n\bar{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_{L^{q,\infty}}}{\delta_N\left(0;L^{(N)}\right)_{L^{q,\infty}}}=+\infty;$$

К(В)П – 3. Для всякого вычислительного агрегата

$$(l^{(N)},\varphi_N)(x,t)\equiv\varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right),\ldots,\hat{f}\left(m^{(N)}\right);x,t\right)$$

при любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\delta_N\left(\eta_n\bar{\varepsilon}_N;\varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right),\ldots,\hat{f}\left(m^{(N)}\right);x,t\right)\right)_{L^{q,\infty}}}{\delta_N\left(0;L^{(N)}\right)_{L^{q,\infty}}}=+\infty\,. \quad (1)$$

§2. Доказательство теоремы

Для конечного множества E через $|E|$ обозначим количество его элементов. Как обычно, $[a]$ есть целая часть числа a. Всюду $m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s$. Ради краткости, запись $\|f\|_{L^q}$ заменим на $\|f\|_q$.

Сначала оценим снизу величину $\delta_N\left(\bar{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\,\bar{\varphi}_N\right)\right)_{L^{q,\infty}}$.

В работе [8] установлены следующие соотношения:

$$\delta_N\left(0;L^{(N)}\times\{\varphi_N\};Tf(\cdot)=u(\cdot;f);B^r_{2,\theta}(0,1)^s\right)_{L^{q,\infty}} \underset{s,r,q}{\succ\prec} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^{r/s}}, \quad (2)$$

$$\delta_N\left(0;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right);(Tf)(\cdot)=u(\cdot;f);B^r_{2,\theta}(0,1)^s\right)_{L^{q,\infty}} \underset{s,r,q}{\succ\prec} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^{r/s}}. \quad (3)$$

Поэтому, учитывая, что $B^r_{2,2}\equiv W^r_2$, в силу оценки

$$\delta_N\left(0;L^{(N)}\times\{\varphi_N\}\right)_{L^{q,\infty}} \leq \delta_N\left(\varepsilon_N;L^{(N)}\times\{\varphi_N\}\right)_{L^{q,\infty}}$$

и (2), имеем

$$\frac{N^{1/2-1/q}}{N^{r/s}} \underset{s,r,q}{<<} \delta_N\left(0;L^{(N)}\times\{\varphi_N\};(Tf)(\cdot)=u(\cdot;f);W^r_2(0,1)^s\right)_{L^{q,\infty}}. \quad (4)$$

Так как $r>s/2$, то $u(t,x;f)=\sum\limits_{m\in Z^s}\hat{f}(m)e^{-4\pi^2(m,m)t}e^{2\pi i(m,x)}$

(см., напр. лемму В из [8]).

Следовательно, для всех $\gamma_N^{(\tau)}$ таких, что $\left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\leq 1(\tau=1,\ldots,N)$ имеет место равенство

$$u(t,x;f)-\bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N,\ldots,\bar{l}_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\bar{\varepsilon}_N;t,x\right)=$$

$$=\sum_{m\in Z^s\setminus A_n}\hat{f}(m)e^{-4\pi^2(m,m)t}e^{2\pi i(m,x)}+$$

$$+\sum_{\tau=1}^{N}\left(-\gamma_N^{(\tau)}\right)\bar{\varepsilon}_N\, e^{-4\pi^2\left(\overline{m}^{(\tau)},\overline{m}^{(\tau)}\right)t} e^{2\pi i\,(\overline{m}^{(\tau)},x)},$$

откуда, учитывая включение $W_2^r(0,1)^s \subset H_2^r(0,1)^s \equiv B_{2,\infty}^r(0,1)^s$, в силу (3) при каждом фиксированном $t\in[0,+\infty)$ получим

$$\left\|u(t,\cdot;f)-\bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N,\ldots,\bar{l}_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\bar{\varepsilon}_N;t,\cdot\right)\right\|_q \underset{s,r,q}{<<}$$

$$\underset{s,r,q}{<<}\frac{N^{1/2-1/q}}{N^{r/s}}+\bar{\varepsilon}_N\left\|\sum_{\tau=1}^{N}\left(-\gamma_K^{(\tau)}\right)e^{-4\pi^2\left(\overline{m}^{(\tau)},\overline{m}^{(\tau)}\right)t} e^{2\pi i\,(\overline{m}^{(\tau)},\cdot)}\right\|_q. \quad (5)$$

