МРНТИ 27.25.19
УДК 517.51

https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.19

А.Б. Утесов

Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА КОРОБОВА В РАМКАХ К(В)П – ПОСТАНОВКИ

Аннотация

При оптимальном восстановлении оператора T, отображающего функциональный класс F в нормированное пространство Y, вычислительными агрегатами, построенными по неточной числовой информации $l^{(N)}$, последовательно решаются задачи К(В)П – 1, К(В)П –2 и К(В)П –3. В данной работе, когда в качестве оператора T рассматривается единичный оператор, в качестве класса F - многомерный однопериодический класс Коробова E_s^r, в качестве пространства Y – нормированное пространство непрерывных на $s-$мерном единичном кубе функций, в качестве числовой информации $l^{(N)}$ – тригонометрические коэффициенты Фурье восстанавливаемой функции, решены задачи К(В)П – 2 и К(В)П –3. Именно, в задаче К(В)П – 2 найдена предельная погрешность оптимального вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ из ранее решенной задачи К(В)П – 1, а в задаче К(В)П – 3 доказано, что любой вычислительный агрегат по тригонометрическим коэффициентам Фурье не имеет лучшей предельной погрешности, чем вычислительный агрегат $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$.

Ключевые слова: компьютерный (вычислительный) поперечник, вычислительный агрегат, числовая информация, класс Коробова, тригонометрические коэффициенты Фурье.

Аңдатпа

Ә. Б. Өтесов
Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

КОРОБОВА КЛАСЫ ФУНКЦИЯЛАРЫН К(Е)Д – ҚОЙЫЛЫМЫ АЯСЫНДА ОПТИМАЛДЫ ҚАЛЫПТАСТЫРУ ТУРАЛЫ

Функционалдық F класын нормаланған Y кеңістігіне бейнелейтін T операторын дәл емес $l^{(N)}$ сандық мәліметі бойынша құрылған есептеу агрегаттарымен қалыптастыруда бірінен кейін бірі К(Е)Д – 1, К(Е)Д –2 және К(Е)Д –3 есептері шығарылады. Бұл жұмыста T операторы ретінде бірлік оператор, F класы ретінде Коробовтың көпөлшемді бірпериодты E_s^r класы, Y кеңістігі ретінде $s-$өлшемді бірлік шаршыда үзіліссіз функциялардың нормаланған кеңістігі, $l^{(N)}$ сандық мәліметі ретінде қалыптастырылатын функцияның тригонометриялық Фурье коэффициенттері қарастырылып, К(Е)Д –2 және К(Е)Д –3 есептері шешілді. Дәл айтқанда, К(Е)Д –2 есебінде бұрын шығарылған К(Е)Д – 1 есебіндегі оптималды $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ есептеу агрегатының шектік қателігі табылды, ал К(Е)Д –3 есебінде тригонометриялық Фурье коэффициенттері бойынша құрылған кез келген есептеу агрегатының шектік қателігі $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ есептеу агрегатының шектік қателінен жақсы болмайтыны дәлелденді.

Түйін сөздер: Компьютерлік (есептеуіш) диаметр, есептеу агрегаты, сандық мәлімет, Коробов класы, тригонометриялық Фурье коэффициенттері .

Abstract

ON OPTIMAL RECOVERY OF FUNCTIONS FROM THE KOROBOV CLASS IN THE FRAMEWORK OF C(N)D – STATEMENT

Utessov A.B.

Aktobe Regional State University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

With optimal recovery of an operator T mapping a functional class F into a normed space Y by computing units constructed from inaccurate numerical information $l^{(N)}$, the problems C(N)D - 1, C(N)D –2 and C(N)D –3 are successively solved. In this work, when we consider the unit operator as the operator T, the multidimensional one-periodic Korobov class as the class F, the normalized space of functions continuous on the unit cube as the space Y, the trigonometric Fourier coefficients of the function being restored as numerical information $l^{(N)}$, problems C(N)D – 2 and C(N)D –3 are solved. Namely, in the problem C(N)D – 2 the marginal error of the optimal computing unit $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ from the previously solved problem C(N)D - 1 was found, and in the problem C(N)D - 3 it was proved, that any computing unit with respect to trigonometric Fourier coefficients has a better marginal error, than a computing unit $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$.

Keywords: Computational (numerical) diameter, computing unit, numerical information, Korobov class, trigonometric Fourier coefficients.