Поскольку

$$\left\|\sum_{\tau=1}^{N}\left(-\gamma_K^{(\tau)}\right)e^{-4\pi^2\left(\overline{m}^{(\tau)},\overline{m}^{(\tau)}\right)t} e^{2\pi i\,(\overline{m}^{(\tau)},\cdot)}\right\|_2 \le \sqrt{N} \quad \text{и}$$

$$\left\|\sum_{\tau=1}^{N}\left(-\gamma_K^{(\tau)}\right)e^{-4\pi^2\left(\overline{m}^{(\tau)},\overline{m}^{(\tau)}\right)t} e^{2\pi i\,(\overline{m}^{(\tau)},\cdot)}\right\|_\infty \le N,$$

то согласно неравенствам $\|g\|_q \le \|g\|_2^{2/q}\,\|g\|_\infty^{1-2/q}$ (см., напр. [9, стр. 50]) и (5), имеем

$$\left\|u(t,\cdot;f)-\bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N,\ldots,\bar{l}_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\bar{\varepsilon}_N;t,\cdot\right)\right\|_q \underset{s,r,q}{<<}\frac{N^{1/2-1/q}}{N^{r/s}},$$

откуда, в силу произвольности переменной t, чисел $\gamma_N^{(\tau)}(\tau=1,\ldots,N)$ и функции f, получим

$$\delta_N\left(\bar{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\,\bar{\varphi}_N\right)\right)_{L^{q,\infty}} \underset{s,r,q}{<<}\frac{N^{1/2-1/q}}{N^{r/s}}. \quad (6)$$

Так как

$$\delta_N\left(0;L^{(N)}\times\{\varphi_N\}\right)_{L^{q,\infty}} \le \delta_N\left(0;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_{L^{q,\infty}} \le \delta_N\left(\bar{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_{L^{q,\infty}},$$

то из (4) и (6) вытекают доказательства К(В)П-1 и первой части К(В)П-2.

Далее, установив справедливость равенства (1) мы одновременно докажем К(В)П-3 и и вторую часть К(В)П-2, и тем самым завершаем доказательство теоремы.

Для каждого $n=1,2,3,\ldots$ определим множество

$$H_n=\left\{m\in Z^s:|m_1|\le\left\lfloor N^{1/s}\beta_n^{-\alpha/s}\right\rfloor,\ldots,|m_s|\le\left\lfloor N^{1/s}\beta_n^{-\alpha/s}\right\rfloor\right\},$$

где

$N=N(n),\ \beta_n=\min\{\eta_N,\ \ln(N+1)\}$, α есть некоторое положительное число из интервала

$$\left(\frac{2s}{2r+s},\frac{q}{q-1}\right).$$

Здесь же заметим, что условие $r>s/2$ обеспечивает выполнение неравенства $\dfrac{2s}{2r+s}<\dfrac{q}{q-1}$.

Так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=+\infty$, то существует номер n_0 такой, что для всех $n\ge n_0$ имеет место неравенство $\beta_n\ge 1$.

Легко проверим, что при некотором $C(r,s)>0$ функция

$$h_n(x)=C(r,s)\beta_n\bar{\varepsilon}_N\sum_{m\in H_n}e^{2\pi i(m,x)},n\ge n_0$$

принадлежит классу $W_2^r(0,1)^s$.

Из неравенства $\left\|h_n\right\|_\infty \underset{s}{>>}\beta_n\bar{\varepsilon}_N\,|H_n|$ и $\left|H_n\right|\succ\prec N\cdot\beta_n^{-\alpha}$ получим $\left\|h_n\right\|_\infty \underset{s}{>>}\dfrac{\sqrt{N}}{N^{r/s}}\beta_n^{1-\alpha}$.

Поэтому, согласно неравенству разных метрик С.М. Никольского [10, стр.256] и соотношения

$$\delta_N\left(0;L^{(N)}\times\{\varphi_N\}\right)_{L^{q,\infty}}\underset{s,r,q}{\succ\prec}\frac{N^{1/2-1/q}}{N^{r/s}},$$

имеет место неравенство

$$\|h_n\|_q\underset{s,r,q}{>>}\delta_N\left(0;L^{(N)}\times\{\varphi_N\}\right)_{L^{q,\infty}}\beta_n^{1-\alpha(1-1/q)}. \tag{7}$$

Для каждого $n\ge n_0$ определим наборы

$$\left(\tilde{\gamma}_N^{(1)},\ldots,\tilde{\gamma}_N^{(N)}\right)\text{ и }\left(\tilde{\omega}_N^{(1)},\ldots,\tilde{\omega}_N^{(N)}\right)$$

с компонентами $\tilde{\gamma}_N^{(\tau)}=-\dfrac{\hat{h}_n\left(m^{(\tau)}\right)}{\bar{\varepsilon}_N\eta_N}$ и $\tilde{\omega}_N^{(\tau)}=-\dfrac{\left(-\hat{h}_n\right)\left(m^{(\tau)}\right)}{\bar{\varepsilon}_N\eta_N},\tau=1,\ldots,N=N(n)$

соответственно.

Тогда для всякого $(l^{(N)},\varphi_N)(x,t)\equiv\varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right),\ldots,\hat{f}\left(m^{(N)}\right);x,t\right)$ имеем

$$\sup_{f\in W_2^r}\ \sup_{\left|\gamma_N^{(1)}\right|\le 1,\dots,\left|\gamma_N^{(N)}\right|\le 1}\Big\| u(\cdot;f)-\varphi_N\Big(\hat{f}\left(m^{(1)}\right)+\gamma_N^{(1)}\eta_N\bar{\varepsilon}_N,\dots,$$

$$\hat{f}\left(m^{(N)}\right)+\gamma_N^{(N)}\eta_N\bar{\varepsilon}_N;\cdot\Big)\Big\|_{L^{q,\infty}}\ge$$

$$\ge\max\left\{\left\|h_n(\cdot)-\varphi_N(0,\dots,0;0,\cdot)\right\|_q,\left\|(-h_n)(\cdot)-\varphi_N(0,\dots,0;0,\cdot)\right\|_q\right\}\ge\left\|h_n\right\|_q.$$

Следовательно, в силу неравенства (7), получим

$$\delta_N\left(\eta_N\bar{\varepsilon}_N;(l^{(N)},\varphi_N)\right)_{L^{q,\infty}}\underset{s,r,q}{>>}\delta_N\left(0;L^{(N)}\times\{\varphi_N\}\right)_{L^{q,\infty}}\beta_n^{1-\alpha(1-1/q)}. \quad (8)$$

Поскольку $1-\alpha(1-1/q)>0$, то из (8) следует равенство (1).

Теорема доказана.

Список использованных источников:

1 Temirgaliev N., Zhubanisheva A.Zh. Computational (Numerical) diameter in the context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ),N1, 89 - 97(2019) https://doi.org/10.3103/S1066369X19010109

2 Temirgaliev N., Abikenova Sh.K., Zhubanisheva A.Zh., Taugynbaeva G.E. Discretization of solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation and Function Recovery with the help Computational (Numerical) Diameter, Russian Mathematics (Iz. VUZ),57(8), 75 – 80(2013). https://doi.org/10.3103/S1066369X13080094

3 Temirgaliev N., Zhubanisheva A.Zh. Order Estimates of the Norms of derivates of Functions with Zero Values of Linear Functionals and Their Applications, Russian Mathematics (Iz. VUZ), 61(3), 77 82 (2017). https://doi.org/10.3103/S1066369X17030100

4 Temirgaliev N., ZhubanishevaA.Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 55(9), 1432- 1443(2015). https://doi.org/10.1134/S0965542515090146

5 Утесов А.Б., Абдыкулов А.Т. Полное К(В)П – исследование задачи восстановления функций из анизотропных классов Соболева по неточным значениям их тригонометрических коэффициентов Фурье. Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, №1(122)/2018,стр.90 - 98. https://elibrary.ru/item.asp?id=42336934

6 Утесов А.Б. Об оптимальном восстановлении функций из класса Коробова в рамках К(В)П – постановки. Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «физ.- мат. науки», №2(70), 2020, стр. 115 – 121. https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.19%20

7 Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Абикенова Ш.К. Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника. ВестникЕНУим. Л.Н.Гумилева, №1 (126) / 2019. С.8-51. https://dspace.enu.kz/bitstream/handle/data/16582/discretization-of-solutions-of-partial-differential-equations-in-the-context-of-computational-numeri_.pdf?sequence=1