§1. Постановка задачи

В данной работе изучается задача восстановления в равномерной метрике функций из классов Коробова E_s^r по неточным значениям их тригонометрических коэффициентов Фурье в рамках постановки под названием «Компьютерный (вычислительный) поперечник» (коротко: К(В)П). Полную информацию о К(В)П – постановке задачи восстановления оператора по неточной числовой информации можно получить в [1].

В К(В)П– исследовании исходным является величина

$$\delta_N(\varepsilon_N;D_N;T;F)_Y=\inf_{(l^{(N)},\varphi_N)\in D_N}\delta_N\left(\varepsilon_N;(l^{(N)},\varphi_N);T;F\right)_Y,$$

$$\text{где }\ \delta_N\left(\varepsilon_N;(l^{(N)},\varphi_N);T;F\right)_Y=$$

$$=\sup_{f\in F}\ \sup_{\left|\gamma_N^{(1)}\right|\le 1,\dots,\left|\gamma_N^{(N)}\right|\le 1}\left\|Tf(\cdot)-\varphi_N\left(l_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\varepsilon_N,\dots,l_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\varepsilon_N;\cdot\right)\right\|_Y.$$

Здесь ε_N – неотрицательная последовательность, F - класс функций, заданных на Ω_F, а Y – нормированное пространство функций, заданных на Ω_Y. Далее, через T обозначен оператор, действующий из F в Y, D_N есть множество вычислительных агрегатов $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$, где $l^{(N)}=\left(l_N^{(1)},\dots,l_N^{(N)}\right)$ набор функционалов $l_N^{(1)}:F\mapsto C,\dots,\ l_N^{(N)}:F\mapsto C,$ а φ_N есть функция $\varphi_N(z_1,\dots,z_N;y):C^N\times\Omega_Y\mapsto C,$ которая при всяком фиксированном $(z_1,\dots,z_N)\in C^N$ как функция от переменной y принадлежит пространству Y.

Задача восстановления оператора $T:F\mapsto Y$ по неточной числовой информации $l^{(N)}$, оформленная под названием «Компьютерный (вычислительный) поперечник», заключается в последовательном решении трех задач - К(В)П – 1, К(В)П -2 и К(В)П - 3.

К(В)П – 1 при различных конкретизациях оператора T, пространства Y, класса F, множества D_N изучена многими математиками (см., напр. [2, §7 и §8], а также [3]).

В работе [4] задача К(В)П – 1 решена при $Tf=f$, $F=E_s^r\equiv E_s^r(0,1)^s$ – класс Коробова (определение класса дано в §2), $D_N=\Phi^{(N)}\times\{\varphi_N\}$, где $\Phi^{(N)}$ есть множество функционалов – тригонометрических коэффициентов Фурье $l_N^{(1)}(f)=\hat{f}\left(m^{(1)}\right),\ldots,l_N^{(N)}(f)=\hat{f}\left(m^{(N)}\right)$, в метриках пространств $L^{\infty}(0,1)^s\equiv C[0,1]^s$ и $L^2(0,1)^s$.

Далее, в работе [5] задача К(В)П – 1 из [4] была дополнена задачами К(В)П – 2 и К(В)П – 3 в метрике пространства $L^2(0,1)^s$. Здесь мы задачу К(В)П – 1 из [4] дополняем задачами К(В)П – 2 и К(В)П – 3 в метрике пространства $C[0,1]^s$. Тем самым, в настоящей работе в рамках К(В)П – постановки дано полное решение задачи восстановления функций из классов E_s^r по неточным значениям их коэффициентов Фурье в равномерной метрике.

Теорема. Пусть даны целое $N\geq 2$, действительное $r>1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

К(В)П - 2. Величина $\bar{\varepsilon}_N=\dfrac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}$ является предельной погрешностью для вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$:

во-первых,

$$\delta_N\left(0;\Phi^{(N)}\times\{\varphi_N\};Tf=f;E\right)_C\underset{s,r}{\succ\!\prec}\delta_N\left(\bar{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right);Tf=f;E\right)_C; \qquad (1)$$

во-вторых, для любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ последовательности $\{\eta_N\}_{N\geq 1}$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\frac{\delta_N\left(\eta_N\bar{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right);Tf=f;E\right)_C}{\delta_N\left(0;\Phi^{(N)}\times\{\varphi_N\};Tf=f;E\right)_C}=+\infty; \qquad (2)$$

К(В)П - 3. Для всех $(l^{(N)},\varphi_N)\in\Phi^{(N)}\times\{\varphi_N\}$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\frac{\delta_N\left(\eta_N\bar{\varepsilon}_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right);Tf=f;E\right)_C}{\delta_N\left(0;\Phi^{(N)}\times\{\varphi_N\};Tf=f;E\right)_C}=+\infty, \qquad (3)$$

где $\{\eta_N\}_{N\geq 1}$ есть любая сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ положительная последовательность.