8 Azhgalliev Sh. On the discretization of solutions of the heat equation, Matematical Notes, 82(2), 153 – 158 (2007). https://dspace.enu.kz/bitstream/handle/data/2012/Discretization%20of%20the%20solutions%20of%20the%20heat%20equation.pdf?sequence=1

9 Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной. Труды МИАН СССР, 1986, т. 178, с. 3 - 113. http://www.mathnet.ru/links/3cb3d95ead34a8d17f2b9b133930ecff/tm2107.pdf

10 Никольский С.М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. Труды МИАН СССР, 1951, т.38, с. 244 - 278. http://www.mathnet.ru/links/afce3536f6d0484caf27bb63ce543fa4/tm1119.pdf

References:

1 Temirgaliev N., Zhubanisheva A.Zh. (2019). Computational (Numerical) diameter in the context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ),N1, 89 - 97https://doi.org/10.3103/S1066369X19010109

2 Temirgaliev N., Abikenova Sh.K., Zhubanisheva A.Zh., Taugynbaeva G.E. (2013) Discretization of solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation and Function Recovery with the help Computational (Numerical) Diameter, Russian Mathematics (Iz. VUZ),57(8), 75- 80. https://doi.org/10.3103/S1066369X13080094

3 Temirgaliev N., Zhubanisheva A.Zh. (2017) Order Estimates of the Norms of derivates of Functions with Zero Values of Linear Functionals and Their Applications, Russian Mathematics (Iz. VUZ), 61(3), 77-82. https://doi.org/10.3103/S1066369X17030100

4 Temirgaliev N., Zhubanisheva A.Zh. (2015) Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 55(9), 1432- 1443. https://doi.org/10.1134/S0965542515090146

5 Utessov A.B., Abdykulov A.T. (2018) Polnoe K(V)P – issledovanie zadachi vosstanovlenija funkcij iz anizotropnyh klassov Soboleva po netochnym znachenijam ih trigonometricheskih kojefficientov Fur'e [The complete C(N)D-solutionoftheproblem recovery of functions from anisotropic Sobolev classes by their unexact trigonometric Fourier coefficients]. Vestnik ENU im. L.N.Gumileva, №1(122), str. 90 - 98. https://elibrary.ru/item.asp?id=42336934

6 Utessov A.B. (2020) Ob optimal'nom vosstanovlenii funkcij iz klassa Korobova v ramkah K(V)P – postanovki [On optimal recovery of functions from the Korobov class in the framework of C(N)D - statement]. Vestnik KazNPU im. Abaja. Serija «fiz.–mat. nauki», №2(70), str. 115 - 121. https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.19%20

7 Temirgaliev N., Taugynbaeva G.E., Abikenova Sh.K. (2019) Diskretizacija reshenij uravnenij v chastnyh proizvodnyh v kontekste Komp'juternogo (vychislitel'nogo) poperechnika [Discretization of solutions of partial differential equations in the context of Computational(numerical)diameter].Vestnik ENU im. L.N.Gumileva, №1 (126) S.8-51. https://dspace.enu.kz/bitstream/handle/data/16582/discretization-of-solutions-of-partial-differential-equations-in-the-context-of-computational-numeri_.pdf?sequence=1

8 Azhgalliev Sh. (2007)On the discretization of solutions of the heat equation, Matematical Notes, 82(2), 153- 158. https://dspace.enu.kz/bitstream/handle/data/2012/Discretization%20of%20the%20solutions%20of%20the%20heat%20equation.pdf?sequence=1

9 Temljakov V.N. (1986) Priblizhenie funkcij s ogranichennoj smeshannoj proizvodnoj [Approximation of functions with bounded mixed derivative]. Trudy MIAN SSSR, t. 178, s. 3- 113. http://www.mathnet.ru/links/ 3cb3d95ead34a8d17f2b9b133930ecff/tm2107.pdf

10 Nikol'skij S.M. (1951) Neravenstva dlja celyh funkcij konechnoj stepeni i ih primenenie v teorii differenciruemyh funkcij mnogih peremennyh [Inequalities for entire functions of finite degree and their application in the theory of differentiable functions of many variables]. Trudy MIAN SSSR t.38, s. 244 - 278. http://www.mathnet.ru /links/afce3536f6d0484caf27bb63ce543fa4/tm1119.pdf