§2. Доказательство теоремы

Всюду ниже через $\hat{f}(m)$ будем обозначать тригонометрические коэффициенты Фурье – Лебега функции $f\in E_s^r$.

Приведем определение класса Коробова $E_s^r \equiv E_s^r(0,1)^s$. Пусть функция $f(x) = f(x_1,...,x_s)$ непрерывна на единичном $s-$ мерном кубе $[0,1]^s$ и имеет период, равный единице по каждой из переменных $x_1,...,x_s$.

Будем говорить, что функция $f(x) = f(x_1,...,x_s)$ принадлежит классу E_s^r, если выполнены оценки $|\hat{f}(m)| \le \dfrac{1}{(\overline{m}_1 \times ... \times \overline{m}_s)^r}$, где $r > 1$, $\overline{m}_j = \max\{1;|m_j|\}\,(j = 1,...,s)$.

Нам понадобятся следующие леммы:

Лемма 1 (см. [4]). Пусть даны целое $N \ge 2$, действительное $r > 1.$ Тогда имеет место соотношение $\delta_N(0;\Phi^{(N)} \times \{\varphi_N\};Tf = f;E)_C \underset{s,r}{\succ\prec} \dfrac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1}}$, причем, указанный точный порядок реализуется вычислительным агрегатом $\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)$, состоящего из функции $\overline{\varphi}_N(z_1,...,z_N;x) = \sum\limits_{\tau=1}^{N} z_\tau e^{2\pi i(m^{(\tau)},x)}$ и функционалов

$$\bar{l}_N^{(1)}(f) = \hat{f}\left(m^{(1)}\right),...,\bar{l}_N^{(N')}(f) = \hat{f}\left(m^{(N')}\right), \bar{l}_N^{(N'+1)}(f) = ... = \bar{l}_N^{(N)}(f) = 0,$$

где $\left\{m^{(1)}, m^{(2)},...,m^{(N')}, m^{(N'+1)},...,m^{(N)}\right\}$ есть некоторое упорядочение множества $\Gamma_n = \{m = (m_1,...,m_s) \in Z^s : \overline{m}_1...\overline{m}_s \le 2^n\}$, а $n = n(N,s)$ выбирается из условий $\left|\Gamma_n\right| \le N < \left|\Gamma_{n+1}\right|$.

Лемма 2 (см. [5]). Пусть даны числа $s = 1,2,...$ и $R > 0.$ Тогда

$$\sum_{\overline{m}_1...\overline{m}_s \le R} 1 \succ\prec R(\ln R)^{s-1}.$$

Лемма 3. Для каждого действительного числа γ существует целое число $C_0(\gamma) > 0$ такое, что для всех целых $N \ge C_0(\gamma)$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{2}\ln N \le \ln(N \ln^\gamma N) \le 2\ln N.$$

Доказательство. Используем равенства $\lim\limits_{N\to\infty} \sqrt{N}\ln^\gamma N = +\infty$ и $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\ln^\gamma N}{N} = 0,$ справедливые для всех чисел γ.

Перейдем к доказательству теоремы. Так как $\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)(x) = \sum\limits_{\tau=1}^{N} \hat{f}\left(m^{(\tau)}\right) e^{2\pi i(m^{(\tau)},x)} = \sum\limits_{m\in\Gamma_n} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m,x)}$, то для произвольно заданных чисел $\gamma_N^{(\tau)}$ таких, что

$\left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1 (\tau = 1,..., N)$ имеем $\bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N,...,\bar{l}_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\bar{\varepsilon}_N; x\right)=$

$$= \sum_{m\in\Gamma_n}\hat{f}(m)e^{2\pi i(m,x)} + \sum_{\tau=1}^{N}\gamma_N^{(\tau)}\bar{\varepsilon}_N e^{2\pi i(m^{(\tau)},x)}.$$

При $r>1$ ряд Фурье любой функции $f\in E_s^r$ сходится абсолютно (см., напр. [6, с. 30]). Следовательно, $f(x)-\bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N,...,\bar{l}_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\bar{\varepsilon}_N; x\right)=$

$$= \sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_n}\hat{f}(m)\cdot e^{2\pi i(m,x)} + \sum_{\tau=1}^{N}(-\gamma_N^{(\tau)})\bar{\varepsilon}_N e^{2\pi i(m^{(\tau)},x)} = A_1(x)+A_2(x). \qquad (4)$$

В силу неравенств $\left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1 (\tau = 1,..., N)$ и равенства $\bar{\varepsilon}_N = \dfrac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}$, имеем

$\| A_2\|_C << \dfrac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1}}$. В [4] получена оценка $\| A_1\|_C << \dfrac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1}}$. Поэтому, согласно (4), получим

$$\left\| f(\cdot)-\bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N,...,\bar{l}_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\bar{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_{C\ s,r} << \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1}},$$

откуда, в силу произвольности чисел $\gamma_N^{(\tau)} (\tau = 1,..., N)$ и функции f, имеем

$$\delta_N\left(\bar{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right);Tf=f;E\right)_{C\ s,r} << \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1}}. \qquad (5)$$

Поскольку $\delta_N(0;\Phi^{(N)}\times\{\varphi_N\};Tf=f;E)_C >> \dfrac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1}}$ (см. лемму 1), то в силу неравенства $\delta_N\left(0;\Phi^{(N)}\times\{\varphi_N\};Tf=f;E\right)_C \le \delta_N\left(\bar{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right);Tf=f;E\right)_C$ и (5) получим соотношение (1).

Теперь убедимся в том, что для всех $(l^{(N)},\varphi_N)\in\Phi^{(N)}\times\{\varphi_N\}$ при любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ последовательности $\{\eta_N\}_{N\ge1}$ имеет место равенство (3). Заметим, что установив справедливость равенства (3), мы завершаем доказательство теоремы, ибо из равенства (3) следует (2).

Пусть дана сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ положительная последовательность $\{\eta_N\}_{N\ge1}$. Положим $\beta_N=\min\{\eta_N^{1/r},\ln(N+1)\}$ и для каждого $N=2,3,...$ определим функцию

$$g_N(x)=\varepsilon_N\beta_N^r\sum_{m\in G_N}e^{2\pi i(m,x)},$$

где

$$G_N\equiv\Gamma_N^{(\beta_N)}=\left\{m\in Z^s:\bar{m}_1\times...\times\bar{m}_s\le\frac{R}{\beta_N}\right\}, R=\frac{N}{\ln^{s-1}N}.$$

Поскольку для всех $m \in G_N$ выполнены неравенства

$$\hat{g}_N(m) = \varepsilon_N \beta_N^r = \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r} \cdot \beta_N^r \le \frac{\beta_N^r}{R^r} \le \frac{1}{(\overline{m}_1 \times \ldots \times \overline{m}_s)^r},$$

то $g_N \in E_s^r$. В силу лемм 2 и 3, а также неравенства $\beta_N \le \ln(N+1)\}$ имеет место следующая цепочка неравенств $\left\| g_N \right\|_C \ge \varepsilon_N \beta_N^r \left(\sum_{m \in G_N} 1 \right) \underset{s}{>>} \varepsilon_N \beta_N^r \frac{R}{\beta_N} \left(\ln \frac{R}{\beta_N} \right)^{s-1} \underset{s}{>>}$

$$\underset{s}{>>} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r} \beta_N^r \frac{N}{\beta_N \ln^{s-1} N} \left(\ln \frac{N}{\beta_N \ln^{s-1} N} \right)^{s-1} \underset{s}{>>} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}} \beta_N^{r-1} \times$$

$$\times \frac{1}{\ln^{s-1} N} \left(\ln \frac{N}{\beta_N \ln^{s-1} N} \right)^{s-1} \underset{s}{>>} \delta_N (0; \Phi^{(N)} \times \{\varphi_N\}; Tf = f; E)_C \beta_N^{r-1}.$$

Далее, следуя схеме доказательства теоремы из [7], получим

$$\delta_N \left(\eta_N \bar{\varepsilon}_N; \left(l^{(N)}, \varphi_N \right); Tf = f; E \right)_C \underset{s}{>>} \delta_N \left(0; \Phi^{(N)} \times \{\varphi_N\}; Tf = f; E \right)_C \beta_N^{r-1}.$$

Поскольку при $r > 1$ верно $\lim\limits_{N \to +\infty} \beta_N^{r-1} = +\infty$, то из последнего неравенства следует (3).

Теорема доказана.

Список использованной литературы:

1 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора дифференцирования на многомерных классах Соболева // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, том 55, №9, стр. 1474 – 1985.

2 Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази – Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, 2010. С.1-194.

3 Утесов А.Б., Утесова Г.И. Об оптимальном восстановлении функций из анизотропного класса Соболева по числовой информации в лебеговой метрике. Вестник КазНПУ им. Абая, серия «физико - математические науки», №4(68), 2019, стр. 114 – 119.

4 Ажгалиев Ш. Оптимальное восстановление функций из классов по информации, полученной от тригонометрических коэффициентов Фурье. Вестник КазНУ им. аль -Фараби. – 2000. №3(22), стр. 4 – 12.

5 Темиргалиев Н., Шерниязов К. Е., Берикханова М. Е. Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна – Гордона по коэффициентам Фурье // Современные проблемы математики / Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. – М.: МИАН, 2013. С.179 –207.

6 Коробов Н. М. Теоретико - числовые методы в приближенном анализе. – М.: Физматгиз, 1963. 224 с.

7 Утесов А.Б., Абдыкулов А.Т. Полное К(В)П – исследование задачи восстановления функций из анизотропных классов Соболева по неточным значениям их тригонометрических коэффициентов Фурье. Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, №1(122)/2018, стр. 90 – 98.

References:

1. Zhubanysheva A.Zh., Temirgaliev N. (2015) Informativnaja moshhnost' trigonometricheskih kojefficientov Fur'e i ih predel'naja pogreshnost' pri diskretizacii operatora differencirovanija na mnogomernyh klassah Soboleva [Informative power of trigonometric Fourier coefficients and their limiting error in discretizing the differentiation *operator on multidimensional Sobolev classes]. Zh. vychisl. matem. i matem. fiz., tom 55, №9, str. 1474- 1985. (In Russian)*

2. Temirgaliev N. (2010) Komp'juternyj (vychislitel'nyj) poperechnik. Algebraicheskaja teorija chisel i garmonicheskij analiz v zadachah vosstanovlenija (metod kvazi – Monte Karlo). Teorija vlozhenij i priblizhenij. Rjady Fur'e [Computer (computational) diameter. Algebraic number theory and harmonic analysis in renewal problems (quasi-Monte Carlo method). The theory of embeddings and approximations. Fourier series]. Spec. vypusk, posvjashhennyj nauchnym dostizhenijam matematikov ENU im. L.N.Gumileva. Vestnik ENU im. L.N.Gumileva, 1-194. (In Russian)

3. Utesov A.B., Utesova G.I. (2019) Ob optimal'nom vosstanovlenii funkcij iz anizotropnogo klassa Soboleva po chislovoj informacii v lebegovoj metrike [Optimal recovery of functions from an anisotropic Sobolev class from numerical information in the Lebesgue metric]. Vestnik KazNPU im. Abaja, serija «fiziko - matematicheskie nauki», №4(68), 114- 119. (In Russian)

4. Azhgaliev Sh. (2000) Optimal'noe vosstanovlenie funkcij iz klassov po informacii, poluchennoj ot trigonometricheskih kojefficientov Fur'e [Optimal recovery of functions from classes based on information obtained from trigonometric Fourier coefficients.]. Vestnik KazNU im. al' -Farabi. №3(22), 4 – 12. (In Russian)

5. Temirgaliev N., Shernijazov K. E., Berikhanova M. E. (2013) Tochnye porjadki komp'juternyh (vychislitel'nyh) poperechnikov v zadachah vosstanovlenija funkcij i diskretizacii reshenij uravnenija Klejna -Gordona po kojefficientam Fur'e [Exact orders of computer (computational) widths in problems of recovering functions and discretizing solutions of the Klein - Gordon equation in terms of Fourier coefficients]. Sovremennye problemy matematiki. Matematicheskij institut im. V.A. Steklova RAN. M.: MIAN, 179 –207. (In Russian)

6. Korobov N. M. (1963) Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Numerical-theoretic methods in approximate analysis]. M.: Fizmatgiz, 224. (In Russian)

7. Utesov A.B., Abdykulov A.T. Polnoe K(V)P (2018) issledovanie zadachi vosstanovlenija funkcij iz anizotropnyh klassov Soboleva po netochnym znachenijam ih trigonometricheskih kojefficientov Fur'e [Complete K (B) P - investigation of the problem of recovering functions from anisotropic Sobolev classes from inaccurate values of their trigonometric Fourier coefficients]. Vestnik ENU im. L.N.Gumileva, №1(122), 90- 98. (In Russian)